مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (31) العدد (1) 2009
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (31) No. (1) 2009

معايير للتحكم والوصول في النظم الخطية المتقطعة

الدكتور محمود عثمان [*]

(تاريخ الإيداع 2 / 2 / 2009. قُبِل للنشر في 2009/3/17)

□ الملخّص □

في هذا البحث تم عرض بعض التعاريف والنظريات المشهورة في خواص قابلية التحكم والوصول للأنظمة الخطية المتقطعة ذات المعاملات الثابتة والتي تكتب على النحو التالي:

$$X(t+1)=AX(t)+Bu(t+1)$$

$$X(0)=X_o \qquad\qquad X(T)=X_T$$

$$|u(t)|\leq 1$$

وتم التوصل إلى ما يلي:

1– تحويل نظام التحكم إلى مسائل البرمجة الخطية.

2– إيجاد سلسلة من النتائج الجديدة في خواص قابلية التحكم والوصول لبعض الأنظمة الخطية المتقطعة.

3–وضع خوارزمية جديدة لإيجاد أقل عدد من الخطوات والتي نتمكن بها من نقل النظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية ثم استنتاج متجهة التحكم.

4–وضع مثال يوضح صحة الخوارزمية السابقة.

الكلمات المفتاحية:

rank(A) رتبة المصفوفة، [A,B] المصفوفة التي تضم المصفوفتين A و B، $\lambda_k(A)$ القيم المميزة للمصفوفة A ، I المصفوفة الواحدية ،النظام (1-3) تعني مجموعة العلاقات من واحد وحتى ثلاث[a|b] المصفوفة الموسعة.

[*] أستاذ – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

Controllability and Accessibility Criteria in Optimal Control for Linear Discrete System

Dr. Mahmoud Osman *

(Received 2 / 2 / 2009. Accepted 17/3/2009)

□ ABSTRACT □

In this research many definitions and theories have been manifested regarding the specifications of controllability and accessibility in optimal control for discrete system of the type:

$$X(t+1)=AX(t)+Bu(t+1)$$
$$X(0)=X_0 \quad X(T)=X_T \quad ,$$
$$|u(t)|\leq 1$$

The following results have been reached :

1 - Transforming control system to the problem of linear programming.

2- Finding a series of new results of controllability and accessibility for optimal control discrete system.

3- Putting out a new algorithm to find the minimum number of steps that can enable us to move the state system from the primary stage into the final one.

4- Giving an example which shows the truthfulness of the previous algorithm .

Key Words:
rank(A) Rank of Matrix A,[a|b] Augmented of Matrix A, $\lambda_k(A)$ Eigen value of Matrix, I Identity Matrix,[A,B] matrix from matrix A and matrix B

مقدمة:

*Prof, mathematics department , faculty of sciences, Tishreen University ,Lattakia, Syria.

في السنوات الأخيرة من العقد الماضي ازداد الاهتمام بالنظم الخطية المتقطعة كونها تدخل في كثير من المسائل التكنولوجية والاقتصادية وغيرها من العلوم الأخرى ، ويكون من السهل دراسة هذه النظم وكتابتها بدلالة معادلات الفروق حيث يمكن برمجتها باستخدام الآلات الحاسبة.

ولنذكر مثالا على أبسط هذه النظم:

مثال: حساب رصيد مشترك في مصرف التوفير

بفرض X(n) هو حساب رصيد مشترك في مصرف التوفير ولتكن $\propto$ هي مقدار الفائدة شهريا وليكن u(n) هو مجموع الإيداعات والسحوبات شهريا وبالتالي يكون الرصيد في كل شهر هو المتتالية:

$$X(n) \;\; ;n=0,1,2,\ldots\ldots$$

والتي تحقق المعادلة الفرقية:

$$X(n+1)=(1+\propto)X(n)+u(n+1) \;;n=0,1,2,\ldots.$$

$$X(0)=X_0$$

X_0 هو الرصيد الابتدائي للمشترك.

