مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (1) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (1) 2008

خوارزميتان فعالتان لحساب دائم مصفوفة باستخدام نظرية البيانات الموجهة

الدكتور أحمد الكردي*

(تاريخ الإيداع 12 / 9 / 2007. قُبِل للنشر في 2007/11/12)

□ الملخّص □

نظراً لأهمية دائم مصفوفة في العديد من التطبيقات مثل التوافقيات و نظرية البيان و إيجاد المعاملات الواحدية في بيان موجه و حساب حلقات هاملتون في بيان و نظرية التلوين والإحصاء والاحتمالات وغيرها، دأب الباحثون بالبحث عن صيغ تحليلية لحساب القيمة الدقيقة لدائم مصفوفة إلا أن حساب هذه الصيغ صعب للغاية و ذلك نظرا للكلفة الحسابية العالية لدى تطبيقها عند حساب دائم مصفوفة. و كما هو الحال في المحدد فإنه لا توجد طرائق فعالة لحساب دائم مصفوفة حتى وإن تركز تطبيق هذه الطرائق على مصفوفات (0,1) والتي تلعب دورا هاما جدا في نظرية البيان و الأشجار و لذلك لا تزال المسألة مفتوحة مما يجعلها مجالا هاما و أرضية خصبة للبحث. لهذه الأسباب، نصف في هذه المقالة، خوارزميتين جديدتين فعالتين لإيجاد دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n. تعتمد هاتان الخوارزميتان على البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A. أخيرا، نبين من خلال بعض تجارب المحاكاة العددية فعالية كل من الخوارزميتين بلغة البرمجة C++ و نقارن النتائج الحاصلة بخوارزمية باكس و فرانكلين.

كلمات مفتاحية:
دائم مصفوفة، بيان موجه، مصفوفة كثيرة الأصفار.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – حمص – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (30) العدد (1) 2008
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (30) No. (1) 2008

Tow Efficient Algorithms for Permanent Computing of a Matrix Using Digraph Theory

Dr. Ahmad Al-Kurdi*

(Received 12 / 9 / 2007. Accepted 12/11/2007)

□ ABSTRACT □

We describe in this paper two efficient algorithms for finding the permanent of a square matrix A of order n. These algorithms depend on the digraph corresponding to the matrix A. Because of the importance of matrices permanents in several applications such as Combinatorics, Graph theory, Statistics and Probability, the researchers started to find closed and analytical forms for computing the permanent of matrix. But computing the permanent is a difficult problem. For these reasons, in this paper, we describe two efficient algorithms for finding the exact value of the permanent of a square matrix A of order n. These two algorithms depend on the digraph corresponding to the matrix A. Finally, some numerical experiments are carried out on an Compatible PC with C++ codes to illustrate the efficiency of the proposed algorithms. The obtained results have been compared with those obtained by the algorithm proposed by Bax and Franklin.

Key words:
Permanent , Digraph , Sparse Matrix

* **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Al-Baath University, Homs, Syria.**

1. مقدمة:

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من المرتبة n. يعرف دائم مصفوفة A و نرمز له بالرمز $Per(A)$ بالصيغة التالية:

$$Per(A)=\sum_{\sigma}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} \qquad (1)$$

حيث يتم الجمع على جميع التباديل σ التي عددها $n!$ تبديل للمجموعة $\{1,2,...,n\}$. ينتج من التعريف أن دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n يعرف بالضبط بنفس الطريقة التي يعرف فيها محدد مصفوفة A إلا أن جميع الحدود في (1) تأخذ إشارة موجبة. و لمزيد من المعلومات عن خواص الدائم والمحدد والفرق بينهما يمكن الاطلاع على المراجع [1,2,3,4].

لقد كان بينيت (Binet) أول من أدخل تعريف الدائم و بشكل مستقل من قبل كوشي (Cauchy) في عام 1812 قبل تعريف المحدد أو بعده بقليل. علاوة على ذلك، جرت التطورات الرئيسية في نظرية دائم مصفوفة في السنوات العشرين الأخيرة. و مرد ذلك يعود إلى حقيقة مفادها أنه تبين أهمية دائم مصفوفة و فائدته في عدة تطبيقات مثل التوافقيات [5,**6**] و نظرية البيان [4] و إيجاد المعاملات الواحدية في بيان موجه **[7]** و حساب حلقات هاملتون في بيان و نظرية التلوين [8] والإحصاء والاحتمالات [9] و غيرها.

بينما يمكن حساب محدد مصفوفة A في n^3 عملية فإن إيجاد دائم مصفوفة مربعة هو مسألة صعبة بدرجة صعوبة حساب المحدد [10]. بين فالينت (Valiant) [3] إن مسألة حساب دائم المصفوفات (0,1) هي مسألة #P تام (NP-Complete) [7]. إن مسألة #P تام هو صف التوابع التي تحسب عدد مسارات القبول في الآلات بزمن حدودي حتمي (آلات NP).

