مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (29) العدد (4) 2007
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Sciences Series Vol. (29) No. (4) 2007

العلاقة بين معطيات التطبيقات المتقلصة المرافقة لتكراريات (Noor, Ishikawa, Mann)

الدكتور عدنان متيلج *

(تاريخ الإيداع 8 / 2 / 2007. قُبِل للنشر في 2007/5/14)

□ الملخّص □

ليكن X فضاء باناخ و $B \subset X$ ، $\phi \neq$، مغلقة، محدبة، محدودة، $0 \succ \varepsilon$ عدد محدد. ليكن $T, S : B \rightarrow B$ تطبيقين متقلصين تماماً ويحققان الشرط:

$$\|T\chi - S\chi\| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall \chi \in B$$

ولتكن q, p نقطتين ثابتتين لـ S,T على الترتيب. ضمن هذه المقالة نبحث في العلاقة التي تر بط بين معطيات هذين التطبيقين مستخدمين تكراريات:

(Mann ، Ishikawa، Noor). واستنتاج دور الوسطاء وحدود الخطأ المضافة إلى كلّ من التكراريات السابقة بهذه العلاقة.

كلمات مفتاحية: النقطة الثابتة -الصيغ التكرارية – التطبيقات المتقلصة.

* مدرس– كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية قسم العلوم الأساسية – جامعة تشرين– اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (29) العدد (4) 2007
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Sciences Series Vol. (29) No. (4) 2007

The Relation between Contractive Mappings Data Associated for (Mann, Ishikawa, Noor) Iterations

Dr. Adnan Mtelej [*]

(Received 8 / 2 / 2007. Accepted 14/5/2007)

□ ABSTRACT □

Let X be a banach space and $B \subset X$ nonempty, convex, closed, $\varepsilon \succ 0$ fixed number and T,S: B→B two contractive mappings with the condition:

$$\|T\chi - S\chi\| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall \chi \in B$$

Let: $p, q \quad Two \quad fixed \;\; po\text{int}\, s \;\; for\, T, S$. This paper studies the relation between two mappings data using (Mann, Ishikawa, Noor) iterations and concludes with the role parameters and the added error terms with this relation.

Keywords: Fixed points- iteration process - contractive mappings.

[*]**Associate Professor, Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Latakia, Syria.**

المقدمة:

ليكن X فضاء باناخ و $\phi \neq B \subset X$ مغلقة، محدبة، محدودة وليكن $T: B \to B$ تطبيقاً متقلصاً تماماً أي $\|T\chi - Ty\| \le \theta \ \|\chi - y\|$ $\forall \chi, y \in B$ و $\theta \in (0,1)$ عندئذ استناداً إلى مبدأ التطبيق المتقلص لـ باناخ فإن تكرارية Picard: $\chi_{n+1} = T\chi_n$

حيث $\chi_0 \in B$ و n=0,1,2,3,.... متقاربة نحو نقطة ثابتة لـ T.

بالطبع إذا لم يكن T متقلصاً تماماً فإن Picard ليست بالضرورة متقاربة مما دفع إلى البحث عن تكراريات أخرى مع شروط تقلص مختلفة لـ T.

فقد عرف (ISHIKAWA,1974) قانون تكراري جديد بالشكل:

$$\chi_{n+1} = (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n T y_n, \quad y_n = (1-\beta_n)\chi_n + \beta_n T\ X_n \qquad (1)$$

حيث $(\alpha_n),(\beta_n) \subset [0,1]$ و $\chi_0 \in B$ و n=0,1,2,3,....

إذا وضعنا في (1): $\beta_n = 0$ نحصل على تكرارية Mann

$$\chi_{n+1} = (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n T\chi_n \qquad (2)$$

ومن أجل $\alpha_n = \lambda$ تتحول تكرارية Mann إلى تكرارية Krasnoselskij التالية:

$$\chi_{n+1} = (1-\lambda)\chi_n + \lambda T\chi_n \quad ,$$

وإذا وضعنا في التكرارية الأخيرة $\lambda = 1$ نحصل على Picard.

