مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (25) العدد (14)2003
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (25) No (14) 2003

الصيغ التربيعية والتقريب الأفضل

الدكتور محمد حسن دريباتي*

(قبل للنشر في 2003/9/18)

□ الملخّص □

نبني في هذه المقالة بعض الصيغ التربيعية المثلى، ونقوم بتطبيق تلك الصيغ لحساب قيمة تقريبية لتكامل محدد مع وزن. هذه الصيغ هي صيغ غوص – تشيبيشيف، وصيغ غوص– جاكوبي، ونثبت مبرهنة واحدة بهذا الخصوص. العقد x_k هي جذور الحدوديات :

$$T_n(x),\quad U_n(x),\quad J^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x),\quad J^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$$

حيث :

$T_n(x),\quad U_n(x)$ هـــي حـــدوديات تشيبيشـــيف مـــن النـــوعين الأول والثـــاني أمـــا $J^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x),\quad J^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$ – حدوديات جاكوبي .

نتعرف على التقريب الأفضل ونحصل على تقدير من الأعلى لخطأ الصيغة التربيعية بدلالة التقريب الأفضل .

كما نورد بعض الأمثلة كتطبيق للصيغ التي حصلنا عليها في حساب بعض الدوال الخاصة مثل دوال بسل $J_0,\quad J_1$ والتكاملات الناقصة .

* مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (25) العدد (14)2003
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (25) No (14) 2003

Quadrature Formulas and the Best Approximation

Dr. M.H.Drebati *

(Accepted 18/9/2003)

□ ABSTRACT □

In this paper we establish some best quadrature formulas and apply them to compute approximation value of definite integral with weight function.These formulas are Gauss – Chebyshev and Jacobi – Chebyshev formulas, we prove one theorem in relation with this topic .

The nodes x_k are roots of polynomials

$$T_n(x),\quad U_n(x),\quad J^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x),\quad J^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$$

where $T_n(x),\quad U_n(x)$ are Chebyshev polynomials of the first and second kind , $J^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x),\quad J^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$ - Jacobi polynomials

We define the best approximation and obtain above estimation for error of quadrature formula by means of the best approximation, we also give some examples for applying to the formulas which we obtained in the calculation of some special functions like Bessel functions and elliptic integrals.

* **Lecturer Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria**

مقدمة:

ترجع دراسة الصيغ التربيعية (Quadrature Formulas) من الشكل :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \qquad (1)$$

إلى القرن السابع عشر ، وقد أثبت الرياضي الروسي تشيبيشيف (Chebyshev) أنه عندما تكون $n \le 7$ عندئذ توجد العقد x_k (Quadrature nodes) التي تقع على مسافات متساوية فيما بينها بحيث من أجل أي حدودي $p_n(x)$ من الدرجة n على الأكثر تكون العلاقة التالية محققة :

$$\int_0^1 p_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k p_n(x_k) \qquad (2)$$

تم بعد ذلك تعميم الدراسة لتشمل الحالة التي تكون فيها n=9 ، أما من أجل n=8 فإن المسألة غير قابلة للحل [1] .

قادت سلسلة البحوث والدراسات إلى عدم وجود عقد x_k في المجال [0,1] بحيث تتحقق العلاقة (2) لأجل أي حدودي $p_n(x)$ وذلك عندما تكون $n \ge 10$، وتبين الدراسة أن المعاملات a_k تكون سالبة في صيغة نيوتن – كوتس (Newton-Cottes) التالية :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; x_k = \frac{k}{n} \qquad (3)$$

علاوة على ذلك تم إعطاء طريقة لبناء صيغة تربيعية من النمط (1) [1] ،بحيث تكون العلاقة (2) محققة من أجل جميع الحدوديات $p_n(x)$ ، كما أن المعاملات a_k والعقد x_k هي أعداد عادية.

درس الرياضي الروسي س. م ، نيكولسكي (Nikolskii,S.M,1950) مسألة أفضل صيغة تربيعية على صف دوال معطى m. حيث قادت سلسلة بحوثه إلى حل المسألة الآنفة الذكر من أجل بعض صفوف الدوال ، حيث كان قد أخذ الحد الأعلى الأصغري لخطأ الصيغة التربيعية (1) ودرس إمكانية أن يصبح هذا المقدار في نهايته الصغرى.

ليكن W^r صف الدوال f المعرفة على المجال [0,1] بحيث يحقق المشتق $f^{(r-1)}(x)$ على هذا المجال شرط ليبشتس (Lipschitz,s Condition) وتتحقق الشروط :

$$f^{(v)}(0) = o, \forall\ v = 0,1,..\, r-1$$

نعطي في الفقرة الأولى بعض التعاريف والمصطلحات إضافة إلى بعض التمهيديات المساعدة التي سنحتاجها في دراستنا .

