مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (29) العدد (4) 2007
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Sciences Series Vol. (29) No. (4) 2007

خوارزمية مطورة لإيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل بأقل كلفة ممكنة

الدكتور كمال السلوم *
لويس عدنان بهارلي **

(تاريخ الإيداع 5 / 6 / 2007. قُبِل للنشر في 2007/8/14)

□ الملخّص □

نقدم في هذه المقالة خوارزمية مطورة لإيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل بأقل كلفة ممكنة.

تتضمن هذه الخوارزمية مبرهنة أساسية مهمة توضح الشرط اللازم والكافي الذي يتضمن الشروط الواجب تحققها ليكون الحلان النافذان لمسألتي النقل الأولية والثنوية أمثلين.

أخيراً أجرينا تجارب عددية لتوضيح فعالية الخوارزمية المطورة من أجل عدة مسائل، ثم أجرينا دراسة مقارنة بين الخوارزمية المطورة وخوارزميات أخرى تستخدم لحل مسائل النقل.

تبين من النتائج أن الخوارزمية المطورة تعطي الحل الأمثل بأقل كلفة ممكنة وبشكل أسرع من الخوارزميات المدروسة.

كلمات مفتاحية: مسائل النقل.

* أستاذ مساعد، قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة المعلوماتية – جامعة البعث – حمص – سورية.
** طالب ماجستير، قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – حمص – سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (29) العدد (4) 2007
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Sciences Series Vol. (29) No. (4) 2007

A Developed Algorithm for Finding the Optimal Solution of the Transportation Problems with the Least Possible Cost

Dr. Kamal alsaloum *
Louis Adnan Baharli**

(Received 5 / 6 / 2007. Accepted 14/8/2007)

□ ABSTRACT □

In this paper we introduce a developed algorithm to find the optimal solution for the transportation problems with the least possible cost. This algorithm contains an essential theorem that demonstrates the necessary and sufficient situation that includes the conditions needed in order to get the feasible solution of primal and dual transportation problems.

At last, we had numerical experiments to illustrate the efficacy of the developed algorithm for many problems, and we compared this developed algorithm with other algorithm to solve the transportation problems.

Results showed that the developed algorithm gives the optimal solution with the least possible cost and in a way faster than any other studied algorithm.

Keywords: Transportation problems.

***Associate Professor, Department of Basic Sciences, Faculty of Information Engineering, Al-Baath University, Homs, Syria.**
**** Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Al-Baath University, Homs, Syria.**

مقدمة:

تعد مسائل النقل (Transportation Problems) من أقدم المسائل التي تناولتها البرمجة الصحيحة وأهمها (Integer Programming) وهي التي تشكل حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية((Linear Programming وقد وضعها وصاغها الرياضي السوفييتي (Kantorovic) عام 1939، وصاغها بشكل آخر (Hichcock) عام 1941.

الحديث هنا عن تطبيقات واقعية يمكن صياغتها وتأويلها على شكل مسائل نقل، إذْ يستخدم لحل مسائل النقل طرائق خاصة بسبب الطبيعة التي تميزها من غيرها من مسائل البرمجة الخطية كونها يمكن أن تصاغ بشكل جدولي، ومن هذه الطرائق:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية (North-west Corner Method). [1,2]
- طريقة التكلفة الأقل (Least-cost Method). [3]
- طريقة تقريب فوجل ((Vogel`s Approximation Method(VAJ). [1,2]

تعطي الطرائق السابقة حلول نافذة (مقبولة) (Feasible Solution) إلا أن هذه الحلول ليست بالضرورة حلولاً مثلى (Optimal Solutions)، لذلك تطبق طرائق إضافية على هذا الحل بهدف تطويره وتحسينه ومن هذه الطرائق طريقة الحلقات المغلقة (Close Rings Method) [1,2]

يمكن حل مسائل النقل باستخدام الطرائق المتبعة في حل مسائل البرمجة الخطية. وأشهر هذه الطرائق طريقة السمبلكس بخوارزمياتها المتعددة (Simplex Methods) [4].

