مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (5) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (5) 2018

دراسة تقارب غلاف مورو- بريغمان في فضاءات باناخ الانعكاسية

الدكتور محمد سويقات*
الدكتورة يارا محمد**
يمار حموي***

(تاريخ الإيداع 14 / 6 / 2018. قُبِل للنشر في 11 / 10 /2018)

ملخّص

تستبدل دالة الهدف لحل مسائل الأمثليات الأصغرية غالباً بمتتالية من تقريبات الدوال الملساء ومن أشهرها غلاف مورو. في السنوات الأخيرة نظمت المسألة باستخدام مسافة بريغمان مسافة غير مترية (فهي ليست تناظرية ولاتحقق متراجحة المثلث) كبديل للمسافة المعتادة وبشكل أكثر تحديداً للمسافة التربيعية، واستخدمت بطرق متنوعة في تصميم وتحليل الخوارزميات التكرارية.

يهدف البحث إلى دراسة تقارب غلاف مورو-بريغمان والمؤثر الحال في فضاءات غير منتهية البعد حيث أثبتنا التكافؤ بين تقارب موسكو فوق البياني لمتتالية من الدوال والتقارب البسيط لدوال مورو - بريغمان كما درسنا التقارب القوي والضعيف للمؤثرات الحالة وفق مفهوم مسافة بريغمان.

الكلمات المفتاحية : مسافة بريغمان، غلاف مورو، غلاف مورو بريغمان، تقارب موسكو فوق البياني، دوال المحدبة، دوال نصف مستمرة من الأدنى.

التصنيف الرياضي : 90C25, 90C26, 90C33

* أستاذ - قسم الرياضيات -كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
**مدرسة-قسم الهندسة الطبية - جامعة الأندلس للعلوم الطبية - طرطوس - سورية.
**طالبة دكتوراه - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (5) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (5) 2018

Study the Convergence of Moreau – Bregman Envelope in Reflexive Banach Spaces.

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr.Yara Mohammad**
Yamar Hamwi ***

(Received 14 / 6 / 2018. Accepted 11 / 10 /2018)

□ ABSTRACT □

It is often useful to replace a function with a sequence of smooth functions approximating the given function to resolve minimizing optimization problems. The most famous one is the Moreau envelope. Recently the function was organized using the Bregman distance D_h . It is worth noting that Bregman distance D_h is not a distance in the usual sense of the term. In general, it is not symmetric and it does not satisfy the triangle inequality
The purpose of the research is to study the convergence of the Moreau envelope function and the related proximal mapping depends on Bregman Distance for a function on Banach space. Proved equivalence between Mosco-epi-convergence of sequence functions and pointwise convergence of Moreau-Bregman envelope We also studied the strong and weak convergence of resolvent operators According to the concept of Bregman distance.

Key words ::Bregman distances**,** Moreau envelope**,** Moreau – Bregman envelope, Mosco convergence**,** convex functions, lower semi continue functions
Mathematics Subject Classification: 90C25, 90C26, 90C33

*Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.
**Professor, AL-Andalus University for Medical Sciences, Faculty of Biomedical Engineering, Tartous, Syria.
*** Postgraduate student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.

مقدّمة:

درس Moreau [16] المجموع فوق البياني $f \underset{e}{+} g$ لدالتين $f\ ,\ g$ معرفتين على الفضاء الخطي المنظم X والمعرّف بالشكل التالي:

$$\left(f \underset{e}{+} g\right)(x)=\inf_{y}\left\{f\ (y)+g\ (x-y)\right\}\quad \forall x\in X \qquad (1.1)$$

في الحالة الخاصة عندما $g=\frac{1}{2}\|.\|^{2}$ حيث $\|.\|$ النظيم المعرّف على فضاء هلبرت H تأخذ العلاقة (1.1) الشكل:

$$x\longrightarrow \inf_{u}\left\{f\ (u)+\frac{1}{2}\|x-u\|^{2}\right\} \qquad (1.2)$$

وبعد سنوات درسBrézé في [8] المجموع فوق البياني $f \underset{e}{+} \frac{1}{2\lambda}\|.\|^{2}$ حيث استخدم $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|.\|$ بدلاً من $\|.\|$ في فضاء هلبرت، حيث أصبحت المسألة من الشكل:

$$f_{\lambda}(\mathrm{x})=\inf_{u}\left\{f\ (u)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^{2}\right\} \qquad (1.3)$$

وسميت الدالة $(f_{\lambda})_{\lambda>0}$المعرفة بالعلاقة (1.3) دالة مورو− يوشيدا.

اهتمّ Attouch بهذه الدالة ودرس خواصها في فضاء باناخ الانعكاسي X حيث أثبت أنّ الدالة f_{λ} تبلغ حدها الأدنى في نقطة وحيدة على X و أنّ $(f_{\lambda})_{\lambda>0}$ تسعى إلى f عندما $\lambda\to 0$. وبرهن العديد من الخواص الأخرى وكان أهمها التكافؤ بين تقارب موسكو فوق البياني لمتتالية من الدوال $(f_{\ n})_{n\in N}$ والتقارب البسيط لدوال مورو يوشيدا $(f_{\ \lambda}^{\ n})_{n\in N}$ الموافقة لها. إنّ دالة مورو− يوشيدا تمتلك عدة خواص مهمة تجعلها أكثر استخداماً في نظرية الأمثليات وخاصةً الأمثليات المحدبة ولها دور كبير في دراسة المسألة الأصغرية : $P:\inf\left\{f\ (u)\ ;u\in X\ \right\}$.

