مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (23) العدد (10) 2001

Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol (23) No (10) 2001

دراسة حول تأثير الحركة الحرارية لإلكترونات البلازما المتجانسة والمتماثلة المناحي على سماحية عازليتها الكهربائية

الدكتور سليمان صالح الخضر *

(قبل للنشر في 2000/9/7)

□ الملخّص □

يهدف البحث الراهن إلى تعيين سماحية العازلية الكهربائية للبلازما المتجانسة والمتماثلة المناحي عند أخذ الحركة الحرارية لإلكتروناتها بعين الاعتبار.

فبعد استخراج سماحية العازلية وتعيين علاقة التبدد، تمّ برهان فقدان البلازما حالة الاعتدال الكهربائي من جراء تأثير الاضطراب المطبق بفعل موجة كهرطيسية مستوية غير كبيرة السعة، ودراسة تغير الكثافة الحجمية للشحنة المتشكلة بتغير الزمن، والتأكد من صحة هذه الدراسة من خلال تحقق قانون انحفاظ الطاقة الكلية.

---

* أستاذ في قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (23) العدد (10) 2001

Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol (23) No (10) 2001

A STUDY ABOUT THE THERMAL EFFECT MOTION OF THE ELECTRONS OF HOMOGENOUS AND ISOTROPIC PLASMA ON ITS DIELECTRIC PERMITTIVITY

Dr. S.S., EL-KHADR*

(Accepted 7/9/2000)

□ ABSTRACT □

The aim of the present work, is to determine the dielectric permittivity of homogenous and isotropic plasma, where its thermal motion electrons is taken into consideration.

After obtaining the dielectric permittivity and the dispersion relation, we proved the existance of plasma – loss to the electric neutrality, by applying a disturbance (of not – so – wide amplitude) of an external-plane electromagnetic wave. Also we have studied the volume density variation of the formed charge-via-time, confirming this study from the verification of the total energy conservation law.

*** Professor at Department of Physics, Faculty of Sciences Tishreen University, L attakia, Syria**

مقدمة:

على الرغم من أن البحوث التي تناولت بالدراسة تعيين سماحية العازلية الكهربائية للبلازما في حالاتها المختلفة كثيرة جداً[1−6]، فإن معظمها تبدأ هذه الدراسة بصياغة تتسورية للمعادلات المادية (Material equations)، التي تعكس الفعل المتبادل بين المادة والحقل وتستخدم المعادلة الحركية(Kinetic equation) بأشكالها الملائمة[4−6] للحصول على المعلومات التي تحدد سلوك البلازما.

إن الدخول إلى هذه المسألة من هذا الباب يتطلب معرفة واسعة في بعض المسائل الرياضية واتقاناً في تفسير النتائج وتوضيح المعنى الفيزيائي، الذي غالباً ما يكون مستتراً في عبارات رياضية محكمة الصياغة إلى درجة يصعب التوصل منها إليه.

من الطبيعي ألاّ تحول دقة وشمولية الطرائق المتبعة في الأعمال العلمية المشار إليها أعلاه دون إمكانية استخدام طرائق أخرى بسيطة، حتى لو كانت هذه الطرائق الأخيرة أقل دقة، لكن بشرط أن تعطي نتائج تقريبية جيدة واضحة المعنى ولا يحتاج استخدامها إلى الولوج بعيداً في المسائل الرياضية، وهذا هو ما نهدف إليه في العمل العلمي الراهن، الذي يتضمن عرض طريقة بسيطة لمعالجة إحدى مسائل البلازما واستخلاص مجموعة من النتائج، التي نرى أن التوصل إلى بعضها قد يكون عملاً غير عديم الفائدة.