أما في الفقرة الثانية ، فسندرس الصيغ التربيعية من نمط صيغ غوص – تشيبيشيف (Gauss-Chebyshev) وصيغ جاكوبي – تشيبيشيف (Jacobi- Chebyshev) وذلك من أجل الحساب التقريبي لتكامل الدالة f على المجال [1+، 1−] مع وزن w(x) أي التكامل من الشكل :

$$I(f) = \int_{-1}^{+1} w(x)\, f(x)\, dx \qquad (4)$$

*) تدعى الدالة غير السالبة $w(x)$ $\left(w(x) \geq 0\right)$ المعرفة على المجال [1+ ، 1−] دالة وزن Weight (Function) إذا كانت كمولة على هذا المجال.

نقوم في هذه الفقرة بإثبات مبرهنة واحدة تجمع الصيغ التربيعية من نمط غوص وعلاوة على ذلك نحصل على تقدير من الأعلى لخطأ الصيغة التربيعية بدلالة التقريب الأفضل (Best Approximation) للدالة f بحدوديات من الدرجة 2n-1.

I. تعاريف ومصطلحات ، تمهيديات مساعدة :

في الوقت الراهن من الممكن تقسيم مسائل نظرية التقريب إلى ثلاثة أنواع تعتبر بحد ذاتها الخطوات الأساسية لتطور مختلف الدراسات ولنبدأ بصياغة هذه المسائل في فضاء خطي منظم X [2] .

i) **المسألة الأولى :** هي تقريب عنصر مثبت $x \in X$ بدلالة مجموعة مثبتة F من الفضاء X .

نسمي المقدار الآتي :

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|$$

التقريب الأفضل للعنصر $x \in X$ بدلالة المجموعة $F \subset X$.

ii) تنحصر **المسألة الثانية:** من مسائل نظرية التقريب (Approximation theory) في كيفية تقريب مجموعة مثبتة m من الفضاء X بدلالة مجموعة مثبتة f من المجموعة F.

نضع في حالتنا هذه :

$$E(m, F) = \sup_{x \in m} E(x, F) = \sup_{x \in m} \inf_{u \in F} \|x - u\| \qquad (6)$$

iii) **المسألة الثالثة:** هي مسألة تقريب مجموعة مثبتة m من الفضاء X بدلالة صف مجموعات معطى $\{F\}$ من الفضاء X وبتعبير آخر إذا كان لدينا صف مجموعات ما F عندئذ يطلب اختيار مجموعة ما من هذه المجموعات بحيث يكون انحرافها عن المجموعة m أصغر ما يمكن [2] .

نرمز بـ $W^r H^\alpha[-1,+1]$ لصف جميع الدوال f من الصف $C^r[-1,+1]$ والتي من أجلها يحقق المشتق $f^{(r)}(x)$ الشرط الآتي [1]:

$$\left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y) \right| \leq |x - y|^\alpha \qquad ; \quad 0 < \alpha \leq 1$$

*) تسمى كل عبارة من الشكل :

$$S_n\left(f, x_k\right)=\sum_{k=1}^{n} A_k\, f\left(x_k\right) \qquad (7)$$

وذلك من أجل الحساب التقريبي للتكامل $I(f)$ الوارد في العلاقة (4) بصيغة تربيعية (Quadrature Formula)، وتسمى النقاط x_k من المجال $[-1,+1]$ عقد الصيغة التربيعية (7) (Quadrature nodes)، أما المعاملات A_k وهي معاملات موجبة تدعى أوزانا أو أثقالا (Weights) حيث k=1,2,...,n [3] .

نكتب من أجل الحساب التقريبي للتكامل $I(f)$ العلاقة الآتية :

$$I(f)=\int_{-1}^{+1} w(x)\, f(x)\, dx = S_n(f)+R_n(f)$$

حيث :

$R_n(f)$ خطأ الصيغة التربيعية (7) (Truncation Error).

تدعى الصيغة التربيعية (7) صيغة دقيقة أو مضبوطة (Precision Formula) من أجل جميع الحدوديات $P_n(x)$ من الدرجة n على الأكثر إذا تحققت المطابقة الآتية :

$$I(P_n)=\int_{-1}^{+1} w(x).P_n(x)dx \equiv \sum_{k=1}^{n} A_k P_n(x_k) \qquad (8)$$

وذلك أيا كان اختيارنا للعقد x_k من المجال $[-1,+1]$.