ونظرا لأهمية تطبيقات دائم مصفوفة فقد دأب الباحثون في البحث عن صيغ تحليلية لحساب القيمة الدقيقة لدائم مصفوفة [5,3,4,7,9,10]، إلا أن حساب هذه الصيغ صعب للغاية و ذلك نظرا للكلفة الحسابية العالية لدى تطبيقها عند حساب دائم مصفوفة. و كما هو الحال في المحدد فإنه لا توجد طرائق فعالة لحساب دائم مصفوفة حتى وإن تركز تطبيق هذه الطرائق على مصفوفات (0,1) والتي تلعب دورا هاما جدا في نظرية البيان و الأشجار و لذلك فإن المسألة مفتوحة مما يجعلها مجالا هاما و أرضية خصبة للبحث. و لعل أفضل هذه الطرائق ما أوجده باكس و فرانكلين [8] (Bax and Franklin). تتلخص هذه الخوارزمية بحساب جميع الحدود في منشور دائم المصفوفة ثم حذف جميع الحدود التي قيمتها تساوي الصفر (و ندعوها الحدود الصفرية) و ذلك بهدف تسريع الحساب و تخفيض تعقيد الخوارزمية، إلا أن الزمن اللازم لحذف الحدود الصفرية كبير جدا إذا كانت المصفوفة من مراتب عليا، و من جهة أخرى إذا كان عدد الحدود الصفرية كبيراً مما يجعل الخوارزمية غير فعالة. في هذه المقالة نصف خوارزميتين جديدتين لحساب دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n. تعتمد هاتان الخوارزميتان على البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A. باستخدام هاتين الخوارزميتين فقط نحسب الحدود اللاصفرية في منشور دائم مصفوفة دون الحاجة لحساب الحدود الصفرية و ذلك بأن نقصر الحساب على العناصر اللاصفرية في المصفوفة بإيجاد نظام تخزين جديد يقوم بحصر تطبيق الخوارزميتين على العناصر اللاصفرية في المصفوفة مما يساعدنا في تجنب العمل و التعامل مع أصفار و هذا بدوره يوفر لنا جهدا حاسوبيا و فسحة في ذاكرة الحاسوب المخصصة لتخزين عناصر المصفوفة. أخيرا نجري بعض التجارب العددية على

مصفوفات مولدة عشوائيا و نوضح الفرق بين تنفيذ هاتين الخوارزميتين وخوارزمية باكس و فرانكلين بلغة ++C على حاسوب بنتيوم 4 بذاكرة 512.

2. أهمية البحث و أهدافه:

يلعب دائم مصفوفة دورا هاما في العديد من التطبيقات في حياتنا الواقعية كما أشرنا في مقدمة الدراسة. لذا دأبنا بالبحث عن طرائق حاسوبية تعتبر خوارزميات فعالة لحساب القيمة الفعلية لدائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n نظرا لتعذر إيجاد صيغة تحليلية تعطي القيمة الفعلية لحساب دائم مصفوفة. قبل أن نبدأ بعرض الخوارزميات المطورة لابد من تقديم خلفية نظرية لأهم المفاهيم الأساسية في نظرية البيان والمصفوفات المستخدمة في المقالة.

3. طريقة البحث و مواده:

1.3. مفاهيم أساسية في نظرية البيان و المصفوفات
(Basic Concepts in Graph Theory and Matrices)

يوازي كثيرا من العمل بدائم مصفوفة العمل بالبيانات الموجهة. يوازي دائم مصفوفة دائم بيان يمثل هذه المصفوفة. البنية الصفرية لمصفوفة و نظرية البيان هما موضوعان متشابهان. يمكن أن يمثل نموذج مصفوفة كثيرة الأصفار (نقول عن مصفوفة إنها كثيرة الأصفار إذا كان معظم عناصرها أصفارا) مربعة ببيان وعندئذ يمكن أن تستخدم النتائج من نظرية البيان للحصول على نتائج مصفوفة كثيرة الأصفار. نقدم في هذه الفقرة بعض المفاهيم الأساسية في نظرية البيان و نظرية المصفوفات و نبين العلاقة بين مصفوفة A مربعة من المرتبة n و البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A. قبل تعريف البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A ندخل المفاهيم الضرورية التالية [12, 13]:

1 – ا لبيان الموجه(Directed graph):

يتألف البيان الموجه $G(V,E)$ من مجموعة V من العناصر تدعى العقد مع مجموعة E من الأزواج المرتبة من الشكل (i,j) تدعى الأقواس الموجهة، حيث تنتمي i و j إلى V.