الطريقة المتبعة:

يعين نصف القطر المتجه $\vec{R}(t)$ ، الذي يحدد موضع الجسيم المشحون في البلازما التي يؤثر فيها الحقل الكهربائي لموجة كهرطيسية بالشكل التالي:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \vec{R}_1(t), \qquad (1)$$

علماً أن $\vec{R}_0$ و $\vec{V}_0$ موضع الجسيم وسرعته على الترتيب في البلازما المعتدلة (التي لا يؤثر فيها حقل خارجي)، أما $\vec{R}_1(t)$ فترمز إلى حدٍ آخر يجب إضافته عند الأخذ بعين الاعتبار الاضطراب الناتج عن تأثير الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية الخارجية المؤثرة. وبافتراض أن حركة الجسيم المشحون حركة غير نسبية يتم فيها إهمال الحقل المغناطيسي، واعتبار $\vec{V}_0$ بمثابة السرعة الحرارية.

إذا كان الحقل الكهربائي للموجة المستوية المؤثرة من الشكل:

$$\vec{E}(t,\vec{R}) = \vec{E}_0 \exp\left[i\left(\vec{k}.\vec{R} - \omega t\right)\right] \qquad (2)$$

كانت معادلة حركة الجسيم المشحون من الشكل التالي:

$$m\ddot{\vec{R}}_1 = q\vec{E}_0 \exp\left\{i\left[\vec{k}\left(\vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + .\vec{R}_1\right) - \omega t\right]\right\} \qquad (3)$$

ومن الملاحظ أن هذه المعادلة معادلة غير خطية بالنسبة للمتحول $\vec{R}_1$ ، لذلك نلجأ بهدف التبسيط إلى معالجة التقريب الأول فيها، وفي هذا التقريب يتم إهمال تابعية المقدار النبري للمتحول $\vec{R}_1$ [1]، عندئذٍ يمثل حل هذه المعادلة حركة اهتزازية قسرية:

$$\vec{R}_1 \approx -\frac{q}{m}\frac{\vec{E}_0 \exp\left\{i\left[\vec{k}.\vec{R}_0 - \left(\omega - \vec{k}.\vec{V}_0\right)t\right]\right\}}{\left(\omega - \vec{k}.\vec{V}_0\right)^2}. \qquad (4)$$

وتكون سرعة الجسيم المشحون مساوية:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + i\frac{q}{m}\frac{\vec{E}_0 \exp\left\{i\left[\vec{k}.\vec{R}_0 - \left(\omega - \vec{k}.\vec{V}_0\right)t\right]\right\}}{\left(\omega - \vec{k}.\vec{V}_0\right)}. \qquad (5)$$

يرتبط تباعد كل من الصيغتين (4) و(5) عندما $\vec{K}.\vec{V}_0 = \omega$ بعدم دقة هذه المعالجة في هذه الحالة، وحتى نستبعد هذا

التباعد نفترض أن البلازما لا تحتوي على جسيمات مشحونة تتحرك بسرعات تحقق هذه الحالة (حالة التجاوب Resonance Case). أو بتعبير آخر نستبعد من الدراسة الراهنة الجسيمات المشحونة التي تساوي سرعاتها سرعة الطور $V_\varphi = \omega / k$ (phase Velocity)، ونفترض أن الجسيمات تتحرك بسرعات أصغر من هذه السرعة(*).

تعين كثافة التيار $\vec{j}_1(t,\vec{r})$ الناتج عن حركة جسيم مشحون واحد، سرعته الابتدائية $\vec{V}_0$، ونصف القطر المتجه، الذي يحدد موضعه الابتدائي $\vec{R}_0$، باستخدام تابع دلتا (δ) لديراك (Dirac delta function) بالشكل:

$$\vec{j}_1(t,\vec{r}) = q\vec{V}(t)\delta\left(\vec{r} - \vec{R}(t)\right). \tag{6}$$

علماً أن $\vec{V}(t)$ سرعة الجسيم المشحون في النقطة $\vec{r} = \vec{R}(t)$.

