مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

استخدام التقسيم النظامي للسيمبلكس النوني القياسي في إثبات مبرهنة بروور للنقطة الثابتة

الدكتور محمود باكير*

(تاريخ الإيداع 18 / 9 / 2007. قُبِل للنشر في 2008/4/9)

□ الملخّص □

تعد مبرهنة بْرووَر للنقطة الثابتة من المبرهنات الهامة في الأدبيات الرياضية، وهي تعميم لمبرهنة القيمة المتوسطة للتوابع المستمرة، ولها العديد من الإثباتات المعروفة. نثبت أولاً أنه إذا كان σ السيمبلكس القياسي في $\mathbf{R}^n$ وكان لدينا تابع مستمر من σ إلى نفسه، فإن لهذا التابع نقطة ثابتة واحدة على الأقل، وذلك اعتماداً على التقسيم النظامي للسيمبلكس النوني القياسي. ثم نثبت أنه أية مجموعة متراصة ومحدبة في $\mathbf{R}^n$ فإنها تتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية: مبرهنة بروور – نقطة ثابتة – السيمبلكس–رقم التصنيف العالمي الرياضي MR54.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق– دمشق – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (2) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (2) 2008

Using the Standard Division of the Standard n–Simplex for proving the Brouwer Fixed Point Theorem.

Dr. Mahmoud Bakir*

(Received 18 / 9 / 2007. Accepted 9/4/2008)

□ ABSTRACT □

The Brouwer Fixed Point Theorem is one of the very well–known theorems in mathematics. It is a generalization of the Intermediate-Value Theorem. It also has many proofs. First, we prove that if σ is a standard simplex in $\mathbf{R}^n$, and we have a continuous function from σ to itself, then, by using the standard division of the standard n–simplex, this function has at least one fixed point. Then, we prove that any compact convex subset in $\mathbf{R}^n$ has the property of the fixed point.

Keywords: Brouwer Theorem, Fixed Point, Simplex.

*Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of science, University of Damascus, Damascus, Syria.

مقدمة:

تعد مبرهنة براور للنقطة الثابتة من المبرهنات التي تتبوأ موقعاً مرموقاً في الأدبيات الرياضية . وينبع ذلك من كونها أحد أهم مبادىء الوجود (existence principles) في الرياضيات . وقد أثبت صحتها الرياضي والمنطقي الهولندي لوتيزن أجيرتوس جان براور (L.E.J.Brouwer) (1881 – 1966) عام 1912. وهي تعميم لمبرهنة القيمة المتوسطة (Intermediate Value Theorem) للتوابع المستمرة، والتي أثبتها الرياضي والفيلسوف الإيطالي (التشيكي الأصل) بولزانو(Bolzano) (1781 – 1848) عام 1817. والصياغة المتداولة حالياً لمبرهنة براور تختلف قليلاً عن النص الأصلي.(للاطلاع على تاريخها انظر: Jaworowski & Others 1995)

وتكمن أهمية هذه المبرهنة في أن لها العديد من التطبيقات في مجال التحليل الرياضي والاقتصاد الرياضي ونظرية الألعاب (Game Theory). وإثبات هذه المبرهنة على النقيض من إثبات مبرهنة باناخ(Banach) للنقطة الثابتة ، والذي يتسم بالبساطة والسهولة . كما أنه يستخدم حقائق ليست مطروقة أو معروفة في نظرية النقطة الثابتة المترية ، بل يعتمد على طرق من التبولوجيا الجبرية.

هذا وثمة برهان لها يستخدم النظرية الهومولوجية (Homology Theory) انظر (Graves,1940). كما أن لها برهاناً آخر انظر(Hop & Alexanderoff, 1935). كما أثبتها (J .Milner) عام 1978 انظر (Milner, 1978). كما أُثبتت باستخدام السيمبلكس في (Zeilder, 1995) وفي (Border, 2002).

سنثبت الآن صحة هذه المبرهنة اعتماداً على التقسيم النظامي للسيمبلكس النوني القياسي.

وفي البدء لابد من الإشارة إلى أن كل ما سيرد ذكره هو في الفضاء الشعاعي $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$، حيث $\mathbf{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (real numbers) و n عدد صحيح موجب.

سنمهد للاثبات بالتذكير ببعض التعاريف البسيطة والمعروفة في الرياضيات لاستخدامها فيما بعد.