وهنالك مسائل مشهورة في النظم الخطية المتقطعة نذكر منها:

1- مسألة تنظيم الكوادر البشرية

2- مسألة إيجاد الحل الأمثل للطاقة الكهربائية

3- مسألة إرسال المراكب الفضائية للالتقاء بمحطة الأقمار الصناعية

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث في الحصول على معايير لقابلية التحكم والوصول للنظم الخطية المتقطعة والتي نحتاج إليها دوما لمعرفة إذا كان النظام قابلاً للتحكم أو قابلاً للوصول أم لا ، وبدون هذه المعايير لا يمكن معرفة النتائج المجدية.

طرائق البحث ومواده:

وضعت بعض الأمثلة التطبيقية لإظهار صحة المعايير الموضوعة وكذلك تم وضع خوارزمية لإيجاد أقل عدد من الخطوات لكي يكون النظام قابل للوصول .

قابلية التحكم للنظم الخطية المتقطعة ذات المعاملات الثابتة:

النموذج الرياضي:

ليكن النظام معطى بالشكل التالي:

(1) $X(t+1)=AX(t)+Bu(t+1)$

(2) $X(0)=X_0 \quad X(T)=X_T$

(3) $|u_j(t)| \le 1$

نسمي: $X(t) \in R^n$ متجهة الحالة للنظام في اللحظة t

$u(t) \in R^m$ متجهة التحكم

X_0 و X_T الحالة الابتدائية والنهائية للنظام

T={0,1,2,..............}

A و B مصفوفتان أبعادهما على الترتيب nxn و nxm

بفرض $\det A \neq 0$ من (1) و (2) نستطيع أن نكتب :

$$X(1)=AX(0)+Bu(1)=AX_0+Bu(1)$$
$$X(2)=AX(1)+Bu(2)=A[AX_0+Bu(1)] +Bu(2)$$
$$=A^2X_0+ABu(1) +Bu(2)$$
$$X(3)=AX(2)+Bu(3)=A[A^2X_0+ABu(1) +Bu(2)]+Bu(3)$$
$$=A^3X_0+A^2Bu(1)+ABu(2)+Bu(3)$$

....

....

$$X(T) = A^T x_0 + A^{T-1}\, Bu(1) + A^{T-2}\, Bu(2) + \cdots ABu(T-1)+Bu(T)$$
$$= A^T\, x_{0+}[A^{T-1}\, B + A^{T-2}B + \cdots . +AB + B]u(t)$$

حيث $u(t)=(u(1),u(2),............u(T))'$

$$X(T) = A^T x_0 + \sum_{i=1}^{T} A^{T-i}\, Bu(i) \qquad (4)$$

<u>تعريف1</u>: نقول إن النظام (1-2) قابل للتحكم وذلك إذا تمكنا من إيجاد متجهة التحكم $\{u(1),u(2),..... .....u(T)\}$ بحيث يمكننا نقل النظام من الحالة الابتدائية X_0 إلى الحالة النهائية $X_T=0$

في هذه الحالة تكتب المعادلة (4) على النحو التالي:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{T} -A^{-i}\, Bu(i) = \sum_{i=1}^{T} R(i)u(i); R(i) = -A^{-i}\, B \qquad (5)$$

يمكننا كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{m} u_j\,(i) r^j(i) \qquad (6)$$

نعني ب $r^j(i)$ أعمدة المصفوفة R(i) حيث i=1,2,......n و j=1,2,......m

<u>نظرية 1:</u> إذا كان لدينا جملة المعادلات الخطية: AX=B

حيث المصفوفات A و B و[A|B] أبعادهم على الترتيب nxn و nx1 و nx(n+1) فإننا نقول:

إذا كانت rank(A)=n (رتبة المصفوفة A) فإن rank[A|B]=n

<u>البرهان:</u>

بفرض rank(A)=n فإن $n \leq m$ لأن rank(A)=min(n,m)

وبالتالي فإن $n \leq m + 1$ وهذا يعني أن :

Rank[A|B]=min(n,m+1)=n

<u>نظرية 2:</u> إذا كان لدينا جملة المعادلات الخطية: AX=B

حيث المصفوفات A و B و[A|B] أبعادهم على الترتيب nxn و nx1 و nx(n+1) حيث n عدد المجاهيل