لتكن $\alpha = 1$ عندئذ نضع $W^r H^1[-1,+1]=W_\infty^{r+1}[-1,+1]$

ولتكن :

$$V_{n-1}(f,\lambda^*,x)=\frac{Co}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{K\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{K\pi}{2n}.C_k.T_k(x)\right) \qquad (9)$$

هي متتالية λ^* − متوسطات مجموع فورييه . تشيبيشيف للدالة f حيث $f \in W_\infty^1[-1,+1]$ عندئذ أثبت الرياضي الروسي (Nikolskii,S.M 1946) صحة التمهيديتين الآتيتين [4]:

تمهيدية مساعدة (1) (Lemma) : إذا كان $V_{n-1}(f,\lambda^*,x)$ هو λ^* − المتوسط الحسابي لمجموع فورييه . تشيبيشيف عندئذ تتحقق بانتظام المتراجحة الآتية :

$$\left| f(x)-V_{n-1}(f,\lambda^*,x) \right| \le \frac{\pi}{2n}.\sqrt{1-x^2} \qquad (10)$$

وذلك أيا كانت $f \in W_\infty^1[-1,+1]$

تمهيدية مساعدة (2) : لتكن $B_r(t)$ دالة برنولي (Bernoulli Function) [4] و $\tau_{n-1}(t)$ حدودي مثلثي من المرتبة n-1 عندئذ تتحقق من اجل كل ε من المجال $[o,\pi]$ العلاقة الآتية :

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\left|B_r(t)-\tau_{n-1}(t)\right|dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \qquad (11)$$

وذلك عندما تنتهي n إلى اللانهاية .

ينتج عن التمهيدية (2) تحقق العلاقة الآتية :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|B_r(t)-\tau_m(t)\right|dt=\frac{K_r}{(m+1)^r},\ \forall\ m=0,1,\ldots \qquad (12)$$

حيث K_r ترمز لثوابت فافار (Favard's constant)

نقدم في التمهيدية المساعدة الآتية صيغة عامة تعتبر تعميماً لمطابقة كريستوفل (Christoffl's Identity) المعروفة [5].

تمهيدية مساعدة (3) : إذا كانت الدالتان $f_i(x),\ f_i(y)$ تحققان من أجل أي عددين مثبتين x,y مجموعة العلاقات الآتية :

$$2xf_i=f_{i-1}+f_{i+1},\ 2yh_i=h_{i-1}+h_{i+1},\ \forall\ i=0,\pm1\ldots \qquad (13)$$

عندئذ من أجل أي عددين صحيحين k,n حيث $k\le n$ تتحقق المطابقة الآتية :

$$2(x-y)\sum_{i=k}^{n}f_ih_i=f_{k-1}h_k-f_kh_{k-1}+f_{n+1}h_n-f_nh_{n+1} \qquad (14)$$

الإثبات :

لأجل إثبات التمهيدية نستخدم فرضية الاستقراء الرياضي .

إذا كانت n=k فإن الطرف الأيمن من العلاقة (14) يكتب استناداً إلى العلاقات (13) على النحو الآتي :

$$f_{k-1}h_k-f_kh_{k-1}+f_{k+1}h_k-f_kh_{k+1}=(f_{k-1}+f_{k+1})h_k-f_k(h_{k-1}+h_{k+1})=$$
$$=2xf_kh_k-2yf_kh_k=2(x-y)f_kh_k$$

الأمر الذي يؤدي إلى أن العلاقة (14) صحيحة من أجل n=k

نبدل في العلاقة (14) كل n بـ n+1 عندئذ يكون الحد الأخير من الطرف الأيسر مساوياً لـ :

$$f_nh_{n+1}-f_{n+1}h_n+f_{n+2}h_{n+1}-f_{n+1}h_{n+2}=(f_n+f_{n+2})h_{n+1}-f_{n+1}(h_n+h_{n+2})=$$
$$=2xf_{n+1}h_{n+1}-2yf_{n+1}h_{n+1}=2(x-y)f_{n+1}h_{n+1}$$

لما كانت المطابقة صحيحة من أجل n=k فإننا مع اعتبار المساواة الأخيرة نستطيع أن نكتب :

$$2(x-y)\sum_{i=k}^{n}f_ih_i+2(x-y)f_{n+1}h_{n+1}=f_{k-1}h_k-f_kh_{k-1}+f_{n+2}h_{n+1}-f_{n+1}h_{n+2}$$

بالتالي :

$$2(x-y)\sum_{i=k}^{n+1}f_ih_i=f_{k-1}h_k-f_kh_{k-1}+f_{n+2}h_{n+1}-f_{n+1}h_{n+2}$$

مما يدل على أن العلاقة (14) صحيحة من أجل القيمة n+1 ، وبالتالي حسب فرضية الاستقراء الرياضي يتم المطلوب إثباته .