قدّم Bregman [7] مسافة غير مترية سميت بمسافة بريغمان (**Bregman distance**). وهي دالة حقيقية غير سالبة لا تحقق متراجحة المثلث، وتستخدم لقياس المسافة بين نقطتين $x\ ,\ y$، وتعرّف هذه المسافة بالشكل الآتي:

$$D_{h}:X\times X\longrightarrow[0,+\infty)$$

$$D_{h}(x\ ,y):=h(x)-h(y)-\left\langle\nabla h(y),x-y\right\rangle$$

حيث: $h:X\longrightarrow R$.

ولها تطبيقات متنوعة في تصميم الخوارزميات التكرارية لحل مسائل الأمثليات وحساب التغيرات والنقطة الثابتة للمؤثرات. من أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى [3,5,10,18]

نلاحظ أنّه إذا كانت $h\left(x\right)=\frac{1}{2}\|x\|^{2}$ فإنّ مسافة بريغمان تأخذ الشكل $D_{h}(x\ ,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|^{2}$.

حيثُ يعتبر الشكل التربيعي $\frac{1}{2}\|x-y\|^{2}$ حالة خاصة من مسافة بريغمان.

لذلك في السنوات الأخيرة تمَ استبدال الشكل التربيعي $\|.\|^{2}$ في العلاقة (1.3) بمسافة بريغمان $D_{h}(.,y)$ كما في [6,12,14,20]، ورمز لها بالرمز بـ $e_{\lambda}^{h}f$ حيث أخذت الشكل:

$$e_{\lambda}^{h}f\ \left(x\right)=\inf_{u}\left\{f\ (u)+\frac{1}{\lambda}D_{h}(u\ ,x)\right\} \qquad (1.4)$$

وسميت **بغلاف مورو– بريغمان،** حيث استخدمت حديثاً لحل مسائل الأمثليات وخصوصاً في تعميم خوارزمية النقطة الأقرب (proximal point algorithm) كما في [15,19].
لكن السؤال المطروح ما هي العلاقة بين متتالية الدوال $(f_n)_{n\in N}$ ومتتالية الدوال $\left(e_\lambda^h f_n\right)_{n\in N}$ الموافقة لها؟؟ في هذا المقال سيتم الإجابة على هذا السؤال.

أهمية البحث وأهدافه

يهدف البحث إلى دراسة تكافؤ بين تقارب موسكو فوق البياني لمتتالية من الدوال $(f_n)_{n\in N}$وتقارب دوال مورو يوشيدا $\left(e_\lambda^h f_n\right)_{n\in N}$ الموافقة لها باستخدام مسافة بريغمان، وتكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته في نظرية الأمثليات ونظرية التحكم الأمثل وكذلك يساهم في إيجاد طرق عددية لحل مسائل الأمثليات المحدبة، وستكون هذه الطرق موضوع لبحوث قادمة.

طرائق البحث وموارده:

نقدم بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالتحليل المحدب كما نعرض تقريب مورو – يوشيدا و تعريف مسافة بريغمان وأهم خواصها التي تساعدنا في معالجة مسألتنا.

1– تعاريف ومفاهيم أساسية:

نبدأ ببعض التعاريف والمفاهيم التي تستخدم بوصفها عناصر مشتركة بين التحليل المحدب ونظرية الأمثليات ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى [1,4,9,17,21].
ليكن $(X, \|.\|)$ فضاء باناخ انعكاسي وليكن $(X^*, \|.\|)$ فضاءه الثنوي. نرمز لشكل الثنائية الخطية بين عناصر الفضائيين X, X^* بالرمز $\langle . \rangle$. ولتكن $f: X \longrightarrow R\cup\{+\infty\}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $R\cup\{+\infty\}$. يعرّف فوق البيان (epigraph) للدالة f ويرمز له بـ $epi\, f$ بالعلاقة:

$$epi\, f = \{(x,\alpha)\in X\times R \quad : f(x)\le\alpha\}$$

- يقال عن الدالة f محدبة إذا كانت $epi\, f$ مجموعة محدبة في $X\times R$ ويقال عن f إنها دالة مقعرة إذا كانت $(-f)$ دالة محدبة.
- يقال عن الدالة f نصف مستمرة من الأدنى في النقطة x_0 إذا كان:

$$\forall x_k \longrightarrow x_0 \Rightarrow \liminf_k f(x_k)\ge f(x_0)$$

وإذا كان فوق البيان $epi\, f$ مجموعة مغلقة فإنّ f دالة مغلقة(نصف مستمرة من الأدنى).

- يقال عن الدالة f خاصة (proper) إذا كانت $epi\, f$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي $D\neq\phi$ حيث

$$D=\{x\in X \quad : f(x)<+\infty\}$$

- تعرّف الدالة المرافقة $f^*: X^* \longrightarrow R\cup\{+\infty\}$ للدالة f بالعلاقة:

$$f^*(x^*) := \sup_{x\in X}\{<x^*, x> - f(x)\}$$

وتكون الدالة f^* محدبة سواء كانت f دالة محدبة أم ليست محدبة. وإذا كانت f دالة محدبة، خاصة ونصف مستمرة من الأدنى فإنّ $f^{**}=f$، انظر [16].