أما كثافة التيار الكلي $\vec{j}(t,\vec{r})$ فيتطلب تعيينها معرفة تابع توزع (Distribution function) الجسيمات المشحونة تبعاً لسرعاتها. فإذا فرضنا أن هذا التابع هو $f(\vec{V}_0)$ عند عدم وجود اضطراب خارجي مؤثر، فإننا نحصل على هذه الكثافة بضرب العبارة (6) بكل من $f(\vec{V}_0)$ وبعدد الجسيمات المشحونة التي سرعاتها الابتدائية $\vec{V}_0$، والموجودة في الحجم العنصري $d\vec{R}_0$، ومن ثم بإجراء المكاملة من أجل جميع القيم الممكنة لكل من $\vec{R}_0$ و $\vec{V}_0$:

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = nq\int \vec{V}(t)\delta\left(\vec{r} - \vec{R}(t)\right) f(\vec{V}_0)(d\vec{V}_0)(d\vec{R}_0). \tag{7}$$

علماً أن n تركيز (Concentration) الجسيمات المشحونة.

نبدأ بإجراء المكاملة بالنسبة للإحداثيات: من الواضح أن مضمون تابع دلتا في الصيغة (7) يتعلق بشكل غير مباشر بالإحداثي $\vec{R}_0$، عندئذٍ باستخدام المتحول: $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \vec{R}_1(t,\vec{R}_0)$ بمثابة متحول جديد للمكاملة، وبإجراء تحويل جاكوب (Jacobe transform) بدقة حتى حدود المرتبة الأولى للحقل $\vec{E}$، نجد أن:

$$(d\vec{R}_0) = \frac{\partial(R_{0x}, R_{0y}, R_{0z})}{\partial(R_x, R_y, R_z)}(d\vec{R}) \cong (1 - i\vec{k}.\vec{R}_1)(d\vec{R}). \tag{8}$$

بعدئذٍ يمكن إجراء المكاملة بالنسبة للمتحول $(d\vec{R})$ باستخدام خواص تابع دلتا دون مصادفة أية صعوبة، فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن $\vec{R}_0$ معينة بالشكل (4) نجد أن:

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = nq\int\left[\vec{V}_0 + i\frac{q}{m}\frac{\vec{E}}{(\omega - \vec{k}.\vec{V}_0)} + i\frac{q}{m}\frac{\vec{V}_0(\vec{k}.\vec{E})}{(\omega - \vec{k}.\vec{V}_0)^2}\right] f(\vec{V}_0)(d\vec{V}_0) \tag{9}$$

تجدر الإشارة إلى أن النقطة $\vec{K}.\vec{V}_0 = \omega$ لا تعتبر هنا نقطة شاذة في العبارة الموجودة تحت التكامل، لأن $f(\vec{V}_0)$ تكون عندئذٍ مساوياً الصفر في هذه النقطة.

بإجراء النشر بدلالة النسبة $\frac{V_0}{V_\varphi} = \frac{k}{\omega}V_0$ مع افتراض أن سرعات الجسيمات المشحونة صغيرة بالمقارنة مع سرعة الطور ($V_0 << V_\varphi$)، وبالاحتفاظ بالحدود حتى المرتبة الثانية للنسبة المذكورة من هذا النشر، نجد أن عبارة كثافة التيار تؤول إلى الشكل التالي:

$$\vec{j}(t,\vec{r}) \approx nq\int\left\{\vec{V}_0 + i\frac{q}{m\omega}\vec{E}\left[1 + \frac{(\vec{k}.\vec{V}_0)}{\omega} + \frac{(\vec{k}.\vec{V}_0)^2}{\omega^2}\right] + i\frac{q}{m}\frac{\vec{V}_0(\vec{k}.\vec{E})}{\omega^2}\left[1 + 2\frac{(\vec{k}.\vec{V}_0)}{\omega}\right]\right\} f(\vec{V}_0)(d\vec{V}_0) \tag{10}$$