2 – البيان الجزئي (Subgraph):

البيان الجزئي من بيان موجه $G(V,E)$ هو بيان موجه $G_S(V_S,E_S)$ بحيث أن V_S و E_S هما مجموعتان جزئيتان من V و E على الترتيب. إذا كانت $V_S=V$ فيدعى البيان الجزئي $G_S(V_S,E_S)$ بالبيان الجزئي الأساسي (Spanning subgraph) من البيان $G(V,E)$.

3– البيان المرمز (Labeled graph):

نقول عن بيان موجه G إنه بيان مرمز إذا رمزت عقد البيان الموجه G بالأعداد الصحيحة من 1 إلى n.

4–البيان الموزون (Weighted graph):

البيان الموجه الموزون G هو بيان موجه يحمل كل قوس موجه فيه وزنا. نرمز بالرمز $f(i,j)$ للوزن المرتبط بالقوس الموجه (i,j) من G. إذا كان G_S بيانا جزئيا من البيان G فإننا نعني بالرمز $f(G_S)$ مايلي:

$$f(G_S)=\begin{cases}\prod_{(i,j)\in G_S} f(i,j) & , \quad G_S\neq\phi \\ 0 & , \quad otherwise\end{cases} \qquad (2)$$

بكلمة أخرى، يرمز $f(G_S)$ إلى جداء الأوزان المرتبطة بالأقواس الموجهة للبيان الجزئي G_S.

5 – المسار (Path):

المسار $\{u-v\}$ في بيان موجه هو متتالية من العقد المتمايزة والأقواس الموجهة المتصلة من u إلى v بحيث أنه ليست هناك أقواس موجهة مكررة. الدارة (Circuit or Loop)هي مسار يبدأ وينتهي في نفس العقدة.

6 – الدرجة الداخلة و الدرجة الخارجة لعقدة (Outgoing and Incoming degree of a node):

الدرجة الخارجة لعقدة i في بيان موجه G هي العدد $d^{+}(i)$ من الأقواس الموجهة التي تملك العقدة i كعقدة ابتدائية. أما الدرجة الداخلة لعقدة i في بيان موجه G فهي العدد $d^{-}(i)$ من الأقواس الموجهة التي تملك العقدة i كعقدة طرفية في G.

7 – البيان المنتظم (Regular graph):

نقول عن بيان موجه G إنه منتظم من الدرجة k إذا كان $d^{+}(i)=d^{-}(i)=k$ من أجل كل عقدة i.

وهكذا فإن الدارة الموجهة هي بيان موجه منتظم مترابط من الدرجة 1.

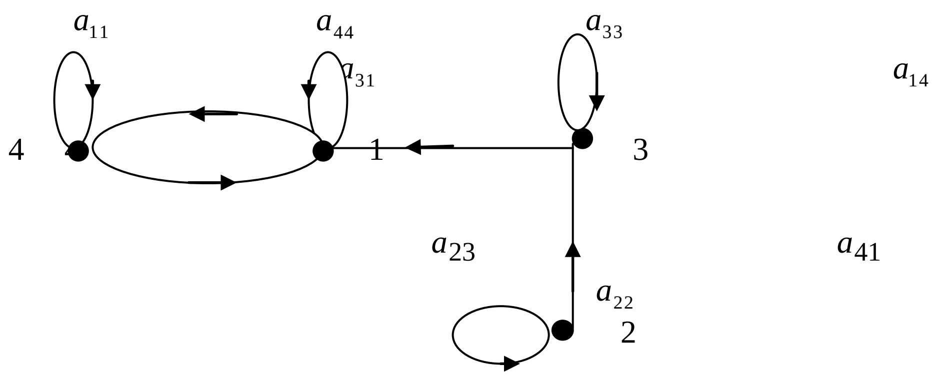
تعريف **1**: البيان الموجه لمصفوفة (Digraph of matrix):

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. البيان الموجه الموافق للمصفوفة A ونرمز له بالرمز G_A هو بيان موجه موزون مرمز ذو n عقدة بحيث أنه يوجد قوس موجه (i,j) بوزن a_{ij} إذا كان $a_{ij}\neq 0$ من أجل $i,j=1,2,\ldots,n$ والعكس بالعكس. لاحظ أن البيان الموجه مستقل عن قيمة العناصر اللاصفرية في المصفوفة A.

مثال 1 (Example) : لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة 4:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

يعطى البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة (3) كما هو مبين في الشكل (1).



الشكل (1): البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة (3).