نتيجة (1) :

لتكن $T_n(x),U_n(x)$ حدوديات تشيبيشيف من النوعين الأول والثاني على الترتيب [4] عندئذٍ نحصل في حالة خاصة عندما $f_i(y)=T_i(y)\ ,\ f_i(x)=T_i(x)\ ,k=0$ على المطابقة الآتية :

$$(x-y)+2(x-y)\sum_{i=1}^{n}T_i(x)T_i(y)=T_{n+1}(x)T_n(y)-T_n(x)T_{n+1}(y)$$

أما إذا كانت $k=0$ و $f_i(y)=U_i(y)\ ,\ f_i(x)=U_i(x)$

فإننا استناداً إلى المطابقة (14) يكون لدينا :

$$2(x-y)\sum_{i=0}^{n} U_i(y)\ U_i(x) = U_{n+1}(x)U_n(y) - U_n(x)U_{n+1}(y) \qquad (16)$$

II–دراسة العلاقة بين الصيغ التربيعية والتقريب الأفضل :

نبني في هذه الفقرة الصيغ التربيعية من نمط غوص إذ أن هذه الصيغ تتميز بدرجة عالية من الدقة. كما نثبت العلاقة بين خطأ الصيغ التربيعية والتقريب الأفضل بحدوديات من الدرجة 2n-1. لنضع أمامنا المسألة الآتية :

إذا كان n عدداً طبيعياً معطى عندئذٍ كيف يمكن اختيار العقد x_k من المجال [1+ ، 1−] والمعاملات $A_k\ ,\ \forall\ k=1,2,\dots\dots,n$ لأجل أن تكون الصيغة التربيعية (7) دقيقة من أجل جميع الحدوديات من أعلى درجة ممكنة ؟ إن حل المسألة يعني تعيين 2n من الوسطاء هي العقد X_k والمعاملات A_k في الصيغة الواردة في العلاقة (7). بناءً عليه يكون الحدودي $P_{2n-1}(x)$ من الدرجة 2n-1 على الأكثر هو الحدودي الذي يطلب تعيينه. تعطي المبرهنة الآتية جواباً واضحاً وصريحاً على السؤال المطروح :

مبرهنة (1) : إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون النقاط x_k من المجال [1+ ، 1−] عقداً للصيغة التربيعية (7) هو أن تكون هذه النقاط جذوراً للحدودي $P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$ المتعامد مع كل الحدوديات P_k $(k\le n)$ بالوزن $w(x)$ علاوة على ذلك ممكن حساب المعاملات A_k وفق العلاقات الآتية :

$$A_k=\int_{-1}^{+1} w(x)\left[\frac{P(x)}{P'(x)(x-x_k)}\right]^2 dx \qquad (i)$$

وتوجد نقطة واحدة على الأقل c في المجال [1+ ، 1−] بحيث يكون :

$$R_n(f)=\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1} w(x).\left[P(x)\right]^2 dx\ ,-1\le c\le +1 \qquad (ii)$$

وبدلالة التقريب الأفضل للدالة f بحدوديات من الدرجة 2n-1 نحصل على التقدير الآتي :

$$(iii)\ \left|R_n(f)\right|\le 2E_{2n-1}(f)\int_{-1}^{+1} w(x)dx$$

الإثبات :

ليكن $H(x)$ حدودي استيفاء هرميت (Hermite's Interpolation) للدالة f عندئذٍ يعطى الحدودي $H(x)$ [5, pp. 65-69] على النحو الآتي :

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[1-2L_k'(x_k)(x-x_k)\right]\left(L_k(x)\right)^2 f(x_k)+(x-x_k)\left(L_k(x)\right)^2 f'(x_k)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} A_k\ f(x_k)+B_k\ f'(x_k)$$

حيث $L_k(x)$ حدودي الاستيفاء للاغرانج (Lagrange's Interpolation) المعرف بالعلاقة :

$$L_k(x)=\frac{P(x)}{(x-x_k)P'(x_k)}$$

نفرض أن الصيغة (7) هي صيغة دقيقة من أجل الحدودي $H(x)$ وبناءً عليه يكون:

$$\int_{-1}^{+1} w(x)H(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\left[A_k f(x_k)+B_k f'(x_k)\right]$$