وعند إجراء المكاملة في هذه الصيغة بالنسبة للمتحول $\vec{V}_0$ يجب ملاحظة أن تكامل الحدود من المرتبة الأولى للسرعة $\vec{V}_0$ تؤول إلى الصفر لأن التابع $f(\vec{V}_0)$ يتمتع بالتناظر، أي أن $f(\vec{V}_0) = f(-\vec{V}_0)$. عندئذٍ لنأخذ بعين الاعتبار أن القيمة المتوسطة لمربع مركبة السرعة الحرارية التي توازي المتجهة الموجية تتعين بالشكل التالي(**):

$$\overline{V_{11}^2} = \frac{1}{k^2}\int(\vec{k}.\vec{V}_0)^2 f(\vec{V}_0)d\vec{V}_0. \tag{11}$$

فنجد أن كثافة التيار تكون مساوية:

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = i\frac{nq^2}{m\omega}\left\{\vec{E} + \frac{k^2\overline{V_{11}^2}}{\omega^2}\left[\vec{E} + 2\frac{(\vec{k}.\vec{E})\vec{k}}{k^2}\right]\right\} = i\frac{nq^2}{m\omega}\left[\left(1+\frac{k^2\overline{V_{11}^2}}{\omega^2}\right)\vec{E}_\perp + \left(1+3\frac{k^2\overline{V_{11}^2}}{\omega^2}\right)\vec{E}_{11}\right] \qquad (12)$$

علماً أن:

$$\vec{E}_\perp = \vec{E} - \vec{E}_{11} \;, \; \vec{E}_{11} = \frac{(\vec{k}.\vec{E})\vec{k}}{k^2}$$

باستخدام تحويل فورييه (Fourier transform) في معادلات مكسويل (Maxwell’s equations):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (13)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (14)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (15)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \qquad (16)$$

حيث يكون هذا التحويل من أجل $\vec{E}$ و $\vec{j}$ و $\vec{B}$ من الشكل:

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}(\omega,\vec{k})\exp\left[i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)\right];$$

وهكذا...

نجد بعد وضع كثافة التيار (12) في معادلة مكسويل (13) أن:

$$\vec{k}\times\vec{B}(\omega,\vec{k}) = -\frac{\omega}{c}\left\{\varepsilon_1\vec{E}(\omega,\vec{k}) + \varepsilon_2\frac{[\vec{k}.\vec{E}(\omega,\vec{k})]\vec{k}}{k^2}\right\} = -\frac{\omega}{c}\left[\varepsilon_\perp\vec{E}_\perp((\omega,\vec{k})) + \varepsilon_{11}\vec{E}_{11}(\omega,\vec{k})\right] \qquad (17)$$

ومن ذلك نحصل على التعيين التالي لمركبتي سماحية العازلية الكهربائية للبلازما الراهنة عند أخذ الحركة الحرارية بعين الاعتبار:

$$\varepsilon_\perp(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\left(1+\frac{k^2\overline{V_{11}^2}}{\omega^2}\right),$$

$$\varepsilon_{11}(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega^2}\left(1+3\frac{k^2\overline{V_{11}^2}}{\omega^2}\right) \qquad (18)$$

علماً أن ω_r التواتر البلازمي (Plasma frequency) $\omega_r^2 = 4\pi q^2/m$، ومن الملاحظ من (12) أن كثافة التيار تتناسب عكساً مع الكتلة m، لذلك يمكن إهمال دور الشوارد الموجبة واعتبار m وq كتلة الإلكترون وشحنته على الترتيب.

يتضح من مقارنة هذه الحالة مع حالة عدم وجود الحركة الحرارية $\left(\overline{V_{11}^2} = 0\right)$ أن سماحية العازلية الكهربائية تكون هنا تابعة للمتجهة الموجية $\vec{k}$ إضافة إلى تابعيتها للتواتر الزاوي ω، $\varepsilon \equiv \varepsilon(\omega,\vec{k})$، أي يرافق الحركة الحرارية ظهور تبدد

فراغي (Space dispersion).