أدخل (LIU,1995)على تكرارية Ishikawa حدود خطأ بالشكل:

$$\chi_{n+1} = (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n T y_n + u_n$$
$$y_n = (1-\beta_n)\chi_n + \beta_n T\chi_n + \nu_n$$

حيث: $\sum_n \|u_n\| \prec \infty$, $\sum_n \|\nu_n\| \prec \infty$ من الواضح أن حدود الخطأ تسعى هنا إلى الصفر عندما n تسعى إلى ∞ لذلك لا قيمة فعلية لهذه الحدود.

بعد ذلك عرف (XU,1998) نموذجاً اشمل يدعى:

(Ishikawa Iteration with errors) وذلك بالشكل:

$$\chi_{n+1} = a_n\chi_n + b_n T y_n + c_n u_n \qquad (3)$$
$$y_n = a'_n\chi_n + b'_n T\chi_n + c'_n \nu_n$$

حيث $(\nu_n),(u_n)$ اختياريتان في B وأن: $a_n + b_n + c_n = a'_n + b'_n + c'_n = 1$

علماً أن: $(a_n),(b_n),(c_n),(a'_n),(b'_n),(c'_n) \subset [0,1]$

وأخيراً عرف (NOOR,2000) نموذج تكراري من ثلاث مراحل كما يلي:

$$\chi_{n+1} = (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n T y_n$$
$$y_n = (1-\beta_n)\chi_n + \beta_n T Z_n \qquad (4)$$
$$Z_n = (1-\gamma_n)\chi_n + \gamma_n T\chi_n$$

حيث $(\gamma_n),(\beta_n),(\alpha_n)$ متتاليات عددية في المجال [0,1] .

تعدّ التكراريات (1)-(2)-(3) من المسائل التي حظيت باهتمام العديد من الباحثين خلال السنوات الأخيرة حيث يتم استخدامها في إيجاد الحلول التقريبية للكثير من المسائل التي تعود إلى الشكل: Tx = f (LIU.Z and UME.J.S)،كما تم إثبات تقارب هذه التكراريات نحو نقطة ثابتة لـT من اجل حالات تقلص مختلفة ومنها الحالة التي يكــون فيهــا متقلصــاً تمامــاً. أضــف إلــى ذلــك إمكانيــة برهــان تكافئهــا عنــد شــروط معينــة (RHOADES and SOLTUZ,2003). إلا أن سرعة التقارب نحو النقطة الثابتة تختلف من تكرارية إلى أخرى، فقد أثبت (BERINDE,2004) أن تكرارية Picard أسرع من تكرارية، Mannوبرهن BABU and VARA (PRASAD,2005) أن تكرارية Mann أسرع من تكرارية Ishikawa عندما يحققT شروط Zamfirescu وهي شروط تتضمن حالة التقلص التام، وكما هو ملاحظ فإن تكرارية Picard لا تحوي أي وسيط أما تكرارية Mann فتحوي وسيطاً واحداً هو α_n وتكرارية Ishikawa تحوي وسيطين اثنين هما α_n و β_n وهذا ما يدفع إلى القول إن وسطاء القوانين التكرارية تساهم في إبطاء عملية التقارب طرداً مع عددها، لكن هل تؤثر الوسطاء نفسها في العلاقة التي تربط بين معطيا ت التطبيقات للتكراريات السابقة؟ وهل لحدود الخطأ التي أضافها Xu دور في ذلك؟ هذا ما تهدف المقالة إلى الإجابة عنه.

تجدر الإشارة إلى أن دراسة العلاقة بين المعطيات ليست جديدة إذ نجدها في كتب التحليل وتحديداً عند استخدام تكرارية بيكارد – باناخ، وما نقوم به هنا هو استخدام الصيغ التكرارية: (1)، (2)، (3) ، (4) بدلاً من تكرارية Picard واستنتاج دور الوسطاء وحدود الخطأ المضافة أعلاه بتلك العلاقة.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى استنتاج العلاقة بين معطيات تطبيقين متقلصين عندما يرتبطان بعلاقة محددة وذلك باستخدام تكراريات ذات وسطاء مختلفة، وأيضاً في حال إضافة حدود خطأ ضمن شروط معينة إلى هذه التكراريات.