- يقال عن f إنها قسرية (coercive) إذا كان

$$\lim_{\|y\|\to+\infty}\frac{f(y)}{\|y\|}=\infty$$

- يقال عن f إنها قابلة للمفاضلة وفق غاتو (Gateaux differentiable) عند $x\in X$ إذا وجد $\nabla f\in X^*$ حيث

$$\langle y,\nabla f(\mathrm{x})\rangle=\lim_{t\to0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$$

- يعرّف تحت التفاضل ∂f للدالة f (subdifferential) في نقطة $x_0\in dom f$ كالآتي:

$$\partial f(x_0)=\left\{x^*\in X^*:f(x)\geq f(x_0)+<x-x_0,x^*>;\ \forall x\in X\right\}$$
$$=\left\{x^*\in X^*:f(x)+f^*(x^*)=<x^*,x>\ \forall x\in X\right\}$$

حيث يسمى الشعاع x^* شعاع تحت التدرج لـ f في x_0. و تكون المجموعة $\partial f(x_0)$ محدبة (مغلقة) إذا كانت الدالة f محدبة (نصف مستمرة من الأدنى).

- نرمز لمجموعة الدوال المحدبة والنصف المستمرة من الأدنى والخاصّة بـ $\Gamma(\mathrm{X})$.
- يقال عن فضاء باناخ X إنه فضاء E إذا كان انعكاسياً ومحدباً تماما ويحقق الخاصية: " التقارب الضعيف والتقارب النظيمي يؤدي إل التقارب القوي".
- ليكن X فضاءً باناخ انعكاسياً و لتكن الدّوال $\{f_n,f:\mathrm{X}\to R\cup\{\infty\},n\in N\}$ من $\Gamma(X)$. يُقال إنَّ $(f_n)_{n\in N}$ تتقارب نحو f وفق **مفهوم موسكو– فوق البياني(Mosco–epi–convergence)** إذا تحقق الشرطان:

$$i)\quad \forall x\in X\ ,\ \forall(x_n)_{n\in N}\quad x_n\xrightarrow[n]{W}x\ :\ f(x)\leq\liminf_n f_n(x_n)$$

$$ii)\quad \forall x\in X\ ,\ \exists(y_n)_{n\in N}\quad y_n\xrightarrow[n]{s}x\ :\ f(x)\geq\limsup_n f_n(y_n)$$

ونرمز لذلك بالرمز :

$$f_n\xrightarrow{M}f \quad \text{أو} \quad f=M-\lim_e f_n$$

حيث s (w) التبولوجيا القوية (الضعيفة) المعرفة على X.

- لتكن $h:X\to R\cup\{+\infty\}$ دالة محدبة خاصة، **تعرّف مسافة بريغمان** $D_h:D\times\operatorname{int}D\to[0,\infty)$ بالعلاقة:

$$D_h(x,y)=h(\mathrm{x})-h(y)-h^\circ(y,x-y)$$

حيث $h^\circ(x,\mathrm{z})$ المشتق الموجه لـ h عند x بالاتجاه z ويعطى بالعلاقة

$$h^\circ(x,\mathrm{z})=\lim_{t\downarrow 0}\frac{h(\mathrm{x+tz})-h(\mathrm{x})}{t}.$$

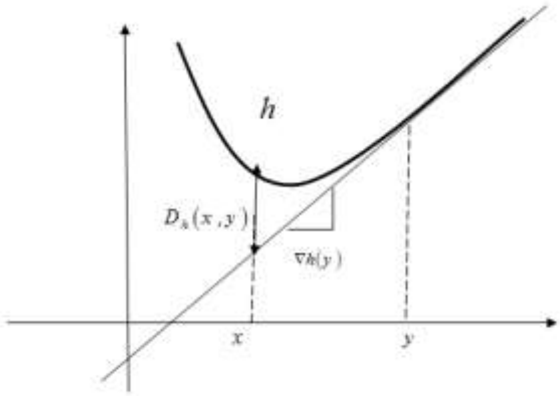
إذا كانت h دالة محدبة نصف مستمرة من الأدنى وقابلة للمفاضلة وفق غاتو (والذي نرمز لمشتقه بـ $\nabla \mathrm{h}$) على $\operatorname{int}D(\mathrm{h})$، فإنّ D_h تعرف بالعلاقة :

$$D_h(x,y)=h(x)-h(y)-\langle \nabla h(y),x-y\rangle$$

لتكن $f(x)=h(y)+\langle \nabla h(y),x-y\rangle$ عندئذٍ:

$$D_h(x,y)=h(x)-f(x)$$

أي أنَ $D_h(x,y)$ تمثل الفرق بين دالتين و $f(x)$ تمثّل المماس لبيان الدّالة h عند y. كما هو مبيّن على الشكل:



لنذكر بعض التمهيديات الأساسية التي نحتاجها في دراستنا لاحقاً:

تمهيدة 1.1. ([9, Proposition 1.3.9]): إذا كانت $h:X\to R\cup\{+\infty\}$ دالة نصف مستمرة من الأدنى محدبة على D حيث $\operatorname{int} D\neq\phi$ و بفرض أنَ hقابلة للمفاضلة وفق غاتو عندئذٍ:

i. $D_h(x,y)=h(x)+h^*(\nabla h(y))-\langle \nabla h(y),x\rangle$ لكل $x,y\in \operatorname{int} D$

ii. (خاصة النقاط الثلاث) لكل $u\in D$ و $x,y\in \operatorname{int} D$ فإنّ

$$D_h(u,y)=D_h(u,x)+D_h(x,y)+\langle \nabla h(x)-\nabla h(y),u-x\rangle$$

تمهيدة 1.2. ([9, Proposition 1.1.10]): إذا كانت $h:X\to R\cup\{+\infty\}$ دالة نصف مستمرة من الأدنى محدبة على D حيث $\operatorname{int} D\neq\phi$، عندئذٍ:

i. hقابلة للمفاضلة وفق غاتوعند $x\in \operatorname{int} D$ وعندئذٍ $\partial h(x)=\{\nabla h(x)\}$.

ii. hقابلة للمفاضلة وفق غاتوعند $x\in \operatorname{int} D$ وعندئذٍ ∇hمستمر بضعف على $\operatorname{int} D$.

iii. hقابلة للمفاضلة وفق فريشت وعندئذٍ D_h مستمرة على $\operatorname{int} D\times \operatorname{int} D$.

- وفي [11]، يعرّف **معامل التحدب الكلي** لـ h (modulus of total convexity) عند x على أنه الدالة $v_h:\operatorname{int} D\times[0,\infty)\to R$ المعطاة بالشكل:

$$v_h(x,t)=\inf_{y\in S(x,t)} D_h(y,x)$$

حيث $S(x,t)=\{y\in B : \|y-x\|=t\}$.

- الدالة h **محدبة كلياً (totally convex)** عند $x \in \operatorname{int} D$ إذا كان $v_h(x,t)>0$ حيث $t>0$ ، و محدبة كلياً إذا كانت محدبة عند كل نقطة $x \in \operatorname{int} D$.
- يعرّف المؤثر الحال وفق مفهوم بريغمان للدالة f ويرمز له بـ $J_\lambda^h f$ بالعلاقة:

$$J_\lambda^h f(x)=\underset{y \in D}{\arg\min}\left\{f(y)+\frac{1}{\lambda}D_h(y,x)\right\} \quad (1.5)$$

ويلعب هذا التقريب المعمّم دوراً هاماً في الخوارزميات التكرارية لحل بعض مسائل الأمثليات، وحساب التغيرات والنقطة الثابتة للمؤثرات ....الخ، سنذكر بعض خواصه المهمة:

تمهيدة 1.3 [3, Corollary 3.25]. : لتكن $f \in \Gamma(X)$ وبفرض أنّ $\inf f>-\infty$ و $D(h)\cap D(f)\neq\phi$ عندئذٍ:

$$e_\lambda^h f(x)=\inf_y\left\{f(y)+\frac{1}{\lambda}D_h(y,x)\right\}=f(J_\lambda^h x)+\frac{1}{\lambda}D_h(J_\lambda^h x,x)$$

حيث J_λ^h الحل الأصغري الوحيد.

تمهيدة 1.4 [12, Corollary 4.2]:لتكن $f:X\to R\cup\{+\infty\}$ دالة خاصة ونصف مستمرة من الأدنى وبفرض h قابلة للمفاضلة وفق فريشت على $\operatorname{int} D(h)$ عندئذٍ يكون $J_\lambda^h f$ مستمراً.

تمهيدة 1.5.[20,Theorem 3.1.1] : لتكن $f:X\to R\cup\{+\infty\}$ دالة حيث $\inf f>-\infty$ و $D(h)\cap D(f)\neq\phi$ عندئذٍ لكل $x\in D$ يكون:

(i) $e_\lambda^h f(x)\le \underline{\mathrm{cl}} f(x)$

بفرض h محدبة كلياً فإنّ

(ii) $\sup_\lambda e_\lambda^h f(x)=\underline{\mathrm{cl}} f(x)$

(iii) $\lim_{\lambda\to 0} e_\lambda^h f(x)=\underline{\mathrm{cl}} f(x)$

وبفرض f نصف مستمرة من الأدنى يكون

$$\lim_{\lambda\to 0} e_\lambda^h f=\sup_\lambda e_\lambda^h f=f$$

النتائج والمناقشة:

مبرهنة 2.1:

بفرض أنّ الدالتيّن h,f تحققان شروط التمهيدية 1.4 ، وبفرض أنّ $(f_n)_{n\in N}\in\Gamma(X)$ و محدودة من الأدنى و $D(f)\cap D(h)\neq\phi, D(f_n)\cap D(h)\neq\phi$، عندئذٍ إذا كان $f_n \xrightarrow{M} f$ فإنّه من أجل كل $\lambda>0$ وكل $x\in S$، يكون:

(i $J_\lambda^h f_n(x)\xrightarrow{w} J_\lambda^h f(x)$

(ii $e_\lambda^h f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} e_\lambda^h f(x)$

البرهان:

$i)$ ليكن $u \in D(\mathrm{h})$ عنصراً كيفياً ، وبما أن $f_n \xrightarrow{M} f$ فرضاً فإنه حسب الشرط الأول من تقارب موسكو فوق البياني، توجد متتالية $(u_n)_{n\in N}$ بحيث يكون :

$$\lim_n u_n = u \quad \text{و} \quad \lim_n f_n(u_n) = f(u) \qquad (2.1)$$

من جهة أخرى حسب التمهيد 1.3 وحسب الفرض $(f_n)_{n\in N}$ محدودة من الأدنى و $D(f_n)\cap D(\mathrm{h})\neq\phi$، من أجل كل $x\in S$ وكل $n\in N$ فإنّ كلاً من $z_n = J_\lambda^h f_n(x)$ و $z = J_\lambda^h f(x)$ موجود.

$$e_\lambda^h f_n(x) = \inf\{f_n(y)+\frac{1}{\lambda}D_h(y,x)\} = f_n(z_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(z_n,x)$$

$$\leq f_n(u_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\ ;\forall n\in N \qquad (2.2)$$

لنبرهن أن $\{f_n(u_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\}$ محدودة.

نلاحظ من العلاقة (2.1)أنّ المتتالية $\{f_n(u_n)\}_{n\in N}$ محدودة.

وبما أن $\lim_n u_n = u$ و $\frac{1}{\lambda}D_h(\ .\ ,x)$ مستمرة فإنّ $\lim_n \frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x) = \frac{1}{\lambda}D_h(u,x)$ ومنه $\{\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\}$ محدودة، ممّا سبق نجد أنّ $\{f_n(u_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\}$ محدودة .

ليكن $l_1\in R$ حد أعلى للمتتالية $\{f_n(u_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\}$، فإنه لكل $n\in N$ يكون:

$$f_n(u_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\leq l_1 \qquad (2.3)$$

وبما أن $(f_n)_{n\in N}$ متتالية محدودة من الأدنى، فحسب الفرض فإنّه يوجد عدد حقيقي l_2 يكون:

$$f_n(x)\geq l_2 \quad \text{لكل } n\in N \text{ ولكل } x\in S \qquad (2.4)$$

ينتج من ذلك $f_n(z_n)\geq l_2$ لكل $n\in N$، وبالتعويض كل من (2.4)و (2.3)في (2.2)، نحصل على:

$$l_2+\frac{1}{\lambda}D_h(z_n,x)\leq f_n(z_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(z_n,x)\leq f_n(u_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)\leq l_1$$

ومنه نستنتج أنّ: $l_2+\frac{1}{\lambda}D_h(z_n,x)\leq l_1 \Rightarrow D_h(z_n,x)\leq\lambda(l_1-l_2)$

بأخذ $\alpha=\lambda(l_1-l_2)$ نجد أن :

$$z_n\in L(\alpha,x)=\{y\ /\ D_h(y,x)\leq\alpha\} \quad \forall n\in N$$

وبما أنّ الدالة $h^*(.)-\langle .,\mathrm{x}\rangle$ قسرية فإنّ $L(\alpha,x)$ محدودة، وبالتالي $(z_n)_{n\in N}$ متتالية محدودة، إذاً توجد متتالية جزئية $(z_{n_k})_{n_k\in N}$ من $(z_n)_{n\in N}$ متقاربة ولتكن نهايتها z_1، وبما أنّ $D_h(.,y)$ نصف مستمرة من الأدنى ، إذاً:

$$D_h(z,x)\leq\liminf_{n_k} D_h(z_{n_k},x)\leq\alpha<+\infty$$

من جهة أخرى لدينا بالفرض $f_n \xrightarrow{M} f$، لذلك بحسب الشرط الثاني من تقارب موسكو فوق البياني (حيث $z_{n_k} \xrightarrow{w} z_1$) يكون $f(z_1) \le \liminf_{n_k} f_{n_k}(z_{n_k})$ ، وبما أنَ $D_h(.,x)$ نصف مستمرة من الأدنى بضعف نجد أنَ:

$$f(z_1)+\frac{1}{\lambda}D_h(z_1,x) \le \liminf_{n_k} f_{n_k}(z_{n_k})+\frac{1}{\lambda}\liminf_{n_k} D_h(z_{n_k},x)$$

$$\le \liminf_{n_k}[f_{n_k}(z_{n_k})+\frac{1}{\lambda}D_h(z_{n_k},x)]$$

$$\le \liminf_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x) \le \limsup_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x)$$

أي:

$$f(z_1)+\frac{1}{\lambda}D_h(z_1,x) \le \liminf_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x) \le \limsup_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x) \qquad (2.5)$$

وحسب العلاقة (2.1)نجد :

$$e_\lambda^h f_{n_k}(x)=f_{n_k}(z_{n_k})+\frac{1}{\lambda}D_h(z_{n_k},x) \le f_{n_k}(u_{n_k})+\frac{1}{\lambda}D_h(u_{n_k},x)$$

حيث (u_{n_k}) متتالية جزئية من المتتالية (u_n).

$$\limsup_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x) \le \limsup_{n_k}[f_{n_k}(u_{n_k})+\frac{1}{\lambda}D_h(u_{n_k},x)]=f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,x)$$