نأخذ بعين الاعتبار شروط الاستيفاء لـ هرميت فيكون لدينا :

$$f(x)-H(x)=k[P(x)]^2 ; k=\text{constant}$$

ونعرف الدالة المساعدة G على النحو الآتي :

$$G(x)=f(x)-H(x)-k[P(x)]^2$$

تنعدم هذه الدالة ومشتقتها في النقاط x_k أي أن :

$$G(x_k)=G'(x_k)=0 \qquad \forall\ k=1,2,...........n$$

لتكن $\bar{x}_k$ نقطة من المجال $[x_1,x_n]$ تحقق $H(\bar{x}_k)=0$ بالتالي يكون :

$$k=\frac{f(\bar{x}_k)-H(\bar{x}_k)}{[P(\bar{x}_k)]^2} \qquad (a)$$

توجد استناداً إلى مبرهنة رول (Rolle's Theorem) نقطة مثل x=c ينعدم من أجلها المشتق أي $G^{(2n+2)}(c)=0$.

بالاشتقاق يكون :

$$f^{(2n+2)}(c)-2k(n+1)!=0 \Rightarrow k=\frac{f^{(2n+2)}(c)}{2(n+1)!} \qquad (b)$$

نحصل بمقارنة العلاقتين (a) و (b) بعد تبديل $\bar{x}_k$ بـ x و n+1 بـ n على العلاقة:

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.[P(x)]^2$$

نضرب العلاقة الأخيرة بالوزن $w(x)$ ونكامل على المجال $[-1,\ +1]$ فنحصل من أجل الخطأ R_n لصيغتنا التربيعية (7) على العلاقة :

$$R_n(f)=\int_{-1}^{+1} w(x)[f(x)-H(x)]dx=$$

$$=\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1} w(x)[P(x)]^2 dx$$

وهي العلاقة (ii) المطلوب إثباتها .

ننتقل إلى إثبات العلاقة (i) الواردة في نص المبرهنة (1) .

لما كان :

$$(x-x_k)L_k(x) = \frac{P(x)}{P'(x_k)}$$

فإنه يكون :

$$B_k = \int_{-1}^{+1} w(x)(x-x_k).L_k^2(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} w(x)\frac{P(x)}{P'(x_k)}.L_k(x)dx$$

$$= \frac{1}{P'(x_k)}.\int_{-1}^{+1} w(x)P(x).\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)dx = 0$$

حيث الحدودي $P(x)$ متعامد مع جميع الحدوديات من درجة أقل من درجته وبالتالي يكون :

$$B_K = 0, \quad \forall k$$

أما من أجل الأوزان A_k فإننا نكتب :

$$A_k = \int_{-1}^{+1} w(x)\left[1-2L'_k(x)(x-x_k)\right]L_k^2(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} w(x)L_k^2(x)dx - 2L'_k(x_k).B_k$$

$$= \int_{-1}^{+1} w(x)L_k^2(x)dx$$

وبناءً عليه نكتب :

$$A_k = \int_{-1}^{+1} w(x)\left[\frac{P(x)}{(x-x_k)P'(x_k)}\right]^2 dx$$

بذلك تم إثبات العلاقة (i) من المبرهنة (1) .

نقدم في التمهيدية الآتية تعميماً للتمهيدية المساعدة (1) الواردة في هذا العمل.

هذه التمهيدية تلزمنا لإثبات العلاقة (iii) من المبرهنة (1) وفيما يلي نص التمهيدية وإثباتها :

تمهيدية مساعدة (4) :

لتكن f دالة تنتمي إلى الصف $W^r H^1[-1, \ +1]$ عندئذ ممكن بناء متتالية من الحدوديات المثلثية $(g_{n-1}(f, x))$ تتعلق خطياً بالدالة f وتتحقق بانتظام المتراجحة الآتية :

$$\left| f(x) - g_{n-1}(f, x) \right| \le \frac{k_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + 0\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

حيث k_r ثوابت فافار $\left(\text{Favard's Constants}\right)$ $[2,\ p.66]$

الإثبات (proof) :

إذا كانت $r=1$ فإننا نحصل على العلاقة (10) الواردة في التمهيدية المساعدة (1)، لتكن $r=2,3,\ldots$ و $f\in W^r H^1[-1,\ +1]$

بحيث يكون : $f^{(i)}(0)=0 \qquad \forall\, i=1,2,3,4,\ldots,r-1$

نضع $x=\cos t$ بالتالي يكون :

$$f(x)=f(\cos t)=\varphi(t)$$

$$\varphi'(t)=-f'(\cos t).\sin t$$

$$\varphi''(t)=(-1)^2 f''(\cos t).\sin^2 t-f'(\cos t).\cos t$$

بشكل عام يكون :

$$\varphi^{(r)}(t)=(-1)^r f^{(r)}(\cos t).\sin^r t+h_r(t)$$

وعلاوة على ذلك :

$$h_r(t)=\sum_{k=0}^{r-1} a_k(t)\, f^{(k)}(\cos t)$$

حيث $a_k(t)$ _ حدوديات مثلثية .