تعاريف:

1. لنفرض أن $\{u_0, u_1, \ldots\ldots\ldots, u_r\}$ مجموعة من النقاط المختلفة في $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ عددها r+1 حيث r =1, 2, 3,……….. نقول إن هذه النقاط في وضعها العام general position أو في الوضع العام إذا كانت المجموعة $\{u_1 - u_0, u_2 - u_0, \ldots\ldots, u_r - u_0\}$ مستقلة خطياً linearly independent. وهذا التعريف مستقل عن اختيارنا للنقطة u_0 . (انظر مثلاً Zeidler, 1995, p.46).

2. إن المغلف المحدب لـ A(convex hull of A)، حيث A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء شعاعي X، هو أصغر مجموعة جزئية محدبة في X تحوي A، ويرمز له بـ coA.

من الواضح أنّ $\mathrm{coA} = \cap\{K \subset X : K \supset A \ \text{ محدبةو } K\}$.

3. إذا كانت $\{u_0, u_1, \ldots\ldots\ldots, u_r\}$ في الوضع العام في $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ حيث r = 1,2,3 …… فإنّ المغلف المحدب لهذه النقاط يسمى "السيمبلكس ذا الأبعاد r "، أو " السيمبلكس – r " (r- simplex) الذي رؤوسه $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_r$، ويرمز له بـ $u_0\, u_1\, u_2 \ldots\ldots\ldots u_r$ أو $\sigma = \mathrm{co}\{u_0, \ldots\ldots\ldots, u_r\}$.

أي أنه المجموعة $\sigma = \left\{ x \in \mathrm{R}^n : x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \ u_i \ , \lambda_i \ \rangle\, 0 \ \forall \mathrm{i} \ \ \& \ \ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \right\}$

حيث i = 0,1,2, ………r

تسمى الأعداد $\lambda_0,\ldots,\lambda_r$ الإحداثيات المركزية (barycentric coordinates) لـ x في σ.

4. إذا كانت $\{u_0, u_1, \ldots, u_r\}$ مجموعة من النقاط المختلفة من $\mathbf{R}^n$ وفي الوضع العام، وكان: $\{b_0, b_1, \ldots, b_s\} \subseteq \{u_0, u_1, \ldots, u_r\}$ فإن السيمبلكس $b_0\, b_1 \ldots b_s$ ، ولنرمز له بـ τ ، يسمى وجهاً (face) من السيمبلكس $u_0\, u_1 \ldots u_r$ و المسمى بـ σ .

وإذا كان s=r-1 فإن τ يسمى عندها وُجَيْهاً (facet) لـ σ . أما إذا تحقق إضافة إلى ذلك أن : $\{b_0, \ldots, b_s\} = \{u_0, \ldots, \cancel{u_j}, \ldots, u_r\}$ ، أي أنَّ

$$\{b_0, \ldots, b_s\} = \{u_0, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_r\}$$

فإن τ يكون عندها الوُجَيْه المقابل للرأس u_j .

5. السيمبلكس النوني القياسي (The standard n-simplex) هو السيمبلكس في $\mathbf{R}^n$ الذي رؤوسه (vertices):

$$\begin{aligned}
u_0 &= (0,0,\ldots,0)\\
u_1 &= (1,0,\ldots,0)\\
u_2 &= (1,1,0,\ldots,0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= (1,1,\ldots,1)
\end{aligned}$$

نرمز له بـ Σ ، ونرمز للوجيه المقابل للرأس u_j بـ F_j ؛

أي أن :

$$F_j = u_0\, u_1 \ldots u_{j-1}\ u_{j+1} \ldots u_n$$

فإذا كتبنا نقاط $\mathbf{R}^n$ على النحو: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فإنه يكون

$$\begin{aligned}
F_0 &= \{x \in \Sigma : x_1 = 1\}\\
F_j &= \{x \in \Sigma : x_j = x_{j+1}\}, \quad 1 \le j \le n-1\\
F_n &= \{x \in \Sigma : x_n = 0\}\\
\Sigma &= \{x \in \mathbf{R}^n : 1 \ge x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge 0\}
\end{aligned}$$

6. التقسيم النظامي للسيمبلكس النوني القياسي:

لنأخذ السيمبلكس النوني القياسي Σ ، ولنفرض أن $m \in \mathbf{Z}+$ حيث $\mathbf{Z}+$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المغايرة للصفر، ولنضع $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$.