بضرب طرفي (17) سلمياً بالمتجهة $\vec{k}$ نجد أن:

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\vec{k}\cdot\vec{E}(\omega,\vec{k})=0 \qquad (19)$$

وتتحقق هذه المساواة في الحالة $(\vec{k}\cdot\vec{E}=0)$ [أي عندما يكون الحقل الكهربائي عرضانياً بشكل صرف] أو في الحالة $\varepsilon_1+\varepsilon_2=0$. فإذا فرضنا أن الحقل الكهربائي غير عرضاني، فإنه يجب أن يكون $\varepsilon_1+\varepsilon_2=0$، عندئذٍ بتعويض ε_1 و ε_2 بقيمتيهما المحسوبتين في (18) نجد المعادلة الآتية:

$$\frac{\omega^2}{\omega_r^2}=1+3\frac{k^2\overline{V_{11}^2}}{\omega^2}, \qquad (20)$$

وهذه المعادلة من المرتبة الرابعة بالنسبة للتواتر الزاوي ω، لكن بالإمكان اعتبار الحد الثاني من طرفها الأيمن حد صغير وفقاً للشرط الذي أخذناه بعين الاعتبار في أثناء الحصول على الصيغة (10)، عندئذٍ يمكن حل هذه المعادلة بطريقة التقريبات المتعاقبة (Successive approximations)[4] وبالتالي نجد:

$$\omega^2\cong\omega_r^2+3k^2\overline{V_{11}^2}, \qquad (21)$$

تسمى هذه العلاقة علاقة التبدد (Dispersion relation).

من ذلك نجد أن سرعة الطور V_f وسرعة المجموعة (Group velocity) V_g تأخذان الشكل الآتي:

$$V_g=\frac{d\omega}{dk}\approx 3\frac{\overline{V_{11}^2}}{\omega_r}k \quad \text{و} \quad V_f=\frac{\omega}{k}\approx\frac{\omega_r}{k}+\frac{3}{2}\frac{\overline{V_{11}^2}}{\omega_r}k, \qquad (22)$$

من الممكن الآن التأكد من أن حالة الاعتدال الكهربائي التي كانت محققة في البلازما قبل تأثير الاضطراب الحاصل بفعل الموجة الكهرطيسية لا تبقى محققة، حيث أنها تزول، وتظهر كثافة حجمية للشحنة الكهربائية في البلازما: لنضرب العلاقة (17) شعاعياً بالمتجهة $\vec{k}$ ولنأخذ بعين الاعتبار المعادلة (16) فنجد أن:

$$k^2\vec{B}(\omega,\vec{k})=\frac{\omega}{c}\varepsilon_1\vec{k}\times\vec{E}(\omega,\vec{k}). \qquad (23)$$

من جهة أخرى نلاحظ أن معادلة مكسويل (14) تأخذ الشكل الآتي:

$$\vec{k}\times\vec{E}(\omega,\vec{k})=\frac{\omega}{c}\vec{B}(\omega,\vec{k}). \qquad (24)$$

وبوضع (24) في (23) نجد:

$$k^2\vec{B}(\omega,\vec{k})=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1\vec{B}(\omega,\vec{k}). \qquad (25)$$

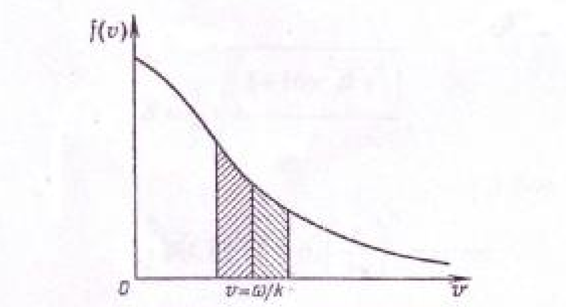
وتحقق هذه المساواة عندما $\vec{B}(\omega,\vec{k})=0$ أو عندما