إن الحدودي المثلثي المعطى وفق حدوديات مثلثية $t_{m,r}$ من المرتبة m [راجع 2] :

$$\frac{a_0}{2}+\frac{(-1)^r}{\pi}\int_0^{2\pi} t_{m,r}(t-u)f^{(r)}(\cos u)\sin^r u\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t_{m,r+1}(t-u)h_r'(u)\,du$$

هو حدودي زوجي أياً كانت $r=1,2,\ldots$ ويتعلق خطياً بالدالة f .

عندئذٍ استنادا إلى علاقة $\varphi^{(r)}(t)$ الواردة أعلاه نحصل من أجل الدالة الدورية φ ذات الدور 2π على التمثيل الآتي :

$$\varphi(t)=f(\cos t)=\frac{a_0}{2}+\frac{(-1)^r}{\pi}\int_0^{2\pi} B_r(u)f^{(r)}[\cos(t-u)]\sin^r(t-u)\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{r+1}(u)h_r'(t-u)\,du$$

بالتالي نستطيع أن نكتب :

$$f(\cos t) - g_{n-1}(f,\cos t) = \frac{(-1)^r}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(B_r(u) - \tau_{n-1,r}\right) f^{(r)}[\cos(t-u)]\sin^r(t-u)\,du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[B_{r+1}(u)+\tau_{n-1,r+1}\right] h'_r(t-u)\,du =$$

$$= I_n + \bar{I}_n$$

لما كانت h'_r دالة محدودة عندئذٍ استناداً إلى العلاقة (12) يكون لدينا :

$$\left|\bar{I}_n\right| \le \frac{k_{r+1}}{(n-1+1)^{r+1}}.M_r = M_r.\frac{k_{r+1}}{n^{r+1}}$$

لدينا $\left|f^{(r)}(\cos(t))\right| \le 1$ وبالتالي بتقدير I_n يكون لدينا :

$$|I_n| \le \frac{|\sin^r t|}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|B_r(u) - \tau_{n-1,r}(u)\right|du +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|B_r(u) - \tau_{n-1,r}(u)\right|.\sum_{u=1}^{r}\binom{r}{u}(|\sin u|)^{r-u}\,du =$$

$$= \frac{k_r}{n^r}|\sin^r t| + 0\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

حيث يكون لدينا استنادا إلى العلاقة (11) من التمهيدية المساعدة (2) ما يلي :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|B_r(u) - \tau_{n-1,r}(u)\right|.\sum_{u=1}^{r}\binom{r}{u}(|\sin u|)^{r-u}\,du =$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

نبدل في علاقة الفرق $f - g_{n-1}$ نحصل على :

$$\left|f(\cos t) - g_{n-1}(f,\cos t)\right| \le \frac{k_r}{n^r}|\sin^r t| + 0\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

نعوض عن $\cos t = x$ في العلاقة الأخيرة ينتج أن :

$$\left|f(x) - g_{n-1}(f,x)\right| \le \frac{k_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + 0\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

وهي العلاقة المطلوب إثباتها .

ينتج عن التمهيدية المساعدة (4) انه إذا كانت n كبيرة بما فيه الكفاية ومن أجل أي دالة f من الصف $W^r H^1[-1,+1]$ تتحقق المتراجحة الآتية :

$$\left| f(x) - g_{n-1}(f,x) \right| \le E_n\left(W^r H^1[-1,+1]\right) = \frac{k_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r$$

لتكن $H(x) = g_{n-1}$ بالتالي من أجل خطأ الصيغة التربيعية (7) يكون لدينا :

$$|R_n(f)| = \left|\int_{-1}^{+1}[f(x)-H(x)]dx\right| \le 2\int_{-1}^{+1} w(x)dx . E_{2n-1}(f)$$

بهذا يتم إثبات المبرهنة (1).

ندرس فيما يلي ثلاث حالات خاصة من المبرهنة (1).