ارتبط بمسائل البرمجة الخطية مبدأ أساسي هو النظرية الثنوية (Duality Theory) التي تنص على أن:

" لكل مسألة تعظيم (تصغير) في البرمجة الخطية، والتي سندعوها النموذج الأولي (Primal Model)، هناك مسألة تصغير (تعظيم) مشابهة ووحيدة، ندعوها النموذج الثنوي (Dual Model) تتضمن المعطيات ذاتها التي تصف المسألة الأصلية ".[5]

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من التطبيقات الاقتصادية المهمة التي يمكن صياغتها على شكل مسائل نقل، ومن الحاجة الملحة من أجل الوصول إلى أفضل الحلول لهذه التطبيقات وبأقل كلفة ممكنة وبأكبر سرعة ممكنة.

يهدف هذا البحث إلى الحصول على خوارزمية مطورة وفعالة تعطينا الحل الأمثل لمسائل النقل بأقل كلفة ممكنة، وبشكل أسرع من الخوارزميات الأخرى المدروسة.

نقدم فيما يلي موجزاً مختصراً عن النموذجين الأولي والثنوي لمسألة النقل.

النموذج الأولي لمسألة النقل:

تهدف مسألة النقل إلى وضع خطة مثالية تبين كيفية تنظيم نقل منتج معين من (m) مصدر (مخزن) مختلف (Sources)، لكل منها عدد متاح من الوحدات (a_i)، من أجل $i=1,2,...,m$ إلى (n) مكان وصول

(مركز استهلاكي) مختلف (Destinations)، يتطلب كل منها عدداً من الوحدات (b_j) من هذا المنتج بحيث $j=1,2,...,n$ ، وبحيث c_{ij} هي كلفة نقل وحدة المنتج من المصدر i إلى مكان الوصول j وبأقل كلفة ممكنة (a_i, b_j أعداد صحيحة). فإذا كانت x_{ij} ترمز إلى كمية الوحدات التي ستنقل من المصدر i إلى مكان الوصول j فإن المسألة هي تحديد هذه الكميات لتكون التكلفة الكلية للنقل أقل ما يمكن.

يعطى النموذج الرياضي الموافق لهذه المسألة الذي يدعى عادة النموذج الأولي ونرمز له اختصاراً (P) :

$$(Objective \quad function) \quad Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}.x_{ij}\rightarrow \min \qquad (1)$$

وهو ما يدعى التابع الهدف ضمن القيود (Constraint Set):

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i \qquad ;i=1,2,....,m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_j \qquad ;j=1,2,....,n \qquad (3)$$

إضافة إلى شروط عدم السلبية:

$$[2,4] \qquad x_{ij}\ge 0 \qquad ;i=1,2,....,m \qquad ;j=1,2,....,n$$

النموذج الثنوي لمسألة النقل:

يرمز للنموذج الثنوي لمسألة النقل بالرمز (D) ويعطى تابع الهدف الموافق بالصيغة الرياضية التالية:

$$(Objective \quad function) \quad W=\sum_{j=1}^{n}b_j.v_j-\sum_{i=1}^{m}a_i.u_i\rightarrow \max \qquad (4)$$

ضمن القيود:

$$v_j-u_i\le c_{ij} \qquad ;i=1,2,....,m \qquad ;j=1,2,....,n \qquad (5)$$

إضافة إلى شروط عدم السلبية:

$$[4,6] \quad v_j\ge 0,\quad u_i\ge 0 \qquad ;i=1,2,...,m \qquad ;j=1,2,....,n \qquad (6)$$

بحيث:

v_j هي سعر وحدة المنتج بعد نقلها إلى مركز الاستهلاك j ضمناً تكلفة الشحن.

u_i هي سعر وحدة المنتج من أرض المصدر i من دون تكلفة الشحن.

b_j عدد الوحدات من المنتج الواجب نقلها إلى مركز الاستهلاك j .

a_i عدد الوحدات من المنتج المتوافرة فعلياً في المصدر i .

c_{ij} تمثل كلفة النقل من المصدر i إلى مركز الاستهلاك j إذا قام المنتج بنقلها بنفسه، وذلك كله من أجل $i=1,2,....,m$ و $j=1,2,....,n$. [6]

نتائج أساسية جديدة:

نقدم في هذه الفقرة مبرهنة مهمة تتضمن الشرط اللازم والكافي الذي يحدد الشروط الواجب تحققها ليكون الحلان النافذان لنموذجي النقل الأولي (P) والثنوي (D) أمثلين.

