مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (23) العدد (10) 2001

Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol (23) No (10) 2001

دراسة أحد أشكال الارتباط للعمليات العشوائية الخطية

الدكتور أحمد الوسوف

(قبل للنشر في 2000/9/12)

□ الملخّص □

إن هذا العمل يدرس نوعاً من الارتباط للعملية العشوائية الخطية غير الثابتة المتلاشية ذات الرتبة المنتهية $X(t) = e^{itA}x_0$ *(* A *مؤثر محدود) التي هي حل للمسألة الابتدائية:*

مع عملية معلومة u(t) *مطبقة على مدخل جملة فيزيائية مفتوحة بالمعادلات :*

$$\frac{dX(t)}{dt} + AX(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha u_\alpha(t) g_\alpha$$

$$v_\alpha(t) = u_\alpha(t) - i\sum_{\alpha=1}^{r} (X(t), g_\alpha)$$

$$X(t)\Big|_{t=o} = o$$

حيث:

$$u_\alpha(t) = (u(t), a_\alpha);\ v_\alpha(t) = (v(t), a_\alpha)$$

وحساب مشتق تابع الارتباط للعملية العشوائية X(t) *بدلالة طيفها في حالتين:*

1. *عندما يكون طيف المؤثر* A *منقطع.*
2. *وفي حالة طيف* A *متجمع في الصفر (مؤثر فولتير).*

واحتوى العمل مثالاً لعمليتين مترابطتين.

*مدرس في قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين–الاذقية–سورية

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (23) العدد (10) 2001

Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol (23) No (10) 2001

A Study of Correlation of Unstationary Linear -Random Processes

Dr. Ahmad Al Wassouf*

(Accepted 12/9/2000)

☐ ABSTRACT ☐

This work studies a kind of correlation of the declining unstationary -linear random processwhich is a solution of the differential Equation (A is abounded operator) $X(t) = e^{itA} x_0$ with boundede rank :

with known process u(t) applied on the entry of open -physical system .
with the equations:

$$\frac{dX(t)}{dt} + AX(t) = \mathring{a}_{a=1}^{r} \underset{a}{e} u_a(t) g_a$$

$$v_a(t) = u_a(t) - i\mathring{a}_{a=1}^{r}(X(t), g_a)$$

$$X(t)\Big|_{t=o} = o$$

$$u_a(t) = (u(t), a_a);\ v_a(t) = (v(t), a_a)$$

The derivative of The correlation function . was calculated for the process X(t) in two cases:

1) The spectre of A is discrete.

2) Spectre of A concentrated on zero (Volterr 's operator) .

This work contained an example of two correlation random processes.

* **Lecturer at Mathematics Depatment,Faculty of sciences,Tishreen University , Lattakia Syria**

مقدمة:

انبثقت نظرية العمليات العشوائية من نظرية الاحتمالات وقد كان لهذه النظرية تطبيقات كثيرة وخاصة في مجال الراديو والحركة الذاتية.

الموضوعات الرئيسية في نظرية العمليات العشوائية:

أولا –أولى مهام نظرية العمليات العشوائية هي بناء أنموذج رياضي يسمح بتعريف دقيق للعملية العشوائية ودراسة الخواص الأساسية لهذا الأنموذج .

ثانيا –المسألة الثانية هي تقسيم العمليات العشوائية إلى صفوف .

ثالثا–البحث عن جهاز تحليلي لمختلف صفوف العمليات العشوائية يعطي إمكانية حساب الصفات الاحتمالية للعمليات العشوائية مثل توابع الارتباط ،التوقع الرياضي.

رابعا –إيجاد عدد من القضايا التي تلعب دورا" هاما" في صياغة بعض أجزاء نظرية العمليات العشوائية والتي لها مسائل تطبيقية هامة .الشكل العام لهذه المسائل يتضمن في تحسين قيمة تابعية محدودة لهذه العملية بواسطة قيم علاقات تابعية أخرى لنفس العملية.

خامسا–من المسائل الهامة في نظرية العمليات العشوائية هي دراسة تحويلات مختلفة لهذه العمليات .هذه التحويلات تستخدم للحصول على عمليات عشوائية أبسط(استخدام مؤثرات التماثل مثلا")[1].ولدراسة التحويلات الخطية للعمليات العشوائية يمكن استخدام نظرية المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية حيث تدخل العمليات العشوائية .

إن الراديو والتطبيقات الإلكترونية يعدان الساحتان الأساسيتان لاستخدام نظرية العمليات العشوائية الثابتة بالمفهوم الأوسع ،وعمليات غوص .وكذلك تستخدم العمليات الثابتة بالمفهوم الأوسع وعمليات ماركوف في علم الضبط.