أساسيات:

نحتاج في البحث للقضيتين الآتيتين :

قضية (1): (SOLTUZ,2001) بفرض (t_n) متتالية تحقق المتراجحة الآتية:

$$t_{n+1} \leq (1-\lambda_n)t_n + \lambda_n \varepsilon$$

حيث: $\forall n \in N \quad \lambda_n \in (0,1) \quad , \sum \lambda_n = \infty$ ، ومن اجل $\varepsilon > 0$ محدد عندئذٍ:

$$0 \leq \lim \sup t_n \leq \varepsilon$$

قضية(2) : (BERINDE,2004) بفرض $\alpha_n \in [0.1] , \quad 0 < \delta < 1$ عندئذٍ:

$$\sum \alpha_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1-\alpha_K \delta) = 0$$

كما سنبرهن في القضية (3) أدناه أن تكرارية Noor تتقارب نحو نقطة ثابتة لـ T , أما بالنسبة لـ تكراريتي: Mannو Ishikawa فهما حالتان خاصتان لها:

قضية (3): بفرض X فضاء باناخ و $B \subset X \neq \phi$ محدبة، مغلقة، محدودة، وليكن $T: B \to B$ متقلصاً تماماً عندئذٍ التكرارية (4) مع الشرط $\sum_n \alpha_n = \infty$ متقاربة نحو نقطة ثابتة لـ T .

البرهان:إن وجود ووحدانية النقطة الثابتة تنتج من نظرية بيكارد – باناخ:.

نفرض إذاً $p = Tp$ ولنبرهن أن (4) متقاربة نحو p :

$$\|x_{n+1} - p\| = \| (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n Ty_n - p \| =$$
$$= \|(1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n Ty_n - (1-\alpha_n+\alpha_n)p\| \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\|\chi_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\| \le$$
$$\le (1-\alpha_n)\|\chi_n - p\| + \alpha_n\theta\|y_n - p\| \qquad (5)$$
$$\|y_n - p\| = \|(1-\beta_n)\chi_n + \beta_n TZ_n - (1-\beta_n+\beta_n)p\| \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|\chi_n - p\| + \beta_n\theta\|Z_n - p\| \qquad (6)$$
$$\|Z_n - p\| \le \| (1-\gamma_n) \|\chi_n - p\| + \gamma_n\theta\|\chi_n - p\| =$$
$$= [1-\gamma_n(1-\theta)]\|\chi_n - p\| \qquad (7)$$

نعوض (7) في (6) فنجد:

$$\|y_n - p\| \le \{1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta)))\}\|\chi_n - p\| \qquad (8)$$

نعوض (8) في (5) فنجد:

$$\|\chi_{n+1} - p\| \le \{1-\alpha_n(1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta)))))\}\|\chi_n - p\|$$

لكن: $0 < 1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta))) < 1$

وبالتالي: $\|\chi_{n+1} - p\| \le [1-\alpha_n(1-\theta)]\|\chi_n - p\| \le$

$$\le \{1-\alpha_n(1-\theta)\{1-\alpha_{n-1}(1-\theta)\}\|\chi_{n-1} - p\| \le \ldots$$
$$\le \prod_{K=1}^{n}\{1-\alpha_k(1-\theta)\}\|\chi_1 - p\|$$

واستناداً للقضية (2) ينتج أن: $\lim_{n\to\infty}\|\chi_{n+1} - p\| = 0$

وبالتالي: (χ_n) متقاربة نحو p .