قبل البدء بعرض المبرهنة التي تتضمن هذه الشروط لدينا التوطئات التالية:

توطئة 1 (Lemma 1)

إن قيمة التابع الهدف لنموذج النقل الأولي (الإنقاص إلى الحد الأصغري) من أجل أي حل نافذ هي دوماً أكبر أو تساوي قيمة التابع الهدف لنموذج النقل الثنوي (الزيادة إلى الحد الأعظمي).

أي أنه إذا كانت x'_{ij} حلاً نافذاً للنموذج الأولي لمسألة النقل (P) وكانت $u'_i \;\; , v'_j$ حلاً نافذاً للنموذج الثنوي (D) بحيث $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$ عندئذٍ:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} b_j.v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.u'_i \qquad (7)$$

[3,4]

توطئة 2 (Lemma 2)

إذا كان x'_{ij} حلاً نافذاً للنموذج الأولي لمسألة النقل (P) وكانت $u'_i \;\; , v'_j$ حلاً نافذاً للنموذج الثنوي (D) بحيث $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$، وكانت العلاقة التالية صحيحة:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.u'_i \qquad (8)$$

عندئذٍ تكون (x'_{ij}) و $(u'_i \;\; , v'_j)$ حلين أمثلين لكل من النموذج الأولي لمسألة النقل (P) والنموذج الثنوي (D) على الترتيب بحيث $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$ ، [3,4]

توطئة 3 (Lemma 3)

إذا كان x'_{ij} حلاً نافذاً للنموذج الأولي لمسألة النقل (P) بحيث $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$، عندئذٍ يكون x'_{ij} حلاً أمثل لهذه المسألة إذا – وفقط إذا – وجد حل نافذ $u'_i \;\; , v'_j$ من أجل $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$ بحيث يكون:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.u'_i \qquad (9)$$

وعلى وجه التخصيص يكون $u'_i \;\; , v'_j$ من أجل $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$ حلاً أمثل للنموذج الثنوي (D). [3,4]

المبرهنة 1 (Theorem 1)

الشرط اللازم والكافي ليكون الحلان النافذان (x'_{ij}) و $(u'_i \;\; , v'_j)$ لكل من النموذج الأولي لمسألة النقل (P) والنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) على الترتيب من أجل $i = 1,2,....,m \;\; ; j = 1,2,....,n$، حلين أمثلين لهما على الترتيب، هو أن تتحقق الشروط التالية معاً:

$$x'_{ij}(c_{ij} + u'_i - v'_j) = 0 \qquad (10)$$

$$u'_i(a_i - x'_{ij}) = 0 \qquad (11)$$

$$v'_j(x'_{ij} - b_j) = 0 \qquad (12)$$

البرهان:

لزوم الشرط:

(x'_{ij}) و $(u'_i \ \ ,v'_j)$ حلان أمثلان لكل من النموذج الأولي لمسألة النقل (P) والنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) على الترتيب من أجل $i = 1,2,....,m \ ; \ j = 1,2,....,n$.

ولأن الحل الأمثل لمسألة ما هو حل نافذ لها، عندئذٍ تكون (x'_{ij}) و $(u'_i \ \ ,v'_j)$ حلين نافذين لكل من (P) و (D) على الترتيب بحيث $i = 1,2,....,m \ ; \ j = 1,2,....,n$ وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(v'_j - u'_i\right).x'_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} b_j v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u'_i \qquad (13)$$

لكن حسب توطئة (3) يكون لدينا:

استناداً إلى أن (x'_{ij}) حل أمثل للنموذج الأولي (P) و $(u'_i \ \ ,v'_j)$ حل أمثل للنموذج الثنوي (D) فإن العلاقة (8) محققة أي:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u'_i$$

بالتعويض في العلاقة (13) تتحول المتراجحات إلى مساواة، وتأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(v'_j - u'_i\right).x'_{ij} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(v'_j - u'_i\right).x'_{ij} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(u'_i - v'_j\right).x'_{ij} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} + u'_i - v'_j\right).x'_{ij} = 0 \qquad (14)$$

لكن حسب العلاقة (5) لدينا:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \qquad ; i = 1,2,...,m; \; j = 1,2,...,n$$