2.3. حساب دائم مصفوفة (Computing Permanent of a Matrix):

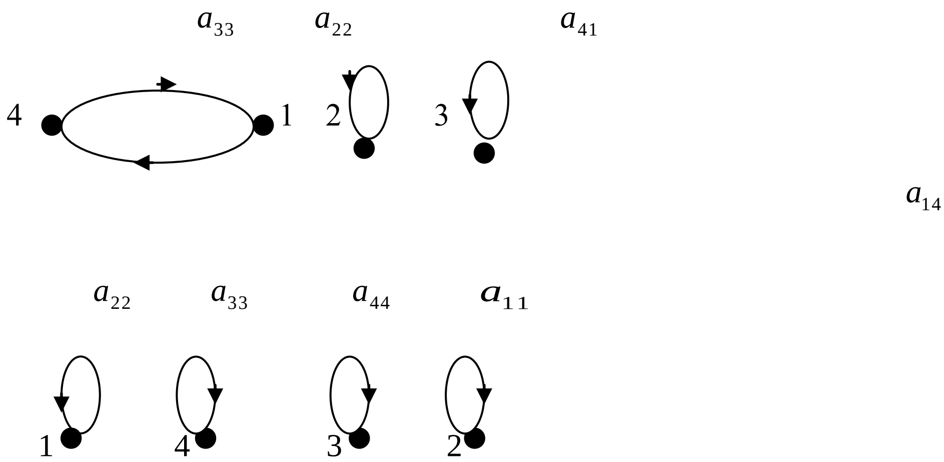
نبين في هذه الفقرة العلاقة الوطيدة بين الحدود اللاصفرية في منشور دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n و أنواع معينة من البيانات الجزئية في البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A . قبل أن نبدأ بإيجاد هذه العلاقة نعرف أولا المعامل الواحدي (1-factor) و من ثم دائم بيان موجه G (Permanent of digraph) كما يلي:

تعريف **2**: المعامل الواحدي (1-factor). المعامل الواحدي في بيان موجه G هو بيان جزئي أساسي من G والذي هو منتظم من الدرجة 1. أو بشكل آخر، المعامل الواحدي هو مجموعة من الدارات الموجهة المنفصلة التي تشمل كل عقد البيان G.

تعريف 3: دائم بيان موجه (Permanent of digraph): يعرف دائم بيان موجه G، ونرمز له بالرمز $Per\, G$، بالصيغة التالية:

$$Per\ G = \sum_h f\ (h) \qquad (4)$$

حيث h هو معامل واحدي في G و يرمز $f(h)$ إلى جداء الأوزان المرتبطة بالأقواس الموجهة للمعامل الواحدي h. بغرض التوضيح تعطى المعاملات الواحدية من الشكل (1) في الشكل (2).



الشكل (2): مجموعة المعاملات الواحدية من الشكل (1).

يمكن تقدير دائم بيان موجه مرتبط بمصفوفة بحذف غاوس. إلا أن هذه العملية بطيئة جدا ومعقدة وحتى أنه من غير الممكن القيام بذلك إذا كانت عناصر المصفوفة معطاة بالشكل الرمزي وليس بالشكل العددي. بينما تناسب العلاقة (4) هذه الحالات. نصادف في تطبيقات عديدة كالشبكات الكهربائية والدارات الالكترونية وبناء علب السرع الأرضية وشبكات النقل وغيرها مصفوفات تعطى عناصرها بدلالة رموز تمثل وسطاء النظام المدروس والمراد معرفة سلوكه بغية الفهم والتطوير والتنبؤ بالنظام.

نبين فيما يلي أن دائم بيان موجه G_A و دائم المصفوفة الموافقة له A متطابقان. يمكن الحصول على الرابط الأول بين دائم المصفوفة A والبيان الموجه G_A بالعودة إلى تعريف الدائم:

$$Per\ A = \sum_{(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} .. a_{nj_n} \qquad (5)$$

حيث يؤخذ المجموع $\sum\limits_{(j)}$ على كل التباديل $n!$ من المجموعة $\{1,2,...,n\}$.

تبين المبرهنة التالية العلاقة الوطيدة بين الحدود اللاصفرية في منشور دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n و بين المعاملات الواحدية في البيان الموجه الموافق G_A.

مبرهنة1 (Theorem):

ليكن G_A البيان الموجه الموافق لمصفوفة مربعة A من المرتبة n. عندئذ:

$$Per\ A = \sum_{h} f\ (h) \qquad (6)$$

حيث h هو معامل واحدي في G_A.

البرهان (Proof): من (3)، ليكن:

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \neq 0 \qquad (7)$$

من أجل تبديل ما. واضح أن البيان الجزئي h من البيان G_A الموافق لهذا الحد اللاصفري يتألف من الأقواس الموجهة $(j_1,1),(j_2,2),\ldots,(j_n,n)$. تظهر كل عقدة k بالضبط مرتين في هذه المتتالية، مرة كمركبة أولى لزوج مرتب وثانيا كمركبة ثانية لزوج مرتب. هذا يعني أنه في البيان الجزئي المؤلف من الأقواس $(j_1,1),(j_2,2),\ldots,(j_n,n)$ الدرجة الداخلة والخارجة لكل عقدة من h كلاهما مساو للواحد. و هكذا فإن h هو بيان جزئي أساسي من البيان G_A والذي هو بيان منتظم من الدرجة الأولى أي أنه معامل واحدي في G_A. وبالعكس، واضح أنه من أجل كل معامل واحدي h في G_A هناك حد لاصفري وحيد وليكن $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ في (3). وهكذا هناك تقابل بين الحدود اللاصفرية في (3) والمعاملات الواحدية في G_A و بذلك يتم البرهان □