النتائج والمناقشة:

فيما يلي نبحث عن طبيعة العلاقة بين المعطيات باستخدام القوانين التكرارية السابقة وذلك بمعالجة حالتين:

الحالة الأولى: التكراريات من دون حدود خطأ:

نظرية (4): بفرض X فضاء باناخ و $\phi \neq B \subset X$ محدبة، مغلقة، محدودة وليكن $\varepsilon > 0$ معطى. إذا كان T,S متقلصين تماماً و كان: $\forall \chi \in B \quad \|T\chi - S\chi\| \leq \varepsilon$ عندئذٍ:

$$\|p-q\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

حيث p و q نقطتان ثابتتان لـ S,T على الترتيب و $\theta \in (0,1)$ وأن $(u_n),(\chi_n)$ تكراريتان مرافقتان لهما ومعرفتان كما يلي:

$$\chi_{n+1} = (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_n T y_n \quad , \quad u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n S \nu_n \qquad (9)$$
$$y_n = (1-\beta_n)\chi_n + \beta_n T Z_n \quad , \quad \nu_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n S W_n$$
$$Z_n = (1-\gamma_n)\chi_n + \gamma_n T \chi_n \quad , \quad W_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n S u_n$$

وبحيث: $(\gamma_n),(\beta_n),(\alpha_n)$ متتاليات عددية في $[0,1]$ مع الشرط: $\sum_n \alpha_n = \infty$.

البرهان: باستخدام (9) إضافة لشروط النظرية نجد:

$$\|\chi_{n+1} - u_{n+1}\| \leq (1-\alpha_n)\ \|\chi_n - u_n\| + \alpha_n \|T y_n - S\nu_n\|$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|\chi_n - u_n\| + \alpha_n \|T y_n - S y_n\| + \alpha_n \|S y_n - S \nu_n\|$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|\chi_n - u_n\| + \alpha_n \varepsilon + \alpha_n \theta \|y_n - \nu_n\| \qquad (10)$$
$$\|y_n - \nu_n\| \leq (1-\beta_n)\|\chi_n - u_n\| + \beta_n \|T Z_n - S W_n\|$$
$$\leq (1-\beta_n)\|\chi_n - u_n\| + \beta_n \|T Z_n - S Z_n\| + \beta_n \|S Z_n - S W_n\|$$
$$\leq (1-\beta_n)\|\chi_n - u_n\| + \beta_n \varepsilon + \beta_n \theta \|Z_n - W_n\| \qquad (11)$$

بالمثل:

$$\|Z_n - W_n\| \leq (1-\gamma_n)\|\chi_n - u_n\| + \gamma_n \varepsilon + \gamma_n \theta \|\chi_n - u_n\| \qquad (12)$$

نعوض (12) في (11) فنجد:

$$\|y_n - \nu_n\| \leq \{1 - \beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta)))\}\|\chi_n - u_n\| + \ \beta_n \varepsilon (1+\theta\gamma_n) \qquad (13)$$

نعوض (13) في (10)

$$\|\chi_{n+1} - u_{n+1}\| \leq \{1 - \alpha_n(1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta)))))\}\|\chi_n - u_n\| + \qquad (14)$$
$$+ \alpha_n \varepsilon (1 + \beta_n \theta + \beta_n \gamma_n \theta^2)$$

بفرض: $\tau_n = \|\chi_n - u_n\|$ و $\lambda_n = \alpha_n [\ 1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta))))\ ]$

و $\sigma_n = \alpha_n \varepsilon (1 + \beta_n \theta + \beta_n \gamma_n \theta^2)$

كما هو واضح **فإن:** $\lambda_n \in (0,1)$,,,,,,,,,, $\sum \lambda_n = \infty$

سنقوم بحساب σ_n بدلالة λ_n وذلك كما يلي:

$$\sigma_n = \alpha_n \frac{\{1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta))))\}.\varepsilon(1+\beta_n\theta+\beta_n\theta^2)}{1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta))))} =$$

$$= \alpha_n(1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta))))).\frac{\varepsilon}{1-\theta} = \lambda_n \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