ولأن $(v'_j \; , u'_i)$ حل نافذ للنموذج الثنوي (D) فهو يحقق شروطه أي:

$$v'_j - u'_i \le c_{ij} \qquad ; i = 1,2,....,m \qquad ; j = 1,2,....,n$$

ومن ثَمّ فإن:

$$c_{ij} + u'_i - v'_j \ge 0 \quad ; i = 1,2,...,m \quad ; j = 1,2,...,n$$

ولأن $x'_{ij} \ge 0$ فإن:

$$(c_{ij} + u'_i - v'_j)x'_{ij} \ge 0 \quad ; i = 1,2,...,m \quad ; j = 1,2,...,n$$

إذاً المجموع في العلاقة (14) لا يمكن أن يساوي الصفر إلا إذا كانت:

$$(c_{ij} + u'_i - v'_j)x'_{ij} = 0 \quad ; i = 1,2,...,m \quad ; j = 1,2,...,n$$

وهي العلاقة (10).

لنبرهن الآن صحة العلاقتين الباقيتين:

من العلاقتين (8) و (13) نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(v'_j - u'_i\right).x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u'_i \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(v'_j - u'_i\right).x'_{ij} - \sum_{j=1}^{n} b_j v'_j + \sum_{i=1}^{m} a_i u'_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v'_j.x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u'_i.x'_{ij} - \sum_{j=1}^{n} b_j v'_j + \sum_{i=1}^{m} a_i u'_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v'_j(x'_{ij} - b_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u'_i(a_i - x'_{ij}) = 0 \qquad (15)$$

ولأن $(v'_j \; , u'_i)$ حل نافذ للنموذج الثنوي (D) فهو يحقق شروطه أي:

$$v'_j \ge 0 \quad ; j = 1,2,....,n$$

$$u'_i \ge 0 \quad ; i = 1,2,....,m$$

وكذلك (x'_{ij}) حل أمثل للنموذج الأولي (P) فهو يحقق العلاقة (2) أي:

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} \le a_i \qquad ; i = 1,2,....,m$$

وأيضاً:

$$x'_{ij} \ge 0 \quad ; i = 1,2,....,m; \; j = 1,2,....,n$$

ينتج أن:

$$x'_{ij} \le a_i \quad ; i = 1,2,....,m; \; j = 1,2,....,n$$

ومنه:

$$a_i - x'_{ij} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad u'_i(a_i - x'_{ij}) \ge 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u'_i(a_i - x'_{ij}) \ge 0 \qquad (16)$$

وأيضاً x'_{ij} يحقق:

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} \ge b_j \quad ; j = 1,2,....,n \;\; \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} \ge \sum_{j=1}^{n} b_j \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} - \sum_{j=1}^{n} b_j \ge 0 \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x'_{ij} - b_j) \ge 0$$

ويتلو ذلك أن:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v'_j(x'_{ij} - b_j) \ge 0 \qquad (17)$$

من العلاقات (15)، (16)، (17) نجد أن مجموع مقادير موجبة يساوي الصفر، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان كل منها يساوي الصفر أي:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u'_i(a_i - x'_{ij}) = 0$$

والعلاقة السابقة مجموع لمقادير موجبة ناتجه صفر فكل منها يساوي الصفر:

$$u'_i(a_i - x'_{ij}) = 0; \quad i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$$

وهي العلاقة (11).

وكذلك يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v'_j(x'_{ij} - b_j) = 0$$

ولأن المجموع السابق لمقادير موجبة كان ناتجه صفراً فإن:

$$v_i'(x_{ij}' - b_j) = 0 \quad ; i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,...,n$$

وهي العلاقة (12) .

كفاية الشرط:

(x_{ij}') و $(u_i' \quad , v_j')$ حلان نافذان لكل من النموذج الأولي لمسألة النقل (P) والنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) على الترتيب من أجل $i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$.

كذلك تتحقق العلاقات (10)، (11)، (12)، ولنبرهن أن (x_{ij}') و $(u_i' \quad , v_j')$ حلان نافذان لكل من النموذج الأولي لمسألة النقل (P) والنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) على الترتيب من أجل $i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$.