ومن أجل بيان موجه معقد G_A، فإن عدد المعاملات الواحدية هو عادة كبير جدا لذلك فمن المستحسن استخدام صيغة دائم مصفوفة [6] لتحديد هذا العدد مسبقا بحيث لا نترك حدودا في حساب منشور دائم مصفوفة باستخدام العلاقة (4).

نتيجة 1 (Corollary):

عدد المعاملات الواحدية في بيان موجه G_A لمصفوفة مربعة A مساو لدائم المصفوفة C_A التي فيها $c_{ij} = 1$ إذا كان (i,j) هو قوس في G_A و $c_{ij} = 0$ خلاف ذلك. للتوضيح لنأخذ البيان الموجه G_A من الشكل (1). يعطى عدد المعاملات الواحدية في G_A بالصيغة:

$$Per\ C_A = Per \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

ينتج من المعاملين الواحديين في G_A كما هو مبين في الشكل (2) ووفقا للصيغة (4) أن دائم (3) يعطى كما يلي:

$$Per\ A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{14}a_{41}a_{22}a_{33} \qquad (8)$$

بعد أن قدمنا مبرهنة توضح مدى العلاقة الهامة بين الحدود اللاصفرية في منشور دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n و المعاملات الواحدية في البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A نصف فيما يلي خوارزميتين تعتمدان على ماورد في هذه الفقرة لحساب دائم مصفوفة وهما كما يلي:

1. الخوارزمية الأولى (First Algorithm):

تتلخص هذه الخوارزمية للحصول على دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n بالخطوتين التاليتين:

1. توليد المعاملات الواحدية في البيان G_A الموافق للمصفوفة A.
2. تطبيق الصيغة (6) لحساب دائم المصفوفة A.

يمكن أن نشرح هاتين الخطوتين في الخوارزمية التالية:

خوارزمية 1 (Algorithm):

يعطى دائم مصفوفة مربعة A باستخدام الصيغة (6) كما يلي:

(i) حساب كل الدارات الموجهة في G_A كما يلي:

(a) حساب الدرجة الداخلة للعقدة i حيث $i = 1,2,...,n$.

(b) إيجاد كل الدارات الموجهة التي تحوي العقدة i حيث $i = 1,2,...,n$.

(ii) حذف الدارات الموجهة المكررة.

1. ليكن $numxloop$ عدد الدارات الموجهة في G_A.

2. نعرف $F = \{1,2,...,numxloop\}$ بأنها مجموعة كل الدارات الموجهة في G_A.

3. نحسب طول كل الدارات الموجهة في F.

4. من أجل كل دارة موجهة $i \in F$ نقوم بما يلي:

4.1 For $k = i+1$ to $numxloop$ do

(4.1.1). إذا كان طول الدارتين i و k متطابقين. عندئذ

(1). إذا كانت الدارة k تبديلا للدارة i. عندئذ

(1.1). نحذف الدارة k.

(iii). إيجاد المعاملات الواحدية:

.1 ليكن $numloop$ عدد الدارات الموجهة بعد حذف الدارات المكررة.

.2 نعرف $\hat{F} = \{1,2,...,numloop\}$ بأنها مجموعة كل الدارات الموجهة بعد حذف الدارات المكررة.

.3 من أجل كل دارة موجهة $i \in \hat{F}$ عندئذ:

(3.1). إذا كانت i معاملا واحديا. عندئذ نحسب قيمة المعامل الواحدي الناتج وإلا

(1) $S = \{i\}$.

(2) . For $k = 1$ to $numloop$ do

(2.1). إذا كان $S \cap \{k\} = \phi$. عندئذ

(i) $S = S \cup \{k\}$

(ii) إذا كانت S معاملا واحديا. عندئذ

(a) نحسب قيمة المعامل الواحدي الناتج.

(b) $S = S - \{k\}$.

2. الخوارزمية الثانية (Second Algorithm):

نقدم في المبرهنة التالية خوارزمية أخرى لحساب المعاملات الواحدية والتي هي كما سبق وبرهنا أنها تمثل الحدود اللاصفرية في منشور دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n.