عندئذ تأخذ العلاقة (14) الشكل الأتي: $\tau_{n+1} \le (1-\lambda_n)\tau_n + \lambda_n \frac{\varepsilon}{1-\theta}$

واستناداً للقضية (1) ينتج أن: $0 \le \lim\sup \tau_n \le \frac{\varepsilon}{1-\theta}$

ومنه : $0 \le \lim_n \|\chi_n - u_n\| \le \frac{\varepsilon}{1-\theta}$

لكن: $\ell im \sup \tau_n = \ell im \sup \|x_n - u_n\| = \|p-q\|$

أي أن: $0 \le \|p-q\| \le \frac{\varepsilon}{1-\theta}$

ملاحظة (1): إذا وضعنا في العلاقة (14): $\gamma_n = 0$ نحصل على النتيجة نفسها $0 \le \|p-q\| \le \frac{\varepsilon}{1-\theta}$، علما أن التكرارية في هذه الحالة تصبح لـ Ishikawa .

ملاحظة (2): إذا وضعنا في العلاقة (14): $\beta_n = \gamma_n = 0$ نحصل على النتيجة ذاتها أيضا: $0 \le \|p-q\| \le \frac{\varepsilon}{1-\theta}$ أما التكرارية فهي لـ Mann .

الحالة الثانية: التكراريات مع حدود خطأ:

سنبحث فيما يلي عن العلاقة بين p,q بعد أن نضيف إلى التكراريات السابقة حدود خطأ وفقاً لشروط Xu:

لنفرض إذاً:

$$\chi_{n+1} = a_n\chi_n + b_nTy_n + c_np_n \quad , \quad u_{n+1} = a_nu_n + b_nSv_n + c_ne_n$$
$$y_n = a'_n\chi_n + b'_nT\chi_n + c'_nq_n \quad , \quad v_n = a'_nu_n + b'_nSu_n + c'_nw_n$$

حيث إن: $(w_n),(e_n),(q_n),(p_n)$ متتاليات اختيارية في B وإن الشروط الآتية محققة:

$$i)\ a_n + b_n + c_n = a'_n + b'_n + c'_n = 1 \quad , \quad (a_n),(b_n),(c_n),.....(c'_n) \subset [0,1]$$
$$ii)\alpha_n = b_n + c_n, \quad \beta_n = b'_n + c'_n \quad , \quad 0 \le \alpha_n < 1, \quad 0 \le \beta_n < 1, \quad \sum_n \alpha_n = \infty$$
$$iii)\sum_n c_n \prec \infty \quad , \quad \sum_n c'_n \prec \infty$$

عندئذ بالاستفادة من $i)$،$(i\,i)$ تتحول التكراريتان السابقتان إلى الشكل الآتي:

$$\chi_{n+1} = (1-\alpha_n)\chi_n + \alpha_nTy_n + c_n(p_n - \mathrm{T}y_n), \quad u_{n+1} = (1-\beta_n)u_n + \beta_nSv_n + c_n(e_n - Sv_n)$$
$$y_n = (1-\beta_n)\chi_n + \beta_nT\chi_n + c'_n(q_n - \mathrm{T}\chi_n), \quad v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_nSu_n + c'_n(w_n - Su_n)$$

وباستخدام العلاقتين الأخيرتين نجد:

$$\|\chi_{n+1} - u_{n+1}\| \le (1-\alpha_n)\|\chi_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Sv_n\| +$$
$$+ c_n\|Ty_n - p_n - Sv_n + e_n\| \le$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|\chi_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Sy_n\| + \alpha_n\|Sy_n - S\nu_n\| +$$
$$+ c_n\|Ty_n - p_n\| + c_n\|S\nu_n - e_n\|$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|\chi_n - u_n\| + \alpha_n\varepsilon + \alpha_n\theta\|y_n - \nu_n\| + 2M_1c_n \quad (15)$$