وفي الاقتصاد والبيولوجيا تستخدم نماذج مختلفة من عمليات ماركوف، وفي النظرية الجزئية للغازات تستخدم عملية الحركة البيرونية.

في هذا العمل استخدمنا مفهوم العقد المؤثراتية [2 ، 3 ، 4] التي تعرف رياضياً على النحو التالي: بأنها التركيب (A, H, φ, E, μ) والذي يحقق العلاقة $2I_m A = \varphi^{+}\varphi$ حيث $A: H \to H$ مؤثر خطي محدود و $\varphi: H \to E$

و $J: E \to E$ $J = J^*, J^2 = J$, $\varphi^{+} = \varphi^{*} J$, و $\mu(u,v) = (Ju,v)_E$ حيث $(Ju,v)_E$ هو الجداء الداخلي في فضاء هلبرت E ويمكن تمثيلها على النحو:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\frac{1}{i}(A-A^*)"'] & E \arrow[d, "\varphi^{+}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

وهي حالة خاصة من العقد المترية. يوجد ارتباط كبير بين مؤثراتها والجمل الفيزيائية المفتوحة [3] التي نعبر عنها رياضياً بالمعادلات:

$$i\frac{dX}{dt} + AX(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_{\alpha}\, u_{\alpha}(t)\, \gamma_{\alpha}$$

$$X|_{t=0}=0$$
$$v_\alpha(t)=u_\alpha(t)-i\,(X(t),g_\alpha)$$

حيث:

$$v_\alpha(t)=(v(t),a_\alpha) \quad \text{و} \quad u_\alpha(t)=(u(t),a_\alpha)$$

إن $u(t)\in E$ تسمى عملية قنالية والمتجهات القنالية g_α $(\alpha=1,\dots,r)$ هي متحولات عشوائية غير مترابطة $\left(E\,|g_\alpha|^2=|w_\alpha|\right)$. وهذا الارتباط يبنى على أساس أنه إذا تغيرت طاقة الجملة المفتوحة عندما تتحرك فيمكن إيجاد فضاء يلعب دور النافذة $E=(2I_m A)H$ حيث $\dim E=r<\infty$ يتم التبادل من خلالها مع الوسط الخارجي بواسطة الأقنية $g_\alpha \in H$ و $\alpha=1,\dots,r$ للمؤثر A والتي تحقق دائماً العلاقة:

$$(2I_m A)h=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} e_\alpha\,(h,g_\alpha)\,J_{\alpha\beta}\,g_\beta$$

إن e_α يأخذ القيمتين ± 1 و $J=\begin{pmatrix} I_P & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ حيث I_P , I_q مصفوفتان واحديتان من القياس $P\times P$ و $q\times q$ علماً أن $P+q=r$.

إن قيمة العقد المؤثراتية ليس فقط أنها تحتوي المؤثر الذي يعطي الحركة و أيضا تحوي النافذة الموافقة.

لقد استخدمنا في الدراسة طيف المؤثرات غير المرافقة لنفسها [5]، الشكل المثلثي (8)، (13) في الحالتين عندما يكون طيف المؤثر منقطعا ومتجمعا في الصفر على الترتيب والشكل العام (7)، (12) في هاتين الحالتين على الترتيب أيضاً.

إن دراسة العمليات العشوائية من المرتبة الثانية من خلال توابع الارتباط أو مشتقاتها تفتح إمكانية كبيرة لتطبيقها في بعض المسائل الخطية .ولذلك قام العديد من الباحثين في إيجاد هذه التوابع لكثير من *صفوف هذه العمليات أمثال:*

وغيرهم . Gekhman [6],Nieme[7],Kolmagorov,Livshts …

لقد تم في الفصل الثالث من العمل [1] دراسة نوع من العمليات المترابطة $X(t)=e^{itA}x_0$ مع العمليات المرافقة لها $\bar{X}(t)=e^{-it\bar{A}^*}f_0$، أما هذا العمل فيدرس نوعاً أخر من الترابط بين عملية u(t) على مدخل جملة فيزيائية وعملية داخلية x(t).