من العلاقة (10) لدينا:

$$x_{ij}'(c_{ij} + u_i' - v_j') = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ij}'.c_{ij} + x_{ij}'.(u_i' - v_j') = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_{ij}'.c_{ij} = -x_{ij}'.(u_i' - v_j') \qquad ; i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$$

ومنه:

$$x_{ij}'.c_{ij} = x_{ij}'.(v_j' - u_i') \qquad ; i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$$

نأخذ المجموع في كل طرف من العلاقة السابقة بالنسبة لكل قيم i، j حيث $i = 1,2,...,m \quad ; j = 1,2,...,n$ فنجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}'.c_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}'.(v_j' - u_i') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}'.v_j' - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}'.u_i' \tag{18}$$

ومن العلاقة (11) نجد أن:

$$u_i'(a_i - x_{ij}') = 0 \quad \Rightarrow u_i'.a_i - u_i'.x_{ij}' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_i'.a_i = u_i'.x_{ij}' \qquad ; i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$$

نأخذ المجموع في كل طرف من العلاقة السابقة بالنسبة لكل قيم i، j بحيث $i = 1,2,...,m \quad ; j = 1,2,...,n$ فنجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i'.a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i'.x_{ij}' \tag{19}$$

ومن العلاقة (12) نجد أن:

$$v_j'(x_{ij}' - b_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_j'.x_{ij}' - v_j'.b_j = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_j'.b_j = v_j'.x_{ij}' \qquad ; i = 1,2,....,m \quad ; j = 1,2,....,n$$

نأخذ المجموع في كل طرف من العلاقة السابقة بالنسبة لكل قيم i ، j بحيث $i=1,2,...,m \;\; ; j=1,2,...,n$ فنجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v'_j.b_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v'_j.x'_{ij} \qquad (20)$$

بطرح العلاقة (19) من العلاقة (20) طرفاً لطرف نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v'_j.b_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i.u'_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v'_j.x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u'_i.x'_{ij} \;\; \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} v'_j.b_j - \sum_{i=1}^{m} u'_i.a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v'_j.x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u'_i.x'_{ij} \qquad (21)$$

بالمقارنة بين العلاقتين (21) و (18) نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v'_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u'_i$$

وبحسب توطئة (2) يكون (x'_{ij}) حلاً أمثل للنموذج الأولي لمسألة النقل (P)، و$(u'_i \;\; , v'_j)$ حلاً أمثل للنموذج الثنوي (D) وذلك من أجل $i=1,2,....,m \;\; ; j=1,2,....,n$.

وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب.

بعد أن قدمنا مبرهنة أساسية مهمة لتحديد الشروط الواجب تحققها لكي يكون الحلان النافذان للنموذجين الأولي والثنوي لمسألة نقل حلين أمثلين لهما، نقدم خوارزمية مطورة لحل مسألة النقل المدروسة، وهي كما يلي:

خوارزمية مطورة 1 لحل مسألة النقل:

نقدم في هذه الفقرة خوارزمية مطورة لحل مسائل النقل تعتمد على:

1. خوارزمية السمبلكس المعدلة [7]
2. المبرهنة الأساسية 1.

نطبق الخوارزمية المطورة على النموذج الثنوي (D)، مستفيدين من المبرهنة (1)، تمهيداً للوصول إلى الحل الأمثل للنموذج الأولي (P). وفيما يلي نورد خطوات هذه الخوارزمية المطورة:

1. نشكل النموذج الثنوي لمسألة النقل.
2. نشكل جدول السمبلكس المعدل: نطبق خوارزمية السمبلكس المعدلة (Revised Simplex Algorithm) [7]
3. عند الوصول إلى الحل الأمثل للنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) نعوض الحلول الناتجة في العلاقات الواردة في نص المبرهنة (1)، مع مراعاة مجموعة الشروط التالية التي تسمى شروط الفضفضة المتممة (complementary Slackness Conditions)، وهذه الشروط هي:

- إذا كانت قيمة المتحول في الحل الأمثل للنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) موجبة فإن القيد الموافق لهذا المتغير في النموذج الأولي عبارة عن معادلة.
- إذا كانت قيمة المتحول المساعد(Slack Variable) أكبر تماماً من الصفر في الحل الأمثل للنموذج الثنوي لمسألة النقل (D) فإن المتغير الأولي الموافق في النموذج الأولي (P) يساوي الصفر. [4]

نحصل نتيجة هذه الخطوة على جملة معادلات خطية.

4. نحل جملة المعادلات الناتجة فنحصل على الحل الأمثل للنموذج الأولي لمسألة النقل (P).