خوارزمية 2 (Algorithm):

مبرهنة 2 (Theorem) : ليكن G_A البيان الموجه الموافق لمصفوفة مربعة A من المرتبة n، ولنرمز بالرمز S_i^+ لمجموعة رموز أقواس البيان G_A التي تملك العقدة i كعقدة ابتدائية لها و لنرمز أيضا بالرمز S_i^- لمجموعة رموز أقواس البيان G_A التي تملك العقدة i كعقدة طرفية (نهائي) لها. عندئذ يمكن حساب مجموعة المعاملات الواحدية بالصيغة التالية:

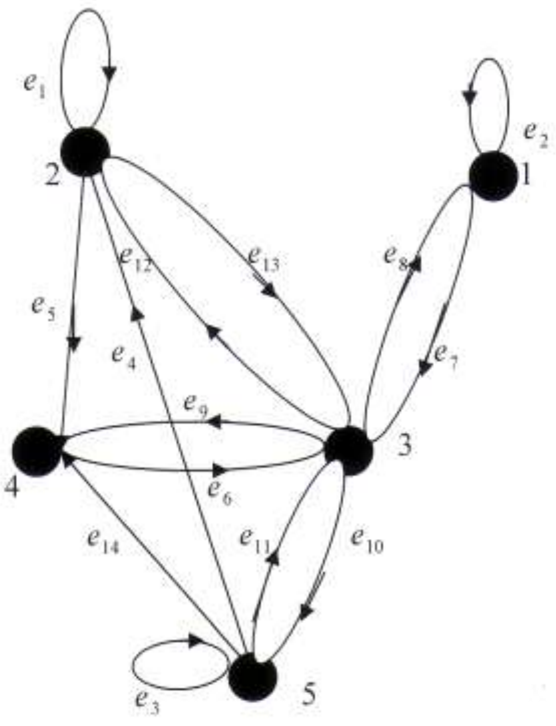
$$X = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k^+\right) \cap \left(\prod_{i=1}^{n} S_i^-\right)$$

حيث ترمز الجداءات إلى الجداءات الديكارتية للمجموعات.

البرهان (Proof):

دون فقدان عمومية البرهان، لنفرض أنه من أجل كل عقدة j من البيان G_A فإن $d^+(j) \neq 0$ و $d^-(j) \neq 0$. بما أن كل عنصر من $\left(\prod_{k=1}^{n} S_k^+\right)$ يوافق بياناً جزئياً أساسياً من البيان G_A بحيث أن الدرجة الخارجة لكل عقدة من عقده تساوي الواحد، أي أن $d^+(t) = 1$ وذلك أيا كانت العقدة t من عقد البيان الجزئي الأساسي من البيان G_A. من جهة أخرى، كل عنصر من $\left(\prod_{i=1}^{n} S_i^-\right)$ يوافق بياناً جزئياً سطحياً من البيان G_A بحيث أن الدرجة الداخلة لكل عقدة من عقده تساوي الواحد، أي أن $d^-(u) = 1$ وذلك أيا كانت العقدة u من البيان الجزئي الأساسي من البيان G_A. مما سبق ينتج أن المعاملات الواحدية من البيان G_A هي التي تظهر فقط في X. وبذلك يتم البرهان.

مثال (Example) 2: لنأخذ البيان الموجه المعطى في الشكل (3):



الشكل (3): بيان موجه لتوضيح توليد المعاملات الواحدية وفق الخوارزمية 2.

بما أن:

$$\left(\prod_{k=1}^{5} S_k^{+}\right)=\{e_5,e_{13},e_1\}\times\{e_7,e_2\}\times\{e_6,e_8,e_{10},e_{12}\}\times\{e_9\}\times\{e_3,e_4,e_{11},e_{14}\}$$

وأن:

$$\left(\prod_{i=1}^{5} S_i^{-}\right)=\{e_1,e_4,e_{12}\}\times\{e_2,e_8\}\times\{e_7,e_9,e_{11},e_{13}\}\times\{e_5,e_6,e_{14}\}\times\{e_3,e_{10}\}$$

فإن مجموعة المعاملات الواحدية في البيان المعطى في الشكل (3) وفقا للمبرهنة 2 تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned} X &=\{e_9\}\times\{e_2\}\times\left[\begin{array}{l}\left(\{e_1,e_5\}\times\{e_6,e_{10},e_{12}\}\times\{e_3,e_4,e_{14}\}\right)\\ \bigcap\left(\{e_1,e_4,e_{12}\}\times\{e_5,e_6,e_{14}\}\times\{e_3,e_{10}\}\right)\end{array}\right]\\ &=\{e_2e_9\}\times\left(\begin{array}{l}\{e_3\}\times\left[\left(\{e_1,e_5\}\times\{e_6,e_{12}\}\right)\bigcap\left(\{e_1,e_{12}\}\times\{e_5,e_6,e_{12}\}\right)\right]\\ \bigcup\{e_{10}\}\times\left[\left(\{e_1,e_5\}\times\{e_4,e_{14}\}\right)\bigcap\left(\{e_1,e_4\}\times\{e_5,e_{14}\}\right)\right]\end{array}\right)\\ &=\{e_2\ e_9\}\times\{e_1\ e_3\ e_6,e_3\ e_6\ e_{12},e_1\ e_{10}\ e_{14},e_5\ e_{10}\ e_4\}\end{aligned}$$

لا بد من الإشارة هنا أنه من المستحسن أن لا ننشر الجداءات الديكارتية بشكل كامل قبل أن نأخذ عمليات تقاطع مجموعتين في الشكل الديكارتي وذلك بهدف تخفيض الجهد الحسابي إذ يمكن أن نحذف مسبقا جميع العناصر التي تقع في إحدى المجموعات وليس في الأخريات.