موضوع البحث:

لتكن العملية العشوائية الخطية المتلاشية ذات الرتبة المنتهية $X(t)=e^{iAt}x_0$ المحققة للمسألة الابتدائية:

$$\begin{aligned} & i\frac{dX(t)}{dt}+AX(t)=o \\ & X(t)\Big|_{t=o}=o \end{aligned} \qquad (1)$$

المترابطة مع العملية u(t) المطبقة على مدخل الجملة المفتوحة[2],[3] :

$$i\frac{dX(t)}{dt} + AX(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha u_\alpha(t)\gamma_\alpha$$
$$X\big|_{t=0} = 0 \qquad (2)$$

$$v_\alpha(t) = u_\alpha(t) - i\,(X(t), \gamma_\alpha)$$

$$u_\alpha(t) = (u(t), a_\alpha);\ v_\alpha(t) = (v(t), a_\alpha)$$

و $\{a_\alpha\}$ أساس للفضاء $E = (I_m A)H$ و $\dim E = r < \infty$ و $I_m A$ هو الجزء التخيلي للمؤثر A. لنحسب مشتق تابع الارتباط (EKF) للعملية $X(t)$ بدلالة طيفها والذي أدخله Livshts لأول مرة في سبعينيات القرن العشرين [2] وهو الذي يلعب دوراً هاماً في دراسة العمليات الشعوائية وتصنيفها.

إن حل المعادلة (2) الخطية له الشكل التالي[5]:

$$X(t) = -i\int_0^t e^{iA(t-s)} \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha u_\alpha(t)\gamma_\alpha\, ds \qquad (3)$$

إن EKF لهذا الحل يعطى بالعلاقة

$$w(t,s) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)(X(t), X(s)) = \left(-\frac{dX(t)}{dt}, X(s)\right) - \left(X(t), \frac{dX(s)}{ds}\right)$$
$$= \left(i\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha u_\alpha(t)\gamma_\alpha - iAX(t), X(s)\right) + \left(X(t), i\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha u_\alpha(s)\gamma_\alpha - iAX(s)\right)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha \Theta_\alpha(t).\bar{\Theta}_\alpha(s) + i\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha \cdot u_\alpha(t)\bar{\Theta}_\alpha(s) - i\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha \bar{u}_\alpha(s)\Theta_\alpha(t), \quad (4)$$

حيث

$$\Theta_\alpha(t) = (X(t), \gamma_\alpha) = -i\sum_{\beta=1}^{r}\varepsilon_\beta \int_0^t (e^{iA(t-s)}\gamma_\beta, \gamma_\alpha)u_\beta(s)\,ds$$

باستخدام العلاقة التالية [4]:

$$e^{iA(t-s)} = \frac{i}{2\pi}\oint_\Gamma e^{i\lambda(t-s)} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \qquad (5)$$

نجد:

$$\Theta_\alpha(t) = \int_0^t \sum_{\beta=1}^{r}\varepsilon_\beta \oint_\Gamma e^{i\lambda(t-s)}\left((A-\lambda I)^{-1}\gamma_\beta^{\times}, \gamma_\alpha^{\times}\right)u_\beta(s).d\lambda\ .ds$$

أن $\Theta_\alpha(t)$ يمكن حسابه تبعا" لنوع طيف المؤثر A ،أي تبعاً لنوع العملية العشوائية $X(t)$.

سنحسب $\Theta_\alpha(t)$ عندما يكون لـA طيف منقطع فقط وعندما يكون لـ A طيف متجمع في الصفر فقط.

الحالةالأولى: إذا كان للمؤثر A طيف منقطع فقط و A مؤثر بسيط متلاش تماما" .

ان الصف $\Delta_r(L(A))$: يعرف بأنه مجموعة التركيبات $(A, H, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r)$ التي فيها A مؤثرا" متلاشيا" تماما" و $L(A)$ الطيف غير الحقيقي للمؤثر A .

بما أن A يحقق هذه الخواص فيمكن أن ندخله في التركيب [2] :

$$(A, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r; I)$$

المنتمي للصف $\Delta_r(L(A))$. بمساعدة القيم الذاتية للمؤثر A نبني تركيبا عاما $\Theta(L)$ من الصف $\Delta_r(L(A))$ [3]: فيكون:

$$\Theta_r(L) = (A^{\cdot}, H^{\cdot}, \gamma_1^{\cdot}, \gamma_2^{\cdot}, ..., \gamma_r^{\cdot}; I) \qquad (7)$$

حيث:

$$A^{\cdot} = A_1^{\cdot} \oplus A_2^{\cdot} \oplus ... \oplus A_r^{\cdot} \qquad (7)$$

(أي يحلل إلى مجموع r مؤثراً كل منها مقصور $A^{\cdot}$ على الفضاء الذاتي الموافق لـ λ_i)

و $I_r = I \oplus I \oplus ... \oplus I$ و $H^{\cdot} = l^2 \oplus ... \oplus l^2$

أي أن كل من l^2 و I مجموع مع نفسه r مرة و l^2 هو فضاء المتتاليات العددية اللانهائية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المحققة للشرط $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ و $\gamma_k^{\cdot} = (0,...,\gamma_1^{\cdot},0,...,0)$ علما" أن $\gamma_1^{\cdot}$ هي المركبة k لـ $\gamma_k^{\cdot}$.