نبين فيما يلي تعقيد الخوارزمية المطورة لتوضيح فعاليتها:

تعقيد الخوارزمية المطورة:

تدرس نظرية التعقيد التعقيد الزماني والتعقيد المكاني للخوارزميات (أي الوقت وفراغ الذاكرة الذي تحتاجه الخوارزميات)، استناداً إلى حجم معطيات الإدخال. [8]

وقد كان الاعتماد على معطيات الإدخال نتيجة أساسية لعدة عوامل منها:

- وجد الباحثون أن مدة تنفيذ واحدة لا تصلح، لأنها تختلف باختلاف سرعة الحاسبات المستخدمة.
- كما أن عدد تعليمات واحدة لا تصلح، كونها تختلف من لغة برمجية إلى أخرى.

ولذلك يمكننا تعريف:

(1). التعقيد الزماني: هو التابع f بحيث $f(n)$ هو أكبر عدد من خطوات الخوارزمية تحتاجها من أجل حل مثال لمسألة تمتلك معطيات إدخال من الطول n، ويقاس دوماً من أجل أسوأ حالة ممكنة. [9]

(2). التعقيد المكاني: هو معرف تمثيلي للفراغ المحتاج من الذاكرة من قبل معطيات المسألة المراد حلها.

ولإيجاد التعقيد الزماني والمكاني للخوارزمية المطورة. [9]

(1) **التعقيد الزماني:**

التعقيد الزماني لخوارزمية السمبلكس المعدلة، من أجل حل برنامج خطي، يعطى بدلالة عدد قيوده. فإذا كان عدد القيود k وعدد المتحولات k كان التعقيد $O(k^3)$

وفي خوارزميتنا لدينا $m.n$ قيد ومن ثمّ فإن التعقيد حتى الوصول إلى الحل الأمثل للنموذج الثنوي هو من رتبة $O((m.n)^3)$ ؛

أما الخطوات اللاحقة فهي حل جملة معادلات خطية، وعددها لا يتجاوز $m.n$، وأيضاً التعقيد هنا هو $O((m.n)^3)$ ولذلك فإن التعقيد الزماني للخوارزمية هو $O((m.n)^3)$. [8,9]

(2) **التعقيد المكاني:**

كما أوردنا سابقاً أن التعقيد المكاني للخوارزمية يرتبط بشكل أساسي بحجم الذاكرة الذي تشغله معطيات المسألة المراد حلها.

وكما نعلم أن أي مسألة برمجة خطية ذات L متحول و s قيد توصف بالمصفوفات الثلاث C, A, B [3,4]

بحيث :

- C هي مصفوفة معاملات المتغيرات u, v في التابع الهدف (شعاع سطري $(1, L)$)، وهي من القياس $1 \times L$ أي ذات L عنصر.

- A مصفوفة الشروط أو القيود وهي من القياس $L \times s$ أي تحتوي على $L \times s$ عنصر.
- B مصفوفة الثوابت (شعاع عمودي $(s,1)$) وهي من القياس $s \times 1$ أي ذات s عنصر.

ولذلك يكون حجم معطيات أي مسألة برمجة خطية هو: $(L.s+s+L)$

إذا فرضنا أن كل مدخل من مدخلات المسألة يشغل على الأكثر $(k)bits$ من الذاكرة فإن معطيات المسألةعندئذٍ تشغل على الأكثر $((L.s+s+L)k)bits$ من حجم الذاكرة الكلي، وكما نعلم أن أي عدد صحيح موجب وليكن r يكتب وفق النظام الثنائي في العد بالشكل:

$$r = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots\cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

بحيث $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_k$ تأخذ القيمة 0 أو 1 .

فإذا كان ($r \le e$) أمكننا كتابة:

$$r = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots\cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0 \le 2^{\log_2 e}$$

فتكون قيمة (k) على الأكثر $[\log_2 e]$، وعليه يمكننا تمثيل أي عدد صحيح r حيث $(|r| \le e)$ بـ $([\log_2 e]+2)bits$ على الأكثر، فإذا فرضنا أن (e) هو أكبر مقدار من الذاكرة ممكن أن يشغله مُدخل من مدخلات المسألة فإن مثال من مسائل البرمجة الخطية يشغل المساحة $((L.s+s+L)((\log_2 e)+2))bits$ من الذاكرة.

وعدد المتحولات في الخوارزمية المطورة هو $m+n$ وعدد القيود $m.n$ حيث m عدد المصادر و n عدد مراكز الاستهلاك ولهذا نحتاج إلى $((m+n+1)m.n+m+n)([\log 2u]+2)bits$)، وهو التعقيد المكاني للخوارزمية المطورة في هذا البحث.