يكون لدينا:

1- لايوجد للجملة حل إذا كان: rank(A)< rank[A|B]
2- يوجد حل وحيد للجملة إذا كان: rank(A)=rank[A|B]
3- يوجد للجملة عدد غير منته من الحلول إذا كان: rank(A)=rank[A|B]<n

للبرهان: انظر [1]

نظرية 3: الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام (2-1) قابلاً للتحكم هو أن نجد بين المتجهات $r^j(i)$ أعمدة المصفوفة R(i) ، n متجهة مستقلة خطيا أو

$$rank[A^{-1}\,B, A^{-2}B, \dots\dots\dots.A^{-T}B] = n$$

البرهان:

لزوم الشرط: بفرض $\mathrm{R_T} = -[\mathrm{A^{-1}B, A^{-2}B, \dots\dots.A^{-T}\,B}]$

و U=(u(1),u(2),............u(T))' وبالتالي تكتب المعادلة (4) على النحو التالي:

$$R_T\mathrm{U} = \mathrm{x_0} \qquad (7)$$

إذا كان النظام (2-1)قابلاً للتحكم فإنه يمكن إيجاد المتجهة U والتي تحقق المعادلة (7)

أي أن: $rank(R_T) = n$

كفاية الشرط:

إذا كان : $rank(R_T) = n$ فإن $rank\ [R_T|X_0] = n$ اعتمادا على النظرية (1) وحسب النظرية (2) فإنه يوجد حل للنظام (7) إي أنه يوجد متجهة التحكم U بحيث نتمكن من نقل النظام من الحالة X_0 إلى الحالة $X_T = 0$

مثال 1:ليكن النظام معطى كما يلي:

$$(t+1)\mathrm{X_1(t+1) = X_1(t) + u_1}$$

$$\mathrm{X_2(t+1) = X_2(t)}$$

$$(t+1)\mathrm{X_3(t+1) = X_1(t) + X_3(t) + u_2}$$

$$X(0) = X_{0,}\ \ X(T) = 0$$

المطلوب: هل النظام قابل للتحكم أم لا

الحل:

لدينا: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$ فيكون معكوس المصفوفة A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$R(1) = -A^{-1}B = \begin{pmatrix}-1&0\\0&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R(1)=}\ \begin{matrix}-1&0\\0&0\\2&-1\end{matrix}\ R(2) = -A^{-2}B\Big(= A^{-1}\qquad\Big)$$

$$R(2)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix} \quad R(3)=-A^{-3}B=A^{-1}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن: $r^j(i)$ حيث i=1,2,3 و j=1,2 تكون على الشكل التالي:

$$r^1(1)=(-1,0,1)' \ ,r^2(1)=(0,0,-1)'$$
$$r^1(2)=(-1,0,2)' \ ,r^2(2)=(0,0,-1)'$$
$$r^1(3)=(-1,0,3)' \ ,r^2(3)=(0,0,-1)'$$

نلاحظ أن المركبة الثانية في جميع المتجهات تساوي الصفر لذلك لايمكن اختيار أي ثلاثة من المتجهات بحيث تشكل قاعدة(أساس) في الفضاء R^3 وبالتالي فإن النظام غير قابل للتحكم .

__مثال 2__:ليكن النظام معطى كما يلي:

$$(t+1)X_1(t+1)=X_1(t)+u_1$$
$$X_2(t+1)=X_2(t)+\frac{1}{2}X_2(t)+X_3(t)$$
$$(t+1)X_3(t+1)=X_1(t)+X_3(t)+u_2$$
$$X(0)=X_0,\ \ X(T)=0$$

المطلوب: هل النظام قابل للتحكم أم لا

__الحل:__

لدينا: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ فيكون معكوس المصفوفة A :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$R(1)=-A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

أي أن : $r^1(1)=(-1,0,1)' \ ,r^2(1)=(0,2,-1)'$

$$R(2)=-A^{-2}B=A^{-1}\ R(1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 6\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

أي أن: $r^1(2)=(-1,-2,2)' \ ,r^2(2)=(0,6,-1)'$

ليس من الضروري حساب $R(3)$ لأنه يمكننا الحصول من المتجهات الأربع السابقة على قاعدة(أساس) في الفضاء R^3 والمؤلفة من المتجهات:

$$r^1(1),r^2(1),r^2(2)$$

يمكن التحقق بسهولة أن المتجهات السابقة مستقلة خطيا وهذا يعني أن النظام قابل للتحكم.