عندئذ $A_1^{\cdot}$ معرف على l^2 بالعلاقة التالية [2] :

$$[A_1^{\cdot} f]_k = \lambda_k f_k + i\sum_{i=k+1}^{N} f(j)\beta_k\beta_j \qquad (8)$$

حيث:

$$\lambda_k = \alpha_k + i\frac{\beta_k^2}{2}$$

و

$$\left((A-\lambda I)^{-1}\gamma_\beta^{\cdot}, \gamma_\alpha^{\cdot}\right) = \begin{cases}0, & \alpha\neq\beta\\ ((A-\lambda I)^{-1}\gamma_i, \gamma_i), & \alpha=\beta\end{cases}$$

و $\gamma_1^{\cdot} = (\beta_1, \beta_2, ...)$

ان

$$\left((A_1-\lambda I)^{-1}\gamma_1^{\cdot},\gamma_1^{\cdot}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k f_k(k)$$

حيث[4]:

$$f_\lambda(k) = \frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}\prod_{i=k+1}^{N}\frac{\lambda-\bar{\lambda}_j}{\lambda-\lambda_j}$$

$$\Theta_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{\alpha k}(t) \qquad (9)$$

حيث

$$P_{\alpha K}(t)=i\varepsilon_\alpha\sum_{q=k}^{N}\beta_k^2\frac{\prod_{j=k}^{N}(\lambda_q-\lambda_j^-)}{\prod_{j=k}^{N}(\lambda_q-\lambda_j)}\int_0^t u_\alpha(s)e^{i\lambda_q t}ds \qquad ,q\neq j$$

الحالة الثانية: عندما يكون لـA طيف متجمع في الصفر .

نعرف الصف $C_r(L)$ بأنه مجموعة كل التركيبات $(A,H,\gamma_1,...,\gamma_r;I)$ ،التي من أجلها

يكون طيف المؤثر A متجمع في الصفر فقط و $2sp(I_m A)\le L$.

ندخل المؤثر A في التركيب $(A,H,\gamma_1,...,\gamma_r;I)$

حيث و $\alpha=1,...,r$ و

$\{a_\alpha\}$ أساس للفضاء الخطي الهلبرتي $E=(2I_m A)H$ و $\omega_\alpha=E|\gamma_\alpha|^2$

ندخل تركيباً عاماً من الصف $C_r(l,\alpha)$ وهنا التركيب هو:

$$\Theta_r(l,\alpha)=(B^\cdot,H^\cdot,\gamma_1^\cdot,\gamma_2^\cdot,...,\gamma_r^\cdot;I_r) \qquad (10)$$

حيث

$I_r=I\oplus I\oplus...\oplus I$ مجموع I مع نفسها r مرة

$$H^\cdot=L^2\oplus...\oplus L^2 \qquad \mathbf{(11)}$$

مجموع L^2 مع نفسه r مرة، و

$$B^\cdot=A^\cdot\oplus...\oplus A^\cdot \qquad (12)$$

مجموع $A^\cdot$ مع نفسه r مرة

و $\gamma_j^\cdot=(0,...,\gamma_1^\cdot,0,...0),\ j=1,...,r$

علما" أن $\gamma_1^\cdot$ هي المركبة j للعنصر $\gamma_j^\cdot$.

أن $A^\cdot$ هو الشكل المثلثي للمؤثر A المعرف على الفضاء $H^\cdot$ [1] :

$$A^\cdot f(x)=i\int_x^l f(x).q(x).q^*(x)\,dx \qquad \mathbf{(13)}$$

حيث $\varphi_\alpha(x)\in L^2_{(0,l)},\ q(x)=\|\varphi_1^-(x),...,\varphi_r^-(x)\|$

و

العناصر القنالية $g_\alpha^{\cdot}(x) = \varphi_\alpha(x)$ و $0 \le x \le l$.

عندئذ باستخدام العبارة (5) نجد

$$\Theta_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \sum_{\beta=1}^{r} \varepsilon_\beta \oint_\gamma e^{i\lambda(t-s)}\left((A^{\cdot}-\lambda I)^{-1} g_\beta^{\cdot}, g_\alpha^{\cdot}\right)\cdot u_\beta(s)\,ds \qquad (14)$$

حيث, γ منحن مغلق يحوي $\lambda = 0$.