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1. \qquad (26)$$

لكن باستخدام قيمة $\vec{B}(\omega,\vec{k})$ المحسوبة من (24) في الطرف الأيسر من العلاقة (17) نلاحظ أن تحقق المساواة (26) يقتضي أن يكون الحقل الكهربائي حقلاً عرضانياً، وهذا ما تمّ استبعاده عند بحث الحالتين اللتين تتحقق فيهما المساواة (19)، لذلك نلاحظ أن تحقق المساواة (25) يتطلب أن يكون $\vec{B}(\omega,\vec{k})=0$، وإذا ما تحقق ذلك كان الحقل الكهربائي بدوره حقلاً طولانياً كما يتضح من (24)، وينتج عن ذلك أن $\nabla\cdot\vec{E}=i(\vec{k}\cdot\vec{E})\neq0$، عندئذٍ تؤكد معادلة مكسويل (15) أن الكثافة الحجمية للشحنة لا تساوي الصفر $(\rho\neq0)$، أي أن الاعتدال الكهربائي الذي كان سائداً في البلازما لا يبقى محققاً بعد تأثير الاضطراب الذي تسببه الموجة الكهرطيسية(***).

مناقشة النتائج:

(*)– لقد تمَّ استبعاد حالة التجاوب $\left(\vec{k}.\vec{V}_0 = \omega\right)$ من هذه الدراسة، حيث تكون سرعة الجسيم المشحون في هذه الحالة مساوية سرعة طور الموجة $V_0 = V_\varphi = \omega/k$، ويترتب على هذا الاستبعاد إهمال جزء تخيلي (Imaginary) صغير من سماحية العازلية التي تم تعيينها في (18). يرتبط هذا الجزء المهمل بكون الجسيمات المشحونة تأخذ بعض الطاقة من الموجه عندما تكون سرعاتها أصغر بقليل من سرعة طور الموجة، في حين أنها تعطي بعض طاقتها إلى الموجه عندما تكون سرعاتها أكبر بقليل من سرعة طور الموجه. لكن إذا كان توزع الجسيمات في البلازما تبعاً لسرعاتها توزعاً نظامياً (كما في الشكل)، فإن احتمال وجود الجسيم بسرعة كبيرة يكون أصغر من احتمال وجوده بسرعة صغيرة، لذلك يوجد في مجال واحد من السرعات عدد من الجسيمات التي سرعاتها $V > V_f$ أصغر دائماً من عدد الجسيمات التي سرعاتها $V < V_f$، أي أن عدد الجسيمات التي تأخذ الطاقة من الموجه يكون دائماً أكبر من عدد الجسيمات التي تعطي الطاقة للموجه، ويترتب على ذلك تخامد الموجة أو كما يسمى عادة تخامد لانداو (Landau damping) أو التخامد بدون تصادم[6–8].



شكل يبين توزع الجسيمات في البلازما تبعاً لسرعاتها

(**)– إذا كان توزع الجسيمات المشحونة في البلازما تبعاً لسرعاتها هو توزع مكسويل:

$$f(\vec{V}) = \text{const.}\, e^{-\alpha v^2} \quad , \quad \alpha = \frac{m}{\theta}$$

علماً أن θ درجة الحرارة الإحصائية، كانت القيمة المتوسطة $\overline{V_{11}^2}$ المعينة في (11) مساوية:

$$\overline{V_{11}^2} = \int V_{11}^2 f(\vec{V}) V_\perp dV_\perp V_{11} d\varphi = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} V_{11}^2 e^{-\alpha V_{11}^2} dV_{11} \int_0^{\infty} e^{-\alpha V_\perp^2} V_\perp dV_\perp = \frac{\theta}{m} \qquad (27)$$