لنضع $V_m = \{x \in \Sigma$: كل إحداثيات x مضاعفات صحيحة لـ $\varepsilon\}$

تسمى V_m مجموعة الرؤوس.

نقول إن" u يأتي بعد v "حيث u و v من V_m إذا كان:

$u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$ وكان $u_j=v_j$

من أجل جميع قيم j ما عدا واحدة، ولتكن k مثلاً ، وكان $v_k=u_k+\varepsilon$.

ونعبر عن ذلك رمزياً بـ " $v \ u \mapsto$ " .

لتكن D_m مجموعة كل السيمبلكسات " الصغيرة " $v_0\,v_1\ldots v_n$ بحيث

$v_n=v_0+(\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon)$, $v_0\mapsto\ v_1\mapsto\ v_2\mapsto\ldots\mapsto\ v_n$

(بحيث أن كل $v_{j-1}\mapsto v_j$ في اتجاه مختلف) .

تسمى عندها المجموعة D_m تقسيماً نظامياً لـ $\sum$.

توطئة(تمهيدية):

ليكن τ وّجَيْه أحد عناصر المجموعة D_m . فإن واحداً فقط مما يلي صحيح:

1) τ محتوى في أحد وجيهات $\sum$، وأنه وُجَيْه لعنصر واحد فقط من D_m .

2) τ غير محتوى في أي من وجيهات $\sum$، وأنه وُجَيْه لعنصرين فقط من D_m .

ويمكن الإثبات بإجراء بعض الحسابات البسيطة في $\mathbf{R}^n$.

ملاحظة:

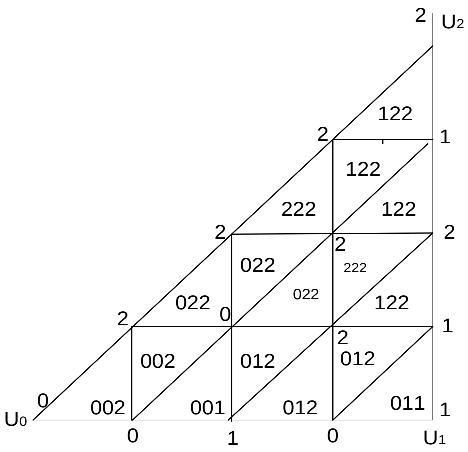
سنثبت الآن صحة توطئة سبيرنر (Sperner's Lemma) المعروفة من أجل التقسيم النظامي D_m للسيمبلكس النوني القياسي . و من أجل ذلك سنبين كيف يمكن ترميز كل سيمبلكس " صغير" في D_m .

لنرمز للرأس u_j بـ j ، ونرمز للرؤوس في V_m كما يلي: أي رأس في $u_j\,u_k$ يرمز له بـ j أو k.

وأي رأس في $u_j\,u_k\,u_\ell$ يرمز له بـ j أو k أو ℓ .

وهكذا دواليك. ومن ثم فإن كل سيمبلكس صغير في D_m يرمز له " بمجموعة غير مرتبة مع جواز التكرار " مأخوذة من رموز كل رؤوسه . لذلك فإن 022 هو عين 202 ، في حين هو يختلف عن 002. هذا و يمكن ترميز بعض عناصر D_m

بـ 012….n (دون تكرار).



m = 4

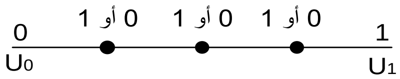
<u>مبرهنة</u>: (توطئة سبيرنر)

في اي ترميز لـ D_m ، كما هو موصوف آنفاً، يوجد عدد فردي من السيمبلكسات "الصغيرة" والمرمزة بـ 012......n .

الإثبات:

سنثبت صحتها بالاستقراء الرياضي (mathematical induction) . إذا كان n = 1 فإنه لدينا:

m = 4



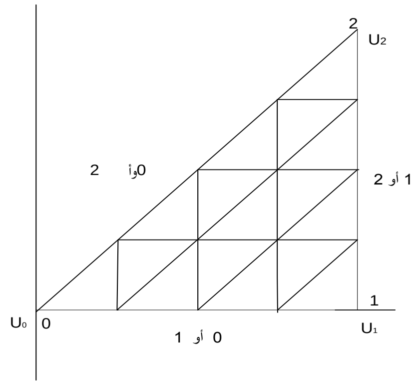
نحن نبحث عن المجالات " الصغيرة " مثل 1______0 أو 0______1 ،

أي أننا نبحث عن عدد المجالات الجزئية التي يتغير الرمز فيها من نهاية إلى أخرى.