حيث: $M_1 = \max\{\sup\|Ty_n - p_n\|, \sup\|S\nu_n - e_n\|\}$

بالمثل:

$$(16)\quad \|y_n - \nu_n\| \leq (1-\beta_n)\|\chi_n - u_n\| + \beta_n\varepsilon + B_n\theta\|\chi_n - u_n\| + 2M_2c'_n$$

حيث: $M_2 = \max\{\sup\|Tx_n - q_n\|, \sup\|Su_n - w_n\|\}$

من (15) و (16) و بفرض: $M = \max\{M_1, M_2\}$ ينتج أن:

$$\|\chi_{n+1} - u_{n+1}\| \leq [\,1-\alpha_n(1-\theta(1-\beta_n(1-\theta)))\,]\|\chi_n - u_n\| + \quad (17)$$
$$+\alpha_n\varepsilon(1+\beta_n\theta) + 2M(c_n + \alpha_n\theta\, c'_n)$$

لكن: $c_n \leq \alpha_n$, $c'_n \leq \beta_n$ عندئذٍ وبعد التعويض في(17) نجد:

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \leq [1-\alpha_n(1-\theta(1-\beta_n(1-\theta)))]\|x_n - u_n\| + \alpha_n\varepsilon(1+\theta\beta_n) + 2M\alpha_n(1+\theta\,\beta_n)$$

$$= [1-\alpha_n(1-\theta(1-\beta_n) - \theta^2\beta_n)]\|x_n - u_n\| + \alpha_n(1+\theta\beta_n)(\varepsilon + 2M)$$

نضع: $\tau_n = \|x_n - u_n\|$ ، $\lambda_n = \alpha_n[1-\theta(1-\beta_n) - \theta^2\beta_n]$

$$\sigma_n = \alpha_n(1+\theta\beta_n)(\varepsilon + 2M)$$

لكن: $\lambda_n \in (0.1)$ و $\sum \lambda_n = \infty$

أما σ_n فيمكن التعبير عنها بدلالة λ_n كما يلي:

$$\sigma_n = [1-\theta(1-\beta_n) - \theta^2\beta_n]\ \frac{\alpha_n(1+\theta\beta_n)(\varepsilon + 2M)}{1-\theta(1-\beta_n) - \theta^2\beta_n} =$$

$$= \frac{\lambda_n(\varepsilon + 2M)}{1-\theta}$$

عندئذ يكون لدينا:

$$\tau_{n+1} \leq (1-\lambda_n)\tau_n + \lambda_n\frac{\varepsilon + 2M}{1-\theta}$$

واستناداً للقضية (1) ينتج أن:

$$0 \leq \ell im\sup \tau_n \leq \frac{\varepsilon + 2M}{1-\theta}$$

ومنه:

$$0 \leq \|p - q\| \leq \frac{\varepsilon + 2M}{1-\theta}$$

وبالانتقال إلى النموذج التكراري (Noor iteration With errors) المعرف بالشكل:

$$x_{n+1} = a_nx_n + b_nTy_n + c_np_n \qquad u_{n+1} = a_nu_n + b_nSv_n + c_ne_n$$

$$y_n = a'_n\,x_n + b'_n\,Tz_n + c'_n\,q_n \qquad \nu_n = a'_n\,u_n + b'_n\,Sw_n + c'_n\,r_n \quad (18)$$

$$z_n = a''_n\,x_n + b''_n\,Tx_n + c''_n\,\ell_n \qquad w_n = a''_n\,u_n + b''_n\,Su_n + c''_n\,k_n$$

حيث أن:

$$a_n + b_n + c_n = a'_n + b'_n + c'_n = a''_n + b''_n + c''_n = 1$$

$$a_n, b_n, c_n \quad a'_n, b'_n, c'_n \quad '...........c''_n \in (0,1)$$

والمتتاليات (p_n), (q_n), (ℓ_n),......... (k_n) اختيارية في المجموعة المحدودة B.