وذلك لأن $\lim_n f_n(u_n)=f(u)$ ، $\lim_n \frac{1}{\lambda}D_h(u_n,x)=\frac{1}{\lambda}D_h(u,x)$، نعوض في العلاقة (2.5) نجد:

$$f(z_1)+\frac{1}{\lambda}D_h(z_1,x) \le \liminf_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x) \le \limsup_{n_k} e_\lambda^h f_{n_k}(x) \le f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,x) \quad (2.6)$$

وبما أن uعنصر كيفي من $D(\mathrm{h})$، نستطيع اعتبار $u=z=J_\lambda^h f(x)$، بالتعويض في (2.6)نحصل على:

$$f(z_1)+\frac{1}{\lambda}D_h(z_1,x) \le f(J_\lambda^h f(x))+\frac{1}{\lambda}D_h(J_\lambda^h f(x),x) \le \inf_y\{f(y)+\frac{1}{\lambda}D_h(y,x)\}$$

وهذا يعني أنّ:

$$z_1 \in \arg\min\{f(y)+\frac{1}{\lambda}D_h(y,x)\}$$

بما أن $\arg\min\{f(y)+\frac{1}{\lambda}D_h(y,x)\}$ مجموعة غير خالية ووحيدة فإن $z_1=z=J_\lambda^h f(x)$.

ولما كانت $(z_{n_k})_{n_k\in N}$ متتالية جزئية كيفية من $(z_n)_{n\in N}$ تتقارب بضعف من z_1 فإنّ $(z_n)_{n\in N}$ تملك نقطة تراكم وحيدة z_1 ومنه $(z_n)_{n\in N}$ تتقارب إلى z_1 بضعف، أي لكل $n\in N$، فإن:

$$J_\lambda^h f_n(x) \xrightarrow{w} J_\lambda^h f(x)$$

ii) لدينا $z_n \xrightarrow{w} z$ و $f_n \xrightarrow{M} f$ فرضاَ، فحسب الشرط الثاني من تقارب موسكو فوق البياني يكون $f(z) \le \liminf_{n_i} f_n(z_n)$ وبالتالي العلاقة (2.6) تبقى صحيحة باستبدال $(z_{n_k})_{n_k\in N}$ بـ $(z_n)_{n\in N}$، وتصبح بالشكل التالي:

$$f(z)+\frac{1}{\lambda}D_h(z,x)\le\liminf_{n_k} e_\lambda^h f_n(x)\le\limsup_{n_k} e_\lambda^h f_n(x)\le f(z)+\frac{1}{\lambda}D_h(z,x)$$

ومنه

$\lim_{n\to+\infty} e_\lambda^h f_n(x)=e_\lambda^h f(x)$. وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.2:

بفرض أنّ الدالتيّن h,f تحققان شروط التمهيدية 1.4 ، والدالة h محدبة كلياً وأنّ المتتالية $(f_n)_{n\in N}\in\Gamma(X)$ و محدودة من الأدنى، عندئذ إذا كان $e_\lambda^h f_n(x)\xrightarrow[n]{} e_\lambda^h f(x)$ لكل $x\in S$ فإن $f_n\xrightarrow{M} f$.

البرهان :

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\in N}$ حيث $x_n\xrightarrow{w} x$ ، ولنبرهن أنّ $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x_n)\ge f(x)$.

نضع $w_n := J_\lambda^h f_n(x_n)\ ,v_n := J_\lambda^h f_n(x)$ فحسب تعريف غلاف مورو – بريغمان نجد

$$e_\lambda^h f_n(x_n)=f_n(w_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(w_n,x_n)\le f_n(x_n)$$

$$e_\lambda^h f_n(x)=f_n(v_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(v_n,x)\le f_n(w_n)+\frac{1}{\lambda}D_h(w_n,x)$$

من المتراجحتين السابقتين نحصل على

$$f_n(x_n)\ge e_\lambda^h f_n(x)-\frac{1}{\lambda}D_h(w_n,x)+\frac{1}{\lambda}D_h(w_n,x_n)$$

وحسب الجزئية ii من التمهيدية1.1، يكون

$$f_n(x_n)\ge e_\lambda^h f_n(x)+\frac{1}{\lambda}\langle w_n-x,\nabla h(x)-\nabla h(x_n)\rangle$$

وبما أن $x_n\xrightarrow{w} x$ وحسب التمهيدة 1.4وحسب الجزئية ii من التمهيدة 1.2 يكون:

$$f_n(x_n)\ge e_\lambda^h f_n(x)$$

ولدينا $\lim_n e_\lambda^h f_n(x)=e_\lambda^h f(x)$ نحصل على:

$$f_n(x_n)\ge e_\lambda^h f(x)$$

نلاحظ أن المتراجحة الأخيرة محققة مهما كانت $\lambda>0$ ، فحسب الجزئية ii من تمهيدة 1.5 نحصل أخيراً على

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x_n)\ge f(x)$$

لتكن $x\in D(h)$ ولنبرهن أنه توجد متتالية $t_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x$ حيث $\limsup_{n\to+\infty} f_n(t_n)\le f(x)$.

إذا كانت $f(x)=+\infty$ واضح.