بما أننا نرمز لـ u_0 بـ 0 و u_1 بـ 1 فإن الرمز يتغير عدداً فردياً من المرات.

أي أن المبرهنة صحيحة من أجل n = 1.

نلاحظ أن الوجه F_n من $\sum$ هو نسخة من السيمبلكس القياسي ذي الأبعاد n-1 ، وأن ترميز $\sum$، والمقصور على F_n ، هو ترميز لهذا السيمبلكس القياسي ذي الأبعاد n - 1 .



لذلك فإن فرضياتنا الاستقرائية تقول: إنه من أجل $n \geq 2$ الوجه F_n يحتوي على عدد فردي من الوجَيْهات من عناصر D_m ، المرمزة بـ (n - 1) .... 012. و من أجل كل سيمبلكس صغير τ في D_m ، لنفرض أن N(τ) عدد وّجَيْهات τ المرمزة

بـ (n - 1) .... 012.

ومن ثم فإن:

$$N(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } \tau \text{ مرمزاً } 012\ldots\ldots n \\ 2 & \text{إذا كان } \tau \text{ مرمزاً } j(n-1)\ldots 012 \text{ من أجل قيمة معينة لـ } j \text{ حيث } 0 \leq j \leq n-1 \\ 0 & \text{في خلاف ذلك.} \end{cases}$$

لنفرض أن عدد عناصر D_m المرمزة بـ 012....n هو M .

ومن ثم فإن : $$M \equiv \sum_{\tau \in D_m} N(\tau) \pmod{2}$$

إن هذا المجموع يحسب عدد وجَيْهات عناصر D_m المرمزة (n-1)....012 .

ولكن الوجَيْهات الواقعة "داخل" $\sum$ قد حسبت مرتين . ومن التوطئة السابقة نجد أن أي وجَيْه في أحد عناصر D_m إما أن يكون وجَيْهاً لعنصر واحد من D_m ، ومحتوى في أحد وجيهات $\sum$ ، أو أنه وُجَيْه لعنصرين من D_m (أي حُسِب مرتين) وغير محتوى في أحد وجيهات $\sum$. ولكن الوجَيْه الوحيد من $\sum$ الذي يمكن أن يحوي سيمبلكساً صغيراً مرمزاً بـ(n-1)....012 هو F_n . لذلك فإن:

M ≡ عدد السيمبلكسات ذات الأبعاد (n-1) في F_n والمرمزة (n - 1) 012

≡ 1 (من الفرضيات الاستقرائية). *وهو المطلوب .*

<u>مبرهنة(بْرووَر):</u>

إذا كان **σ** سيمبلكساً قياسياً وكان G: **σ → σ** تابعاً مستمراً . فإن للتابع G نقطة ثابتة واحدة على الأقل .

الإثبات:

من أجل كل j ،لنفرض أن C_j مجموعة نقاط σ التي أخذت بعيداً عن u_j بوساطة G . أي أن :

$$C_j = \{u \in \sigma : \alpha_j\left(G(u)\right) \le \alpha_j(u)\}$$

حيث $\alpha_j(.)$ الإحداثيات المركزية.

نلاحظ أن C_j مجموعة مغلقة في σ ، بسبب أنها معطاة بـ "$\le$" ، و أن G و α_j مستمران .

لنفرض أن D_m التقسيم النظامي لـ σ حيث m من **Z+** ، ولنرمّز الرؤوس في V_m باستخدام المجموعات C_j على النحو التالي :

نعلم أنه إذا كان u في $u_{i_0}\, u_{i_1}$ ....u_{i_s} من σ ، فإن كل الاحداثيات المركزية $\alpha_j(u)$ من أجل : $j \notin \{i_0, ..., i_s\}$ هي أصفار ، وإنّ $\sum_{r=0}^{s} \alpha_{i_r}(u) = 1$.