نظرية 4:الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام (2-1) قابلاً للتحكم مع وجود الشرط (3) هو أن يتحقق :

1- المتجهات: $r^j(i)$ حيث i=1,2,......T و j=1,2,......m قاعدة في R^n

2- القيم الذاتية للمصفوفة A تحقق العلاقة: $|\lambda_k(A)| \leq 1$

البرهان: إنظر [4]

ملاحظة: هنالك العديد من الأنظمة تكون ذات مدخل واحد بمعنى أن متجهة التحكم مؤلفة من مركبة واحدة والمصفوفة B مؤلفة من عمود واحد b أبعادها nx1 عندئذ نقول إن النظام(3-1) قابل للتحكم إذا تحقق مايلي:

1- $rank[\, A^{-1}b, A^{-2}\, b, \dots \dots \dots \dots A^{-T}b] = n$

2- $|\lambda_k(A)| \leq 1$

أما إذا أردنا أن يكون التحكم موجباً تماماً أي $u(t) \in [0,\infty[$ فإننا نغير الشرط (2) ليصبح كالتالي: $\lambda_k(A) < 0$

أنظر [2]

مثال 3:ليكن النظام معطى كما يلي:

$$(t+1)X_1(t+1) = X_1(t) + u_1$$

$$X_2(t+1) = X_2(t)$$

$$(t+1)X_3(t+1) = X_1(t) + X_3(t) + u_2$$

$$X(0) = X_{0,} \quad X(T) = 0$$

مع وجود الشرط التالي على متجهة التحكم : $|u(T)| \leq 1$

المطلوب: هل النظام قابل للتحكم أم لا:

الحل : لقد برهنا في المثال (2) أنه يمكن إيجاد قاعدة في الفضاء R^3

ولنبرهن الشرط الثاني:

نحسب القيم المميزة للمصفوفة A *فنجد:* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}$

أي أن $|\lambda_k(A)| \leq 1$ وبالتالي فإن النظام قابل للتحكم .

قابلية الوصول:

تعريف: نقول إن النظام *(1-3)* قابل للوصول إذا تمكنا من إيجاد متجهة التحكم:U={u(1),u(2),...........u(T)} بحيث نتمكن من نقل النظام من الحالة الابتدائية $X_0 = 0$ إلى الحالة $X(T) = X_T$

النموذج الرياضي للنظام:

في المعادلة *(4)*نعطي $X_0 = 0$ فتصبح على الشكل التالي:

$$X(T) = \sum_{i=1}^{T} A^{T-i}\, Bu(i)$$

بفرض $U(t)$ =(u(T),u(t-1),..........u(1))') و

$$C_T = [B, AB, \dots \dots \dots \dots \dots A^{T-1}B]$$

نستطيع أن نكتب النظام *(1-3)* على النحو التالي:

$$(8)\quad C_T\ U(t) = X_T$$
$$(9)\quad |u(t)| \leq 1$$

نظرية *Hautos* :

إذا كان لدينا مصفوفتان A و B أبعادهما على الترتيب nxn و nxm عندئذ نقول إنه يوجد للنظام: $PU=f$

حلٌ حيث $P = [B, AB, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots A^{T-1}B]$

مصفوفة أبعادها $nx(mT)$

و U متجهة تحوي n مركبة و f عمود الثوابت مؤلف من n مركبة

وذلك إذا تحقق الشرط التالي:

$$rank[A-\lambda_k, B] = n$$

حيث λ_k هي القيم المميزة للمصفوفة A :