تجارب عددية:

نقدم في هذه الفقرة عدة تجارب عددية لتوضيح فعالية الخوارزمية المطورة. وقد أجرينا مقارنة بين الخوارزمية المطورة والخوارزميات التالية:

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
2. طريقة السمبلكس المطبقة على النموذج الأولي لمسائل النقل.

نفذنا الخوارزمية المطورة في هذه المقالة إضافة إلى خوارزميتي الزاوية الشمالية الغربية وخوارزمية السمبلكس من أجل النموذج الأولي لمسألة النقل بلغة البرمجة $(Delphi)$، وقد تم تزويد البرنامج بمؤقت زمني مربوط مع ساعة حاسب شخصي معالجه $(Intel(R), Celeron(R)\ \ 2400\ \ GH_Z)$ وذلك على عدد من مسائل الاختبار حصلنا فيها على الكميات المتوافرة في كل مصدر، والكميات التي يحتاجها كل مركز وصول، وكلف النقل باستخدام مولد أعداد عشوائية، وتم تنظيم النتائج في جداول وقدّر الزمن بالميلي ثانية $(m.\sec)$:

في المرحلة الأولى ثبتنا عدد المصادر ($m = 20$)، أما عدد مراكز الوصول فكان يزداد بواقع 10 مراكز في كل مسألة بدءاً من $n = 10$ حتى $n = 100$. جاءت النتائج على الشكل التالي:

الجدول (1) يمثل زمن تنفيذ الخوارزميات الثلاث من أجل 20 مصدر ومراكز استهلاك من 10 إلى 100 مركز

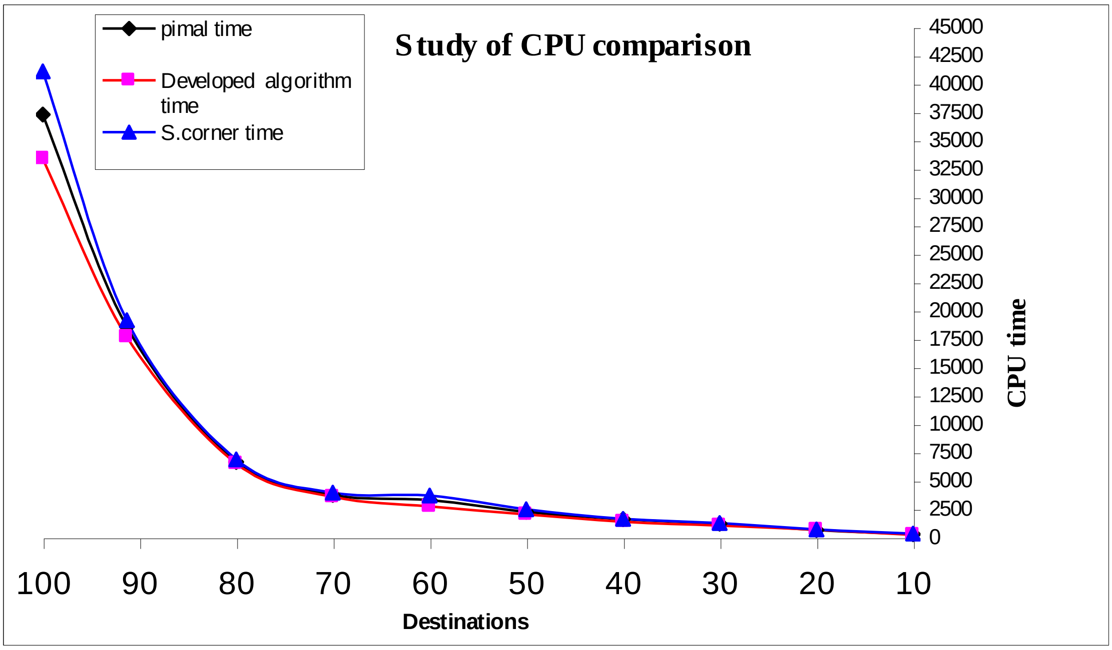
عدد مراكز الوصول(n)	زمن التنفيذ (m.sec)		
	طريقة سمبلكس الأولية	الخوارزمية المطورة	طريقة الزاوية الشمالية الغربية
10	50	50	50
20	110	110	100
30	170	160	170
40	270	220	280
50	380	330	390
60	490	440	500
70	600	550	660
80	720	710	770
90	1090	1040	1050
100	1150	1100	1270