الحالة الأولى :

ليكن الوزن :

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

عندئذ تكون العقد x_k هي جذور $T_n(x)$ [6] :

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) = \cos nt; \quad \arccos x = t \quad , |x| \le 1$$

بناء عليه يكون :

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}.\pi , \quad \forall k=1,2,.....n, \forall n>0 \text{ ، } A_k = \frac{\pi}{n}$$

بالتالي:

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}.\pi\right) \qquad (1)$$

عند ذلك:

$$R_n(f) = \frac{\pi . f^{(2n)}(c)}{(2n)!2^{2n-1}} \qquad (2)$$

$$|R_n(f)| \le 2\pi . E_{2n-1}(f) \qquad (3)$$

ليكن P عددا بسيطا (Simple Number) حيث $(2<P)$ عندئذ يكون :

$$S_{pn}(f) = \frac{1}{p}S_n(f) + \bar{S}_{pn}(f); \quad \bar{S}_{pn}(f) = \frac{\pi}{pn}\sum_{k} f(x_k)$$

هذا يعني أن العقد x_k للصيغة (1) تكون عقدا للصيغة $\bar{S}_{pn}(f)$ وحيث $1 \le k \le pn$, $2k \ne 1(\mathrm{mod}\ p)$ حيث $2k$ لا توافق (Incongruent) العدد 1 بالنسبة للمودول p [7] .

الحالة الثانية :

ليكن الوزن:

$$w_2(x)=\sqrt{1-x^2}$$

تكون في هذه الحالة عقد الصيغة التربيعية (7) هي جذور $U_n(x)$ (Chepyshev Polynomial of the second Kind):

بالتالي يكون :

$$x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\quad \forall\, n\geq 0,\quad \forall\, k=0,1,2,.....,n+1$$

$$A_k=\frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}$$

وبالتالي :

(1)

$$S_n(f)=\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}\, f\left(\cos\frac{k.\pi}{n+1}\right)$$

$$R_n(f)==\frac{\pi.f^{(2n)}(c)}{(2n)!2^{2n+1}},\quad \forall\quad -1\leq c\leq +1 \qquad (2)$$

$$\left|R_n(f)\right|\leq \Pi.E_{2n-1}(f) \qquad (3)$$

ليكن m عددا صحيحا حيث $2\leq m$ ولنضع :

$$S_{m(n+1)-1}(f)=\frac{1}{m}S_n(f)+S^*{}_{m(n+1)-1}(f)$$

حيث:

$$S^*_{m(n+1)-1}(f)=\frac{\pi}{m(n+1)}\sum_{i}\sin^2\frac{i\pi}{m(n+1)}.\, f\left(\cos\frac{i\pi}{m(n+1)}\right)$$

$$i\neq 0(\bmod m),\quad 1\leq i\leq m(n+1)-1$$

فإذا كانت m=2 فإننا نحصل على ما يلي :

$$S_{2n+1}(f)=\frac{1}{2}S_n(f)+S^{*}_{2n+1}(f)=$$

$$=\frac{1}{2}S_n(f)+\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\frac{2i-1}{2(n+1)}.\, f\left(\cos\frac{(2i-1)}{2(n+1)}\pi\right)$$

حيث مما يسهل ملاحظته أن العقد في المجموع الثاني من العلاقة الأخيرة تتطابق مع جذور حدودي تشيبيشيف $T_{n+1}(x)$.

الحالة الثالثة :

ليكن الوزن $w_3(x)$ حيث :

$$w_3(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

عندئذ:

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}$$

العقد x_k المعرفة اعلاه هي جذور حدودي جاكوبي (Jacobi) – $J_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$

المعرف بالعلاقة :

$$J_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2^n\sin\frac{t}{2}},\quad t=\arccos x$$

$$A_k=\frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\qquad \forall\ k=1,2,3,\dots,n \qquad (1)$$

بالتالي:

$$S_n(f)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\ f\left(\cos\frac{2k.\pi}{2n+1}\right) \qquad (2)$$

$$R_n(f)==\frac{\pi}{(2n)!2^{2n}}.\, f^{(2n)}(c),\quad \forall\quad -1\le c\le +1 \quad (3)$$

$$\left|R_n(f)\right|\le 2\pi.E_{2n-1}(f) \qquad (4)$$

تدل علاقة الخطأ أن الصيغة التربيعية الواردة في العلاقة (2) هي صيغة دقيقة من أجل جميع الحدوديات من الدرجة 2n-1 على الأكثر.

علاوة على ذلك فإن الصيغ الواردة في الحالتين الأولى والثانية هي أيضا صيغ دقيقة من أجل جميع الحدوديات من الدرجة 2n-1 على الأكثر .