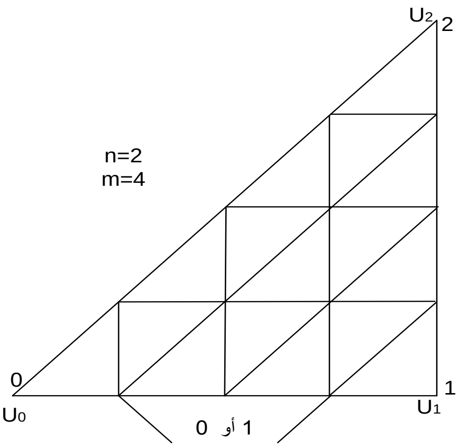
لنفرض الآن أن $V_m \ni u$. ومن ثمّ فإن مجموع الإحداثيات المركزية الموجبة تماماً للنقطة u يساوي الواحد، ومجموع الأعداد $\{\alpha_j(G(u)) : \alpha_j(u) > 0$ مأخوذ بحيث أنّ $j\}$

أصغر أو يساوي الواحد .

ومن ثم فإنه يوجد j (واحد على الأقل) بحيث $\alpha_j(u) > 0$ و $\alpha_j(G(u)) \le \alpha_j(u)$.

لنختار واحداً من j كرمز لـ v .

وهذه وضوحاً تعرّف ترميزاً على V_m . ومن ثم فإن " توطئة سبيرنر " تقتضي أنه يوجد سيمبلكس τ (واحد على الأقل) في D_m ، مرمزاً بـ 012.......n (الصفر زوجي). ومن ثم فإن τ له رأس واحد في أي من C_j .



لنفرض أن y_m من τ . إن قطر τ معطى بـ $diam\,(\tau) = \frac{1}{m}\sqrt{n}$ ،

و من ثم فإن y_m تقع ضمن $\frac{1}{m}\sqrt{n}$ من نقاط C_j . كذلك فإن المتوالية $\{y_m\}$ ، في المجموعة المتراصة σ ، تحتوي على متوالية جزئية متقاربة، ولتكن، مثلاً، $\{y_{m_q}\}$ ، و منه فإن $y_{mq} \to z \in \sigma$.

لنفرض أن y_{m_q} تقع ضمن $\frac{1}{mq}\sqrt{n}$ من النقطة a_q في C_j .

ومن ثم فإن :

$$0 \le d\left(a_q, z\right) \le d\left(a_q, y_{m_q}\right) + d\left(y_{m_q}, z\right)$$

حيث d تابع المسافة (المترك) الإقليدي المزود بها $\mathbf{R}^n$.

ولما كان كل حد من الطرف الأيمن من المتراجحة يسعى إلى الصفر عندما $q \to \infty$ فإن:

$$d\left(a_q, z\right) \longrightarrow 0 .$$

لذلك فإنَّ $a_q \in C_j$ (من أجل كل q) ، وأن $a_q \to z$. ولكن C_j مجموعة مغلقة ، لذلك $z \ni C_j$. و هذا الكلام صحيح من أجل كل j ، لذلك فإن $z \ni C_j$ من أجل كل j .

من ثمّ: $\alpha_j(G(z)) \le \alpha_j(z)$ من أجل كل j .

ولكن $\sum_j \alpha_j(G(z)) = 1$ و $\sum_j \alpha_j(z) = 1$ ومنه أصبح لدينا $\alpha_j(G(z)) = \alpha_j(z)$ من أجل كل j. و من ثم

$$G(z) = z$$

وهو المطلوب .

سنورد الآن بعض التعاريف المعروفة (انظر مثلاً 1990 و Goebel & Kirk)

تعريف:

نقول عن فضاء متري (X, d) إنه يتمتع بخاصة النقطة الثابتة (Fixed Point Property) إذا كان لكل تطبيق مستمر من X إلى X نقطة ثابتة واحدة على الأقل.

تعريف:

لنفرض أنَّ X فضاء متري، و Y مجموعة جزئية غير خالية من X. نقول عن تطبيق $r : X \to Y$ إنه ضاغط (كَامِشْ) (retraction) للفضاء X على Y إذا كان مستمراً ، وكان $r(y) = y$ من أجل كل y من Y.

ونعبِّر عن ذلك بقولنا إن Y مضغوط (retract) الفضاء X (انكماش الفضاء X).