للبرهان إنظر [3]

نتيجة: الشرط اللازم والكافي حتى يكون النظام *(3-1)*قابلاً للوصول هو أن يتحقق الشرطان التاليان:

1- $rank[A-\lambda_k I, B] = n$ حيث I هي المصفوفة الواحدية

2- $|\lambda_k(A)| \leq 1$

مثال4:ادرس قابلية الوصول في المثالين السابقين (1)و(2)

بالنسبة للمثال الأول:لدينا $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ نلاحظ أن القيم المميزة للمصفوفة A هي:

$\lambda 1 = \lambda 2 = \lambda 3 = 1$ وبالتالي فإن :

$$[A-\lambda 1 I] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A-\lambda 1 I, B] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

من الواضح أن $rank[A-\lambda 1, B] = 2$ بينما n=3 وهذا يعني أن النظام غير قابل للوصول.

أما بالنسبة للمثال 2 فإن القيم المميزة ل A هي:

$$\lambda 1 = \lambda 2 = 1, \lambda 3 = \frac{1}{2}$$

من أجل $\lambda = 1$ فإن

$$[A-\lambda 1 I, B] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ومن أجل إيجاد رتبة هذه المصفوفة نضع السطر الثالث مكان السطر الأول فتصبح المصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -0.5 & 1 & \vdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{-r1+r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 & \vdots 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

يكون لدينا: $\lambda 3 = \frac{1}{2}$ وكذلك من أجل $rank[A-\lambda 1, B] = 3 = n$ نلاحظ أن :

$$[A - \lambda 3I, B] = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r1, 2r3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r2+r3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{2}r3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

من الواضح أن: $rank[A-\lambda 1, B] = 3 = n$ وبالتالي فإن الشرطين:

*(1)*و *(2)* متحققان والنظام قابل للوصول

إيجاد الحل الأمثل للنظام:

تعريف 1:باستخدام المعادلتين *(8)*و *(9)* نسمي المجموعة :

$R_T = \{u(t): C_T\ U(t) = X_T\ \&|u(t)| \leq 1\}$ *مجموعة الوصول*

<u>تعريف 2:</u> بفرض $T^* \leq T$ تمثل أقل عدد من الخطوات، والتي تمكننا من نقل النظام من الحالة الابتدائية X(0)=0 إلى الحالة النهائية X(T) فإن التحكم الأمثل للنظام هو: $u^* = \{u(1), u(2), \dots\dots\dots u(T^*)\}$

<u>نظرية5:</u> الشرط اللازم والكافي حتى يكون $u^* = \{u(1)\}$ هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$rank\ [B|x_T] \quad = rank\ B$$

<u>لزوم الشرط:</u> بفرض $u^* = \{u(1)\}$ عندها يكون للنظام $Bu(1) = X_T$

حلا أي أن $rank\ B = rank\ [B|x_T]$

كفايـــة الشـــرط: بفـــرض أن: $\mathrm{rank}\ [B|X_T] = \mathrm{rank}\ B$ فـــإن للنظـــام $\mathrm{B\ u}(1) = \mathrm{X_T}$ حـــلا أي أن
$\mathrm{u}^* = \{\mathrm{u}(1)\}$

تحويل النظام إلى مسائل البرمجة الخطية:

بإدخال متجهتين: $W=(w(T),w(T-1),........w(2),w(1))'$

و $V=(v(T),v(T-1),.........v(2),v(1))'$

بحيث يكون $u(t)=v(t)-w(t) \quad ;t=T,T-1,..........2,1$

$|u(t)|=v(t) + w(t) \ ;t=T-1,T-2,..........2,1$

$0 \le \mathrm{v}(t) \le 1 \quad ,0 \le w(t) \le 1; t = T, T-1, \dots 2,1$

انظر *[4]*

وبالتالي يمكننا كتابة العلاقات *(8)*و *(9)* على النحو التالي:

$$C_T\ [V - W] = X_T$$

$$\mathrm{v}(t) + w(t) \le 1\ ; t = T, T-1, \dots 2,1$$

أو على النحو التالي: $$D_T \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = X_T \qquad (10)$$

$$\mathrm{v}(t) + w(t) \le 1 \qquad (11)$$

حيث $D_T = [C_T - C_T]$

ويمكننا البرهان أن المسألة (10-11) *مكافئة للمسألة التالية:*

$$D_T \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = X_T \qquad (12)$$

$$0 \le \mathrm{v}(t) \le 1 \quad ,0 \le w(t) \le 1; t = T, T-1, \dots 2,1 \qquad (13)$$