وبفرض: $\alpha_n = b_n + c_n \quad ,\beta_n = b'_n + c'_n \quad \gamma_n = b''_n + c''_n$

$$\sum \alpha_n = \infty \quad , \sum c_n < \infty \quad , \sum c'_n < \infty \quad , \sum c''_n < \infty$$

عندئذ نستنتج بمعالجة مماثلة للحالة السابقة أن: $0 \le \|p - q\| \le \dfrac{\varepsilon + 2M}{1 - \theta}$

علما أن M في هذه الحالة تأخذ الصيغة الآتية:

$$M = \max\{ \sup\|Tx_n - p_n\| \quad ,\sup\|Tz_n - q_n\| \ ,\sup\|Tx_n - \ell_n\| ,\sup\|S\nu_n - e_n\| ,$$

$$,\sup\|Sw_n - R_n\| ,\sup\|Su_n - k_n\|\}$$

أما إذا انتقلنا إلى النموذج (**Mann with errors**) فنحصل على العلاقة:

$$.\ 0 \le \|p - q\| \le \frac{\varepsilon + 2M}{1 - \theta}$$

إلا أن M هنا تمثل:

$$M = \max\{ \sup\|Tx_n - p_n\| \quad ,\sup\|S\nu_n - \ell_n\| \}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

نتيجة /1/: لا تتغير العلاقة بين المعطيات إذا استبدلنا تكرارية Mann ذات الوسيط α_n بتكرارية **Ishikawa** ذات الوسيطين β_n , α_n أو بتكرارية Noor ذات الوسطاء الثلاثة β_n, α_n, γ_n وبالتالي فان العلاقة المذكورة أعلاه مستقلة عن وسطاء تلك التكراريات مع العلم أن هذه الوسطاء نفسها تسهم في إبطاء عملية التقارب كما رأينا سابقاً.

نتيجة /2/: إذا أضفنا حدود خطأ إلى أي من التكراريات السابقة فان العلاقة التي تربط بين المعطيات تتغير وبما يتناسب مع حدود الخطأ المضافة وذلك على النحو الآتي:

$$0 \le \|p - q\| \le \frac{\varepsilon + 2M}{1 - \theta}$$

وكما رأينا فإن M تختلف في حالة Mann عن حالة Ishikawa وهذه تختلف عن حالة `Noor، وهكذا فإن الصيغة التي تربط بين المعطيات في حال إضافة حدود خطأ تبدو واحدة بالنسبة للتكراريات السابقة إلا أنها تختلف مضموناً.

ومن ثمَّ فان حدود الخطأ التي أضافها Xu تغير في علاقة الارتباط بين معطيات التطبيقات المتقلصة المرافقة للتكراريات: (1)، (2)، (3) ، (4) مع أنها لاتغير في نتيجة تقارب هذه التكراريات نحو النقط الثابتة لتلك التطبيقات. .

المراجع:

1. BABU, G. v. R and VARA PRASAD, K.N.V.V. *Mann iteration converges faster than Ishikawa iteration for the class of zamfirescu operators*. Hindawi-Volume 2006, Article, ID 49615, 2006, 1-6.
2. BERINDE,V. *Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators*. Fixed point theory and application 2004:2, 2004, 97-105.
3. ISHIKAWA, S. *Fixed points by anew iteration method*. proc. Amer. Math. Soc 44, 1974, 147-150
4. LIU, L.S. *Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. 194, 1995, 114-125
5. LIU, Z and UME,J.S. *Stable iteration schemes for local strongly pseudocontractios and nonlinear equations involving local strongly accretive operators*;Acta.Math.Acad. 21, 2005, 185-197
6. NOOR, M.A. *New approximation schemes for general* variational inequalities. J. Math Anal A ppl. 251, 2000, 217 - 229.
7. RHOADES,B.E. and SOLTUZ, S.M., *On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods*.IJMMS,2003:7,451-459
8. SOLTUZ,S.M. *Observations on some sequences supplied by inequalities*. Math comm6,2001,101-106
9. XU,Y. *Ishikawa and Mann iterative processes with errors for non linear accretive operator equations*. J. Math. Anal Appl. 224, 1998, 91-101.