عندئذٍ تأخذ علاقة التبدد (21) الشكل الآتي:

$$\omega^2 \cong \omega_p^2 + 3k^2 \frac{\theta}{m}$$

(***)– إذا فرضنا أن كثافة الشحنة الحجمية التي ظهرت في البلازما في اللحظة $t = 0$ من جراء الاضطراب الذي سببته الموجة هي $\rho\left(0,\vec{r}\right)$، فإن هذه الكثافة تغدو عندما $t > 0$ من الشكل:

$$\rho\left(t,\vec{r}\right) = \rho\left(0,\vec{r}\right)\cos\omega_p t \qquad (28)$$

عند إهمال الحركة الحرارية.

أي أن هذه الكثافة تهتز عندئذٍ بتواتر يساوي التواتر البلازمي، لكن لا يمكن لهذا الاهتزاز الانتشار لأن سرعة المجموعة تكون معدومة كما يتضح من (22).

أما إذ أخذنا بعين الاعتبار الحركة الحرارية وفرضنا أن لهذه الكثافة شكلاً غاوسياً (Gaussian from):

$$\rho\left(0,\vec{r}\right)=\rho_{0}\exp\left(-\gamma r^{2}\right),\quad\left(\rho_{0},\gamma=\text{const}\right)$$

فإننا نجد بعد إجراء التكاملات اللازمة[7] أن هذه الكثافة تتغير مع الزمن بالشكل:

$$\rho\left(t,\vec{r}\right)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\rho_{0}}{\left(1+4i\gamma\beta t\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\gamma r^{2}}{\left(1+4i\gamma\beta t\right)}-i\omega_{r}t\right]\right\}. \qquad (29)$$

علماً أن: $\beta=\frac{3}{2}\frac{\overline{V_{11}^{2}}}{\omega_{r}}$.

أي أن اهتزاز الشحنة بتواتر يساوي التواتر البلازمي يتخامد بدوره من جراء تأثير الحركة الحرارية.

بالإمكان التأكد من أن لمربع طويلة هذه الكثافة $\left|\rho\left(t,\vec{r}\right)\right|^{2}$ شكلاً غاوسياً كذلك، لكن يزداد نصف عرضه (اتساعه) d بازدياد الزمن:

$$d=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(1+16\gamma^{2}\beta^{2}t^{2}\right)}{\gamma}},$$

إضافة إلى ذلك نلاحظ عندئذٍ إن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\rho\left(t,\vec{r}\right)\right|^{2}d\vec{r}=\rho_{0}^{2}\left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)^{3/2}=\text{const.}$$

المراجع :

....

[1]- C., LONGMIRE, Elementary plasma physics, interscince. pub. John Wiley & sons, New York. London (1963).

[2]- D.A., FRANK – KOMENESKEY, Lectures on plasma physics, “ATOMIZDAT” Moscow (1964). (in Russian).

[3]- P.C., CLEMMOW & J. P., DOUGHERTY, Electrodynamics of particles and plasma, Addison wesley comp. Inc. (1990).

[4]- V.L., GINZBERG, Propagation of electromagnetic waves in plasma, “Nouka”. Moscow (1967) (in Russian).

[5]- N.A., KRALL & A.W., TRIVELPIECE, principles of plasma physics, McGRAW-HILL book com, New York (1973).

[6]- A., ALEXANDROV; L., BOGDANKIVNCH, & A., RUCHADZE. Principles of electrodynamics plasma “Vysshaya shkola” Moscow (1988). (in Russian).

[7]- D. SAGAN, “on the physics of landau damping”, Am.J. phys., 62, 450-462; (1994).

[8]- G., BRODIN, “A new approach to linear landau damping”, Am. J. phys. 65 (1), January (1997).

[9]- I.S., GRADSHTIEIN, & I.M., RYZHIK, Tables of integrals, series and products, “Nauka” Moscow (1971). (in Russian).