لتكن $x\in D(h)$ حيث $f(x)<+\infty$ فبحسب وحسب الجزئية iii من تمهيد 1 . وحسب الفرض $e_\lambda^h f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} e_\lambda^h f(x)$ نحصل على

$$\lim_{\lambda\to0}\lim_{n\to+\infty} e_\lambda^h f_n(x)=\lim_{\lambda\to0} e_\lambda^h f(x)=f(x)$$

وبالتالي يوجد متتالية $(\lambda_n)_n$ حيث $\lambda_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ يكون:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} e_{\lambda_n}^h f_n(x)=\lim_{\lambda\to 0}\left[f_n(J_{\lambda_n}^h f_n(x))+\frac{1}{\lambda_n}D_h(J_\lambda^h f_n(x),x)\right] \quad (2.7)$$

باختيار $\xi_n = J_{\lambda_n}^h f_n(x)$ ، نحصل على: $f(x)\geq \limsup_{n\to+\infty} f_n(\xi_n)$

يكفي البرهان أنّ $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. بما أنّ $e_\lambda^h f$ تتقارب نقطياً بالفرض يوجد من أجل n_0 بحيث لكل $n\geq n_0$ يكون

$$\left|e_\lambda^h f_n(x)-e_\lambda^h f(x)\right|\leq 1$$

ومن أجل λ و $n\geq n_0$ يكون

$$e_\lambda^h f_n(x)\leq f_n(\xi_n)+\frac{1}{\lambda_n}D_h(\xi_n,x)$$

وهذا يعني

$$f_n(\xi_n)\geq e_\lambda^h f_n(x)-\frac{1}{\lambda}D_h(\xi_n,x)$$

$$\geq e_\lambda^h f(x)-1-\frac{1}{\lambda}D_h(\xi_n,x)$$

بوضع: $r:=\max\left(\frac{1}{\lambda},1-e_\lambda^h f(x)\right)$ ، نجد:

$$f_n(\xi_n)\geq -r\left(1+D_h(\xi_n,x)\right)$$

من المتراجحة الأخيرة و (2.7) نحصل على:

$$f(x)\geq \limsup_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{\lambda_n}-r\right)D_h(\xi_n,x)-r\right)$$

بما أن $\left(\frac{1}{\lambda_n}-r\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ و $f(x)<+\infty$ يكون $D_h(\xi_n,x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ وهذا يعني أنّ $\xi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. وبذلك يتم المطلوب. ■

مبرهنة 2.3:

بفرض أنّ الدالتيّن h,f يحققان شروط التمهيدية 1.4 ، وأنّ $(f_n)_{n\in N}\in\Gamma(X)$ و محدودة من الأدنى، والدالة h محدبة كلياً عندئذ إذا كان

i) $J_\lambda^h f_n(x)\xrightarrow{w} J_\lambda^h f(x)$

ii) $e_\lambda^h f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} e_\lambda^h f(x)$

لكل $x\in S$ فإن $\{J_\lambda^h f_n(x)\}$ تتقارب بقوة من $\{J_\lambda^h f(x)\}$.

البرهان :

ليكن $z_n=J_\lambda^h f_n(x)$ و $z=J_\lambda^h f(x)$ ، لدينا

$$\left[e_\lambda^h f_n - e_\lambda^h f\right](x)=f_n(z_n)-f(z)+\frac{1}{\lambda}\left[D_h(z_n,x)-D_h(z,x)\right]$$

وحسب الجزئية ii من تمهيدية1.1، نجد أنَ:

$$\left[e_{\lambda}^{h}f_{n}-e_{\lambda}^{h}f\right](x)=f_{n}(z_{n})-f(z)+\frac{1}{\lambda}\left[D_{h}(z_{n},z)+\langle z_{n}-z,\nabla h(z)-\nabla h(z_{n})\rangle\right]$$

بجعل $n\longrightarrow+\infty$ نحصل على:

$$0=\lim_{n\to\infty}\left[f_{n}(z_{n})-f(z)+\frac{1}{\lambda}D_{h}(z_{n},z)\right]=$$
$$=\limsup_{n\to\infty}\left[f_{n}(z_{n})-f(z)+\frac{1}{\lambda}D_{h}(z_{n},z)\right]$$
$$\geq\limsup_{n\to\infty}\left[f_{n}(z_{n})-f(z)\right]\geq\liminf_{n\to\infty}\left[f_{n}(z_{n})-f(z)\right]\geq 0$$

وذلك حسب شرط تقارب موسكو الأول $\liminf_{n\to\infty}f_{n}(z_{n})\geq f(z)$. ممّا سبق نجد أنّ $\lim_{n\to\infty}f_{n}(z_{n})=f(z)$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty}D_{h}(z_{n},z)=0$. وكنتيجة لذلك نجد:

$$0\leq\liminf_{n\to\infty}v_{h}(z,\|z_{n}-z\|)\leq\limsup_{n\to\infty}v_{h}(z,\|z_{n}-z\|)\leq\lim_{n\to\infty}D_{h}(z_{n},z)=0$$

وبما أنّ $v_{h}(z,.)$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ و $v_{h}(z,0)=0$ نحصل على $\lim_{n\to\infty}\|z_{n}-z\|=0$.

وبذلك يتم المطلوب. ■

إذا كان $\dim X<\infty$ فإن شرط الدالة h محدبة كليا يمكن استبداله بمحدبة تماما انظر[11,Theorem2.14].