مبرهنة:

إذا كان الفضاء المتري X يتمتع بخاصة النقطة الثابتة، وكان Y مضغوط X، فإنَّ Y يتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

<u>**الإثبات**</u>: انظر (1990 و Goebel & Kirk)

<u>**قضية**</u>: لنفرض أنَّ σ السيمبلكس القياسي في $\mathbf{R^n}$، وأنَّ G مجموعة جزئية متراصة ومحدبة في $\mathbf{R^n}$.

1)أثبت أنه إذا كانت b مركز مجموعة نقاط σ(barycenter)، فإنه يوجد $0<\varepsilon$ حيث $B(b;\varepsilon) \subseteq \sigma$.

2)ومن ثمَّ أثبت أنه يوجد k من $\mathbf{R^n}$، و λ من $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ، بحيث إذا كان $g(\mathbf{x}) = k + \lambda\mathbf{x}$ ، حيث x من G، و $g : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ ، فإنَّ $g(G) \subseteq \sigma$.

3)كذلك فإنَّ $g : G \to g(G)$ هوميومور فيزم homeomorphism.

4)إنَّ G تتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

الإثبات:

1)من السهل إثبات ذلك.

2)بمـا أنَّ G متراصـة، فإنهـا محـدودة، ومـن ثـمَّ فـإنَّ $\|x\| \leq \alpha$ مـن أجـل كـل x مـن G. ومـن (1) لدينا $B(b;\varepsilon)\subseteq\sigma$ ؛ ومنه $g(x)=b+\frac{\varepsilon}{\alpha}x$ ، ومن ثمَّ فإنَّ $g(G)\subseteq\sigma$.

3)من السهل إثبات ذلك آخذين بعين الاعتبار أن التطبيق العكسي لـ g هو : $g^{-1}(y)=\frac{\alpha}{\varepsilon}(y-b)$.

4)إنَّ g(G) مضغوط σ ، ومن ثمَّ فإنها تتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

لنفـــرض أنَّ $h:g(G)\to G$ هوميومـــورفيزم، وأنَّ $f:G\to G$ تطبيـــق مســـتمر. ومنـــه $h^{-1}fh:g(G)\to g(G)$ مستمر. ومن ثمَّ فإن له نقطة ثابتة، ولتكن، مثلاً، z . أي أنَّ $h^{-1}fh(z)=z$. إذن f(h(z)) =h(z). أي أنَّ h(z) نقطة ثابتة لـ f. إذن G تتمتع بخاصة النقطة الثابتة، وهو المطلوب.

بالاستفادة مماتقدّم سنثبت صحة مبرهنة بروور للنقطة الثابتة من أجل أية مجموعة متراصة ومحدبة في $\mathbf{R^n}$.

مبرهنة: إذا كانت G أية مجموعة متراصة ومحدبة في R^n ، فإنَّ G تتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

الإثبات:

لنفرض أنَّ σ السيمبلكس القياسي في $\mathbf{R^n}$.

ومـن القضـية السـابقة فـإنّ هنـاك تطبيقاً $g:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^n}$ علـى النحـو $g(x)=\lambda x+k$ مـن أجـل قيمـة معينـة من $\mathbf{R}$، و k من $\mathbf{R^n}$ بحيث يكون $g(G)\subseteq\sigma$. كذلك فإنَّ $g(G)$ مضـغوط σ ، ومن ثمَّ فإنها تتمتع بخاصـة النفطة الثابتة. إذن G تتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

المراجع:

1. BORDER, K.C. "*Fixed Point Theory*". *California Institute of Technology, 2002*
2. GOEBEL, K.; KIRK. W. A, "*Topics in metric fixed point theory"*. Cambridge *University Press, Cambridge, 1990.*
3. GRAVES, L.M.P, "*The Theory of Real Variable*". Mc Grawy – Hill Company, New York, 1940, P. 149.
4. HOP. H; & Alexanderoff . P. " *Topologie*". Springer, Berlin, 1935.
5. JAWOROWSKI, J.; KIRK, W.; & PARK. S, "*Anti Podal Points and Fixed Pionts*". Seoul National University, 1995, P.55.
6. MILNER, J. "*Analytic Proof of the Hairy Ball Theorem and the Brouwer Fixed Point Theorem*." Amer. Math. Monthly, (1978). 85.521.
7. ZEIDLER, E, "*Applied Functional Analysis*". Springer–Verlag, Berlin 1995 .