ملاحظة : إذا كان الوزن $w_3(x)$ معرف بالعلاقة :

$$w_3(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

عندئذ نجري تغييرا في المتحول بوساطة العلاقة $y=-x$ حيث يكون لدينا :

$$J_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)=(-1)^n J_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{\cos\frac{2n+1}{2}t}{2^n\cos\frac{t}{2}},\quad t=\arccos x$$

نعرض في نهاية هذا العمل طريقة لتطبيق الصيغ التربيعية الثلاث التي حصلنا عليها في حساب بعض الدوال الخاصة مثل دوال بسل J_0, J_1 وبعض التكاملات الناقصية.

مثال 1 :

احسب دالة بسل $J_0(z)$ بتطبيق إحدى الصيغ الثلاث .

الحل :

ليكن $n=2m+1$ عدداً فردياً عندئذ لما كانت الدالة المكاملة هي دالة زوجية وباستخدام الصيغ التربيعية (1) (الحالة الأولى) نحصل على :

$$J_0(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+1}\frac{\cos zx}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2m+1}\left[1+2\sum_{k=1}^{m}\cos\left[z\cos\left(\frac{2k-1}{2(2m+1)}\pi\right)\right]\right]$$

مثال 2 :

نطبق الصيغة التربيعية (1) (الحالة الثانية) من أجل حساب قيمة تقريبية للتكامل $J_1(z)$ حيث $n=2m+1$ عندئذ نحصل بعد الدالة المكاملة زوجية على ما يلي :

$$J_1(z)=2\frac{z}{\pi}\int_0^{+1}\cos zx.\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{z}{2m+2}\left[1+2\sum_{k=1}^{m}\left\{\sin^2\frac{k\pi}{2m+2}.\left[z\cos\left(\frac{k\pi}{2m+2}\right)\right]\right\}\right]$$

مثال 3 :

ندرس الآن التكاملات الناقصية (Elliptic Integrals) حيث $0<k<1$ الآتية:

$$K(k)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$E(k)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(k)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-x^2}}$$

نطبق لحساب مثل هذه التكاملات الصيغة التربيعية (1) (الحالة الأولى) حيث $w_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

وبفرض أن $n=2m+1$ عددا فرديا .

عندئذ بالأخذ بعين الاعتبار أن الدالة المكاملة في كل مرة هي دالة زوجية نحصل بعد أن نضع :

$$\beta_i=\cos\frac{2i-1}{2(2m+1)}\pi$$

على قيم التكاملات الناقصية وذلك كما يلي :

$$K(k)\approx\frac{\pi}{2(2m+1)}\left[1+2\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\beta_i}}\right]$$

$$E(k)\approx\frac{\pi}{2(2m+1)}\left[1+\sum_{i=1}^{m}\sqrt{1-k^2\beta_i}\right]$$

$$D(k)\approx\frac{\pi}{2(2m+1)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i^2}{\sqrt{1-k^2\beta_i^2}}$$

أخيراً إن تطبيق الصيغ التربيعية الواردة في هذا العمل يسمح ببناء متتالية عددية تتقارب من قيم الدوال (التكاملات) التي نجري حسابها .

المراجع:

....

1- نيكول سكي ، س. م. (Nikolskii, S.M) ، 1988 الصيغ التربيعية ، الطبعة الرابعة ، موسكو " Nauka" الاتحاد السوفياتي سابقاً ، 5–12. (In Russian).

2- كورنيشوك ، ن. ب ، 1976 – المسائل القصوى في نظرية التقريب ، موسكو "Nuka" الاتحاد السوفياتي سابقاً ، 11–16 (In Russian)

3- MATHEWS, JOHN .H 1994 Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering ,California state University, Fullerton ,U.S.A pp 346-399 .

4- كورنيشوك ، ن. ب. 1987 ثوابت دقيقة في نظرية التقريب ، موسكو " Nauka " الاتحاد السوفياتي سابقاً ، 193–198 (In Russian).

5- SCHEID, F.1968 – SCHAUM'S OUTLINE OF THEORY AND PROBLEMS OF NUMERICAL ANALYSIS – MCGRAW – HIL BOOK Com Pany ,New York,st. Louis,san Francisco,Toronto,sy dney,pp 130-145 .

6- هيمنغ ، ر ، 1976 – الطرائق العددية للعلميين والمهندسين ، منشورات وزارة التعليم العالي ، دمشق ، ترجمة الدكتور فوزي دنان. 408– 401 .

7- Oystein Ore. 1948 – Number Theory and Its History Mc Graw – Hill. Dorer PUBLICATIONS, INC. New York.

8- عودة ، نبيه ، 1998 – التحليل العددي ، الطبعة الأولى ، منشورات جامعة دمشق.

9- بوجلايف ، و. ب. 1990 – الرياضيات الحسابية والبرمجة ، موسكو ، المدرسة العالية ، الاتحاد السوفياتي سابقاً (In Russian) .