ونجد ايضا"

ولذلك

أي أن:

(15)

حيث J_1 هو تابع بيسل من المرتبة الأولى.

الخاتمة: إن ما سبق يمكن أيجازه بالنظرية التالية:

نظرية : اذا كان المنحني $X(t)$ من الفضاء الهلبرتي H مرتبطاً مع المنحني $u(t)$ بالعلاقة

$$X(t) = -i\int_0^t e^{iA(t-s)} \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha u_\alpha(t)\, g_\alpha\, ds$$

فإن لـ EKF الشكل

$$w(t,s) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \Theta_\alpha(t)\cdot\bar{\Theta}_\alpha(s) + i\sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha u_\alpha(t)\cdot\Theta_\alpha(t) - i\sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \bar{u}_\alpha(s)\Theta_\alpha(t)$$

لـ $\Theta_\alpha(t)$ الشكل $\Theta_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{\alpha k}(t)$ عندما يكون الطيف منقطع والشكل

عندما يكون الطيف متجمعاً في الصفر.

مثال: يوضح بناء عملية عشوائية ترتبط مع $x(t)$ بالعلاقة (3):

لنأخذ المنحني $y(t)$ المحقق للمسألة الابتدائية:

$$\begin{aligned} & a_1(t)\cdot y'(t) + a_0(t)\, y(t) = 0 \\ & y(t)\big|_{t=0} = y_0 \end{aligned} \qquad (16)$$

و $E y_0 = 0$

لنأخذ $y(t)$ على $t \geq 0$ أي نأخذ:

(17)

ولنأخذ التابع $q^{\backslash}(t) = d(t)$ عندئذ

$$\overset{+}{y}^{\backslash} = d(t).y(t) + q(t).y'(t) = d(t)\, y_0 + q(t).y'(t), \qquad (18)$$

لنضرب العلاقة(16) بـ $q(t)$ فنجد

$$q(t).a_1(t).y'(t) + q(t)\,a_0(t).y(t) = 0, t > 0$$

أي

$$q(t).a_1(t).y^{\copyright}(t) + a_0(t).\overset{+}{y}(t) = 0$$

من (18) نجد أن

وبالتالي:

وبما أن فان :

$$a_1(t)\,\dot{\overset{+}{y}} + a_0(t)\,\overset{+}{y}(t) = a_1(0)\, y_0 d(t) = z(t)$$

أي نرمز بـ $z(t)$ لـ $a_1(t).y_0.d(t) = a_1(0).d(t).y_0$.

لنأخذ العملية العشوائية $X(t)$ المرتبطة خطيا" مع $z(t)$ بالمعادلة:

$$\frac{dX(t)}{dt} + a.X(t) = z(t), \qquad (19)$$

عندئذ نرى أن حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة

$$X(t) = e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}.z(s)ds$$

حيث التكامل $\int_0^t e^{-a(t-s)} z(s)ds$

موجود بمفهوم التقارب بالمتوسط التربيعي

و $Ez(t) = 0, \quad K_{zz}(t,s) = d(t).\bar{d}(s).J_0^2$

حيث $J_0^2 = E\left|y_0\right|^2$

إن أهمية هذا العمل تكمن في دراسة خواص عملية عشوائية X(t) مرتبطة مع عملية u(t) لا تساوي الصفر على مدخل الجملة المفتوحة ولهذا تطبيقات في مجال الراديو وأجهزة الاستقبال الأخرى.

المراجع:

....

1. الوسوف .أحمد التحويلات الخطية للمنحنيات في فضاءات هلبرت . اطروحة الدكتوراة جامعة خاركوف 1990 (مترجم للغة العربية).

2. Livshts M.S. ,Iancewich A.A. Theory of operator colligation in Hilbert space // J. wiley N.- Y, 1979.

3. ليفشتس م.س . مؤثرات الأمواج المهتزة - الجمل المفتوحة إصدار دار العلم موسكو (باللغة الروسية) 1966.

4. برودسكي م. س. الأشكال الجوردانية والمثلثية للمؤثرات غير المرافقة لنفسها دار العلم موسكو 1969(باللغة الروسية).

5. غيخبرغ ،. م.غ. كرين مدخل في نظرية المؤثرات غير المرافقة لنفسها إصدار دار العلم 1965 (باللغة الروسية).

6. غيخمن ي.ي. سكاراخود أ. نظرية العمليات العشوائية الجزء الثالث إصدار دار العلم 1973 (باللغة الروسية).

7. Niemi N. on the linear prediction problem of certain non- stationary stochastic processes – Math. Scand., 1976. 39 P 146-160.