نقدم في الفقرة التالية نظام تخزين جديداً لتنفيذ الخوارزميات المطورة في هذه المقالة و هذا النظام هو كما يلي:

3.3. نظام التخزين (Storage scheme)

لنفرض أنه لدينا مصفوفة مربعة A من المرتبة n تملك na عنصرا لاصفريا. بنية المعطيات المستخدمة لتمثيل المصفوفة A هي طريقة جديدة تخزن فيها العناصر اللاصفرية سطرا – سطرا وفي كل سطر تخزن العناصر اللاصفرية وفقا لتزايد أدلة أعمدتها، ونشرحها كما يلي:

يتطلب تخزين المصفوفة المعطاة A وفق طريقة التخزين الجديدة متجهتين هما VA و JA تحوي كل منهما na عنصرا حيث na هو عدد العناصر اللاصفرية في المصفوفة A. يحتوي المتجه VA على القيمة العددية للعناصر اللاصفرية في المصفوفة A المخزنة سطرا – سطرا ويحتوي المتجه JA على أدلة العمود الموافقة للعناصر اللاصفرية المخزنة في المتجه VA. نبدأ دليل العمود الأول في كل سطر في JA بإشارة سالبة. إذن يحتاج تخزين المصفوفة A إلى $2na$ بدلا من n^2 في حال تخزين A كمصفوفة كثيفة و هذا تخفيض كبير جدا في الذاكرة. فمثلا من أجل (3) طريقة التخزين الجديدة للمصفوفة A هي كما يلي:

$$\begin{array}{l} VA=\overbrace{a_{11}\quad a_{14}}^{row1}\quad \overbrace{a_{22}\quad a_{23}}^{row2}\quad \overbrace{a_{31}\quad a_{33}}^{row3}\quad \overbrace{a_{41}\quad a_{44}}^{row4}\\ JA=-1\quad 4\quad -2\quad 3\quad -1\quad 3\quad -1\quad 4\end{array} \qquad (9)$$

في هذه المقالة تنفذ الخوارزميتان 1 و 2 باستخدام طريقة التخزين الجديدة المذكورة أعلاه.

ملاحظة 1 (Notice): إذا كانت المصفوفة A متناظرة فيكفي تخزين الجزء العلوي (أو السفلي) من المصفوفة A.

4.3. التجارب العددية (Numerical Experiments):

ننفذ الخوارزميات المقترحة التي تعتمد على البيانات الموجهة حاسوبيا بلغة ++C على حواسيب بنتيوم **4** و 512 RAM. نخزن فقط العناصر اللاصفرية في المصفوفة باستخدام نظام التخزين الجديد من الفقرة 4. نفذت الخوارزميات بنجاح على التجارب العددية التي حصلنا على عناصر مصفوفاتها باستخدام المولدات العشوائية. و نورد هنا فقط مرتبة المصفوفة و عدد العناصر اللاصفرية.

دونت النتائج الحاصلة من تطبيق الخوارزميتين الجديدتين 1 و 2 و من تطبيق خوارزمية باكس و فرانكلين في الجدول (1). من الجدول يتضح أن زمن تنفيذ الخوارزمية 1 أفضل بكثير من الخوارزمية 2 و أيضا من خوارزمية باكس و فرانكلين. إذ أن الخوارزمية 1 أسرع من خوارزمية باكس و فرانكلين بحوالي 3 مرات. علاوة على ذلك فإن الخوارزمية 2 أسرع من خوارزمية باكس و فرانكلين. و هكذا فإن الخوارزمية 1 هي أسرع من الخوارزميتين الأخريين مما يجعلها طريقة حاسوبية تستحق الاهتمام لحساب دائم مصفوفة مربعة. و لذلك ننصح المهتمين والباحثين الذين يتطلب عملهم حساب دائم مصفوفة باعتمادها. من جهة أخرى و نظرا لسرعة زمن تنفيذ الخوارزميتين 1 و 2 يمكن أن نذكر بعض أهم تطبيقاتهما الإضافية في مجالات أخرى:

1. حساب محدد مصفوفة مربعة بعد إجراء تعديلات بسيطة على الخوارزميتين 1 و 2.
2. حساب المعاملات الواحدية في بيان موجه.
3. حساب عدد الحدود اللاصفرية في منشور محدد.
4. حساب جميع الدارات الموجهة في بيان بما فيها دارة هاملتون.
5. إيجاد الأشجار الأساسية في شجرة المصفوفة الموافقة.
6. يمكن تطبيق الخوارزميتين 1 و 2 لحساب دائم مصفوفة مربعة ذات توزيع معين لعناصرها اللاصفرية أو ذات توزيع عشوائي بعد إجراء تعديلات طفيفة عليهما.
7. حساب عدد التماثلات التامة (Complete matchings) في البيان الموجه الموافق لمصفوفة الاتصال الممثلة بالمصفوفة C_A.

الجدول (1): زمن تنفيذ الخوارزميتين 1 و 2 و خوارزمية باكس و فرانكلين مأخوذا بالثواني لحساب دائم المصفوفات المولدة عشوائيا.

رقم المسألة	مرتبة المصفوفة n	عدد العناصر اللاصفرية na	زمن تنفيذ الخوارزمية 1	زمن تنفيذ الخوارزمية2	زمن تنفيذ خوارزمية باكس و فرانكلين
1	1000	396	0.01	0.02	0.05
2	5000	1725	0.30	0.50	1.05
3	35000	6218	2.52	4.35	6.27
4	50000	13481	4.05	6.22	11.75
5	100000	23139	7.55	11.05	21.25
6	150000	37542	11.54	17.68	33.85
7	500000	75600	35.04	39.25	115.84

5.3. الاستنتاجات والتوصيات (Conclusions and Recommendations):

بينا في مبرهنة هامة العلاقة الوطيدة بين الحدود اللاصفرية في منشور دائم مصفوفة مربعة A من المرتبة n وأنواع معينة من البيانات الجزئية في البيان الموجه G_A الموافق للمصفوفة A. دعونا هذه البيانات الجزئية بالمعاملات الواحدية. ووفقا لهذه التسمية وبالاعتماد على المبرهنة 1 وصفنا في هذه الدراسة خوارزميتين فعالتين جديدتين لإيجاد القيمة الدقيقة لحساب دائم مصفوفة مربعة. أجرينا بعض التجارب العددية باستخدام الخوارزميتين 1 و 2 و خوارزمية باكس و فرانكلين بلغة ++C على حواسيب بنتيوم 4 و بذاكرة 512. دونا النتائج في جدول فتبين لنا أن الخوارزميتين 1 و 2 أسرع بكثير من خوارزمية باكس و فرانكلين و خاصة الخوارزمية 1. و أخيرا قدمنا بعض التطبيقات الإضافية من جراء تطبيق الخوارزميتين 1 و 2.

المراجع (References):

[1] BREGMAN, L. M. *Certain properties of nonnegative matrices and their permanents*. Dokl, Akad. Nauk. SSSR, Vol. 211, No. 12, 1973, 27-30.

[2] SALUJA, S. *A note on the permanent value problem*, Infor. Proc. Lett., U. S. A. Vol. 43, No. 11, 1992, 1-5.

[3] VALIANT, L. G. *The complexity of computing the permanent.* Theoret. Comput. Sci., U. S. A., Vol. 8, No. 11, 1979, 189-201.

[4] CHEN, W. K. *Applied Graph Theory*. 1st Edition, North-Holland Publishing Company, New York, 1976, 653.

[5] MARSHALL, H. JR. *Combinatorial Theory.* 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 1986, 621**.**

[6] VAN LIANT, J. H. ; WILSON, R. M. *A Course in Combinatorics.* 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 628.

[7] SPIRAKIS, P. DIAZ, J.; SERNA, M. J. *On the random generation and counting of matching in dense graphs*. Theoret. Comput. Sci., U. S. A., Vol. 201, No. 7, 1998, 281-290.

[8] BAX E. ; FRANKLIN, J. *A permanent formula with many zero-valued terms*. Infor. Proc. Lett. U. S. A., Vol. 63, No. 12, 1997, 33-39

[9] BAPAT, R. B. *Permanent in probability and statistics*, Linear Algebra Appl. U. S. A., Vol. 127, No. 24, 1990, 3-25.

[10] THOMAS, L. *Algebraic Complexity Theory.* 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 624.

[11] FEIGE, U. ; GGARSTEN, L. *On the hardness of computing the permanent of random matrices*, Comput. Complexity U. S. A., Vol. 6, No. 32, 1997, 101-132.

[12] SWAMY, M. N.; THULASIRAMAN, K. *Graph, Networks and Algorithms*. 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 1981, 542.

[13] CHARTRAND, G. ; OELLERMAN, R. *Applied and Algorithmic Graph Theory.* 2nd Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1993, 542.

.

.