البرهان: نقول عن المسألتين*(10-11)*و *(12-13)* أنهما متكافئتان إذا كان حل المسألة الأولـى حـلا للمسألة الثانيـة والعكس صـحيح ، بفرض *{V,W}* حل للمسألة الأولـى فإذا لـم يكـن حـلا للمسـألة الثانيـة فـإن $u(t) > 1$ أو $\mathrm{v}(t) > 1$ وهذا مناقض للعلاقة *(11)* وبالتـالي فهو حل للمسـألة الثانيـة وبسـهولة يمكن البرهان أن أي حل للمسألة الثانية هو حل للمسألة الأولى.

نلاحظ أن العلاقات *(12-13)* يمكن جعلها مسألة من مسائل البرمجة الخطية وذلك بإضافة دالة الهدف.

بما أن النظام *(12)* لايتضمن متباينات لذلك يمكننا أن نضيف مجاهيل اصطناعية *y1* للمعادلة الأولـى و *y2* للمعادلة الثانية وهكذا وبفرض:

$Y= (y1,y2,..........yn)'$ *نكتب العلاقات* (12-13) *بشكل برنامج خطـي فيه دالة الهدف:*

$$Z=y1+y2+y3+.........+yn------\rightarrow min \qquad (14)$$

مع وجود الشروط:

$$(15)\qquad [D_T \ \vdots \ \ I_n\ ]\begin{bmatrix} V \\ W \\ Y \end{bmatrix} = x_T \ \ C_T = [B, AB, \dots\dots\dots\dots\dots A^{T-1}B]$$

$$(16)\ \ 0 \le v(t) \le 1 \ \ ,0 \le w(t) \le 1; t = T, T-1, \dots 2,1$$

ونحصل على الحل الأمثل لهذا البرنامج عندما يخلو الحل من المجاهيل الاصطناعية

خوارزمية لإيجاد T^* ثم استنتاج متجهة التحكم الأمثل:

خطوة 1– نعطي T=*1* ثم نتأكد إذا كان $rank\ B = rank\ [B|X_T]$ فإذا كان محققا يكون $u^* = \{u(1)\}$ هو الحل الأمثل ثم نذهب إلى الخطوة 7

خطوة 2:نعطي T=2

خطوة 3: نكون المصفوفة D_T

خطوة 4: نكون خوارزمية سيمبلكس للمسألة(14-16)

خطوة 5: ندخل حلاً أولياً مؤلفاً من المجاهيل الاصطناعية فإذا تمكنا من إخراج جميع المجاهيل الاصطناعية من الحل تكون $T^* = T$ هي أقل عدد من الخطوات وبالتالي يمكننا استنتاج الحل الأمثل ثم نذهب إلى الخطوة 7

خطوة 6: نعطي T تزايدا بمقدار 1 أي T=T+1 ثم نذهب إلى الخطوة 3

خطوة 7: النهاية

مثال: ليكن النظام معطى كما يلي:

$$X_1(t+1) = X_1(t) + X_2(t)$$
$$(t+1)X_2(t+1) = X_2(t) + u$$

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \ ,X(T) = X_T = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$1 \le |u(t)|$$

المطلوب:

1- هل النظام قابل للوصول

2- عين T^* أقل عدد الخطوات والتي تمكننا من نقل النظام من الحالة الابتدائية الى الحالة النهائية

3- استنتج متجهة التحكم الأمثل للنظام والمسارات الموافقة لها

الحل:

الطلب الأول:

لدينا : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

نلاحظ أن القيم اللميزة للمصفوفة A هي: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ وبالتالي من أجل $\lambda = 1$ تكون

$$[A - \lambda I, B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن $rank[A-\lambda I, B] = 2 = n$

وبما أن : $|\lambda_k(A)| \leq 1$ إذن النظام قابل للوصول

الطلب الثاني:

نطبق الخوارزمية السابقة:

خطوة 1: نعطي *T=1* ونتحقق من العلاقة :

$$rank\ [B|x_T]\ \ = rank\ B$$

$[B|x_T] = \begin{matrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{matrix}$ ومن السهل أن نجد أن rank B=1 بينما

$rank\ [B|x_T] = 2$ وبالتالي الشرط غير محقق فننتقل إلى الخطوة 2

خطوة 2: نعطي T=2

خطوة 3:نشكل المصفوفة $D_T = [C_T, -C_T]$

لدينا: $C_T = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فيكون $D_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

خطوة 4: نكون جدول خوارزمية سيمبلكس مع إدخال المجاهيل الاصطناعية:

	v(2)	v(1)	w(2)	w(1)	y1	y2	b
$y1$	0	0	0	0	1	0	4
$y2$	1	0	−1	−1	0	1	4
	−1	0	1	1	0	0	

وبتطبيق طريقة سيمبلكس حيث المجاهيل محدودة من الأعلى أنظر [5]

نلاحظ أن أكبر قيمة سالبة تقع في العمود الأول لذلك نحاول إمكانية إدخال v(2) مكان y(2) من أجل ذلك نوجد: a=h=1 و b=min{4/1]=4 لذلك نختار الحالة a

في هذه الحالة يبقى المتغير y2 في الحل وهذا يعني أن T=3 لاتصلح لنقل النظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية

خطوة 5: نعطي T تزايد بمقدار 1 فتصبح T=3 ثم نعود إلى الخطوة 3

وهكذا نستمر بالحل نجد أن $T^* = 11$ بعد ذلك نستنتج متجهة التحكم:

وتكون متجهة الحالة الموافقة:U={-0.33,0,0,0,0,0,0.33,1,1,1,1}

$$x_1 = \{0,0,-0.33,-0.66,-1,-1.33,-1.66,-2,-2,-1,1,4\}$$

$$x_2 = \{0,-0.33,-0.33,-0.33,-0{,}33,-0.33,-0.33,0,1,2,3,4\}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تم إيجاد الحل الأمثل للنظام مع وجود شروط على متجهة التحكم ويمكننا مستقبلا أن نبحث عن معايير لقابلية التحكم والوصول في حال وجود شروط على متجهة التحكم ومتجهة الحالة معا.

كما أن هنالك صعوبة بالغة في إيجاد الحل الأمثل وخاصة عندما تكون المصفوفات الداخلة في النظام ذات أبعاد كبيرة لذلك يفضل وضع برنامجٍ حاسوبيٍ يمثل خوارزمية إيجاد الحل الأمثل للنظام .

المراجع:

[1]-K.R.MATTHEWS,*Elementary Linear Algebra*,University of Queennsland 1998, 189.

[2]- B.ROMTCHEF ,*Optimal control for Discrete System*,cofia 1978, 157.

[3]-YASUO MURTA,*Optimal Control Methods for Linear Discrete* –Time Economic System,Nagoya,Japan 1982, 197.

[4]-CANON ,M.D.CULLUM,C.D.JR,AND POLAK,E., *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming(MeGraw – hill*-Book-Compan)1970, 231

[5]-DAVID G.LUENBERGER,*Introduction to Linear and Nolinear Programing*,Stanford University 1973, 356

[6]PAULO TABUDA , GORGE J.PAPPAS, *Linear time logic of discrete-time linear system* ,Ieee Transaction On Automatic Control Vol 51,No 12,December 2006

[7]ASMA AL-TAMIMI,FRANK L.LEWIS,MURAD ABU-KHALAF,*Model-free Q-learning designs for linear discrete-time Zero –sum games with application to H-infinity control*-Volume 43,ISSUE 3,March 2007, 473-481