ومنه نحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 2.4 : إذا كان الفضاء X منتهي البعد وكانت الدالتان h,f محققتين لشروط التمهيدية 1.4، مع فرض أنّ $(f_{n})_{n\in N}\in\Gamma(X)$ و محدودة من الأدنى و $D(f_{n})\cap D(h)\neq\phi$,$D(f)\cap D(h)\neq\phi$، عندئذٍ يكون الشرطان التاليان متكافئين:

1. $f_{n}\xrightarrow{M}f$
2. $\begin{cases} i) & J_{\lambda}^{h}f_{n}(x)\longrightarrow J_{\lambda}^{h}f(x) \\ ii) & e_{\lambda}^{h}f_{n}(x)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}e_{\lambda}^{h}f(x)\end{cases}$

<u>**حالة خاصة** [11, Section3.2]</u>: إذا كان X فضاء باناخ فإنّ:

$X\equiv E$ إذا وفقط إذا كان $\|.\|^{r}$ محدبة كليا لكل $r\in(0,+\infty)$

ومنه نحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 2.5: إذا كان الفضاء X فضاء E وبفرض $h:=\frac{1}{r}\|.\|^{r}$ حيث $r\in(1,\infty)$ والدالة f تحقق شروط التمهيدية 1.4، مع فرض أنّ $(f_{n})_{n\in N}\in\Gamma(X)$ و محدودة من الأدنى و $D(f)\cap D(\text{h})\neq\phi,D(f_{n})\cap D(\text{h})\neq\phi$، فإنّ الشرطين التاليين متكافئان:

1. $f_{n}\xrightarrow{M}f$
2. $\begin{cases} i) & J_{\lambda}^{h}f_{n}(x)\longrightarrow J_{\lambda}^{h}f(x) \\ ii) & e_{\lambda}^{h}f_{n}(x)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}e_{\lambda}^{h}f(x)\end{cases}$

الاستنتاجات والتوصيات:

تمّ استبدال الشكل التربيعي في دالة مورو– يوشيدا بمسافة غير مترية (مسافة بريغمان) وأثبتنا التكافؤ بين تقارب موسكو فوق البياني لممتالية من الدوال $(f_n)_{n\in N}$ والتقارب البسيط لدوال غلاف مورو–بريغمان الموافقة لها في فضاء باناخ انعكاسي، ونظراً لأهمية مسافة بريغمان نوصي بدراسة تقارب غلاف مورو وفق مفهوم مسافة بريغمان في فضاءات باناخ أو في فضاءات منظمة.

المراجع:

[1] Attouch H. Variational convergence for functions and operators. Pitman Advanced Publishing Program; 1984.

[2] Bauschke HH, Borwein JM. Legendre functions and the method of random Bregman projections. Journal of Convex Analysis. 1997:27-67

[3] Bauschke HH, Borwein JM, Combettes PL. Bregman monotone optimization algorithms. SIAM Journal on control and optimization. 2003;42(2):596-636.

[4] Bauschke HH, Combettes PL. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spacesv, second edition, Springer, 2017

[5] Bauschke HH, Combettes PL, Noll D. Joint minimization with alternating Bregman proximity operators. Pacific Journal of Optimization. 2006,401-24.

[6] Bauschke HH, Dao MN, Lindstrom SB. Regularizing with Bregman-Moreau envelopes. arXiv preprint arXiv:1705.06019. 2017 May 17.

[7] Bregman LM. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. USSR computational mathematics and mathematical physics. 1967 Jan 1;7(3):200-17.

[8] Brezis H. Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland,Amsterdam; 1973.

[9] Butnariu D, Iusem AN. Totally convex functions for fixed points computation and infinite dimensional optimization. Springer Science & Business Media; 2012.

[10] Burachik R, Kassay G. On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2012 Dec 31;75(18):6456-64.

[11] Butnariu D, Resmerita E. Bregman distances, totally convex functions, and a method for solving operator equations in Banach spaces. In Abstract and Applied Analysis 2006 .

[12] Chen YY, Kan C, Song W. The Moreau Envelope Function and Proximal Mapping with Respect to the Bregman Distances in Banach Spaces. Vietnam Journal of Mathematics. 2012;40(2&3):181-99.

[13] Jourani A, Thibault L, Zagrodny D. Differential properties of the Moreau envelope. Journal of Functional Analysis. 2014;266(3):1185-237

[14] Kan C, Song W. The Moreau envelope function and proximal mapping in the sense of the Bregman distance. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2012 ;75(3):1385-99.

[15] Langenberg N. Pseudo. monotone operators and the Bregman proximal point algorithm. Journal of Global Optimization. 2010 Aug 1;47(4):537-55.

[16] Moreau, J.J.: Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel. Comptes Rendus del'Académie des Sciences de Paris; 1963.

[17] Peypouquet J. Convex optimization in normed spaces: theory, methods and examples. Springer; 2015 .
[18] Resmerita E. On total convexity, Bregman projections and stability in Banach spaces. Journal of Convex Analysis. 2004;11(1):1-6
[19] Solodov MV, Svaiter BF. An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results on the theory of Bregman functions. Mathematics of Operations Research. 2000 May;25(2):214-30.
[20] Soueycatt M, Hamwi Y. On regularization in banach spaces with respect to the Bregman distances. submitted for publication. 2017.
[21] Zalinescu C. Convex Analysis in General Vector Spaces, World Scientific, River Edge, NJ, 2002.