ثم زدنا عدد المصادر إلى ($m = 40$) وبعدها إلى ($m = 60$)، وأخيراً ثبتنا عدد المصادر ($m = 80$) وزدنا عدد مراكز الوصول بواقع 10 مراكز في كل مسألة بدءاً من $n = 10$ حتى $n = 100$. وحصلنا على النتائج التالية:

الجدول (2) يمثل زمن تنفيذ الخوارزميات الثلاث من أجل 80 مصدراً، ومراكز استهلاك من 10 إلى 100 مركز

عدد مراكز الوصول(n)	زمن التنفيذ (m.sec)		
	طريقة سمبلكس الأولية	الخوارزمية المطورة	طريقة الزاوية الشمالية الغربية
10	280	230	330
20	660	690	710
30	1200	1050	1260
40	1600	1390	1650
50	2260	2040	2470
60	3030	2730	3070
70	3740	3580	3950
80	6650	6510	6870
90	18060	17690	19160
100	39980	36040	41100

نبين الآن بيانياً نتيجة المقارنة بين أزمنة تنفيذ الخوارزمية المطورة والخوارزميات الأخرى المدروسة في البحث من أجل عدد مصادر $(m = 80)$، وعدد مراكز وصول يزداد بواقع 10 مراكز في كل مسألة بدءاً من $n = 10$ حتى $n = 100$ كما هو مبين في الجدول (2).



الشكل (1) يمثل بيانياً زمن تنفيذ الخوارزميات الثلاث من أجل 80 مصدراً، ومراكز استهلاك من 10 إلى 100 مركز

يتضح من الجدولين (1) و (2) أن زمن التنفيذ يزداد بازدياد عدد مراكز الوصول n، وذلك من أجل كل الطرائق التي درست في هذا المقال، ويعزى ذلك إلى ازدياد العمليات الحسابية في كل طريقة بازدياد n التي تعني بالمقابل زيادة عدد المتحولات من جهة، والقيود من جهة ثانية، وهو ما ظهر جلياً في الشكل (1).

كما أنه يمكننا الملاحظة (جدولياً وبيانياً) أن الخوارزمية المطورة ذات أفضلية على الطريقتين الباقيتين من حيث سرعة التنفيذ، تليها طريقة السمبلكس من أجل النموذج الأولي، مما يعني أفضلية استخدم الخوارزمية المطورة من أجل إيجاد الحل الأمثل لمسائل النقل بأقل كلفة ممكنة.

الاستنتاجات والتوصيات:

بالنتيجة ننصح الباحثين المهتمين بدراسة مسائل واقعية تؤول إلى مسائل نقل استخدام الخوارزمية المطورة في هذه المقالة، كونها تعطي الحلول المثلى لهذه المسائل، وبسرعة أكبر من الخوارزميات المدروسة.

المراجع:

[1]. الغباري، حسن حسني ؛ يونس، محمد ابراهيم. *سلسلة ملخصات شوم: نظريات ومسائل في بحوث العمليات*، ترجمة عن الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة، 408 ,1988.

[2]. السلوم، كمال. *بحوث العمليات (2)*، منشورات جامعة البعث، حمص، 523 ,2006.

[3]. بقجه جي، صباح الدين ؛ وزملائه. *بحوث العمليات*، ترجمة عن المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر، دمشق، 636 ,1998.

[4] . السلوم، كمال. *بحوث العمليات (1)*، منشورات جامعة البعث، حمص، 443 ,2005.

[5].MAROS, I. *A Generalized Dual Phase-2 Simplex Algorithm,* Departmental of Computing, Imperial College, London, Departmental Technical Report 2001/2, 26.

[6].ROZYCKI, R. *Constraint Aggregation Principle: Application to a Dual Transportation Problem,* IIASA, September 1995, 95-103.

[7]. TAHA, H. *Operations Research an Introduction*, Prentice Hall,1997, 916.

[8]. أبو عمشة، عُلى ؛ خنسة، وائل. *بحوث العمليات (1)*، منشورات جامعة دمشق، 223 ,2001.

[9]. JUNGNICKEL, D. *Graphs, Networks and Algorithms,* Springer, 1999, 589.