مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (4) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (4) 2018

تعيين الاهتزازات العرضانية اللاخطية لقضيب من مادة مرنة لزجة فعالة

د. حسن محمد خليفة*

(تاريخ الإيداع 27 / 3 / 2018. قُبِل للنشر في 19 / 7 /2018)

□ ملخّص □

تقدم هذه المقالة حلاً لمسألة الاهتزازات العرضانية لمنظومات قضبانية من مواد مرنة لزجة لاخطية بوجود العامل البيولوجي. تم بناء المعادلات التفاضلية الحاكمة وإيجاد عبارات تحليلية لحلول هذه المعادلات بحيث توصّف الاهتزازات العرضانية لقضيب رقيق محدود الطول.

الكلمات المفتاحية: مرونة، لزوجة، لاخطية، اهتزاز، رد فعل، بيولوجي، توافقي.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (4) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (4) 2018

Specification of cross nonlinear vibration Of viscoelastic affective bar.

Dr. **Hasan Mohammad KHALIFEH***

(Received 27 / 3 / 2018. Accepted 19 / 7 /2018)

□ ABSTRACT □

this paper presents a solution of non-linear viscoelastic bar systems transversal vibrations problems in presence of biological factor. Governing differential equations were built, then analytical expressions of the solution of this equations were found, which describe transversal vibrations of a thin finite length bar.

Key Words: Elastic, Nonlinear, vibration, Reaction, Biological, harmonic .

***Assistant Professor. Department of mathematics Faculty of science- University of Tishreen- Lattakia- Syria.**

مقدمة:

تعتبر مسألة الاهتزازات من أهم التأثيرات الميكانيكية التي يتعرض لها الإنسان، حيث يعتبر الجسم البشري من وجهة نظر الميكانيك البيولوجي جسماً قابلاً للتشوه يخضع لتأثير قوى ميكانيكية وغير ميكانيكية. تستخدم المواد المرنة اللزجة وكذلك المنظومات المصنوعة من مواد مرنة لزجة [1, 2] على نطاق واسع للسيطرة على الاهتزازات في الهياكل والآلات وفي تقليل الضوضاء في الأنظمة الصوتية.

تم تطبيق نموذج المرونة غير المحلية عند دراسة مشاكل التقوس، التذبذبات والالتواء في الأعمال [3, 4]. تقود الطريقة اللاخطية لدراسة التقوس إلى مجموعة من المعادلات التفاضلية القابلة للمكاملة والتي تم البناء عليها وتقدير مطالات الاهتزازات العرضانية عند التقوس في الاعمال [5, 6, 7]. أما تأثير نوع النموذج على تصرفات الحل لحركة قضيب صلب في وسط لدن لزج فقد نوقشت في العمل [8].

أهمية البحث وأهدافه:

الهدف الرئيسي لهذه البحث هو توضيح العمليات الاهتزازية في وسط مرن لزج بيولوجي. إنّ عملية تنظيم التحريضات الاهتزازية وحماية الجسم البشري تملك الاهمية الأولى من أجل تحسين ظروف العمل والحماية من أضرار الاهتزازات. نعبر عن هذه الاهتزازات المعقدة غير التوافقية، بوضعها على شكل مجموع اهتزازات توافقية بسيطة.

طرائق البحث ومواده:

بالاعتماد على النموذج الموجود في العمل [9] وعلى المعادلة اللاخطية للأوساط المرنة الوراثية (عند الكائنات الحية) [10] واستخدام طريقة نشر تابع الإزاحة العرضانية في سلسلة قوى وطريقة تحليل فورييه وذلك لإيجاد طريقة لحل المسألة المدروسة.

المعادلة التفاضلية للاهتزازات العرضانية لقضيب فعّال

تعتمد الدراسة النظرية لهذه المسائل على النماذج الميكانيكية لأعضاء الجسم البشري، حيث أدخل مفهوم العامل البيولوجي لأول مرة في العمل [9] كمتغير يؤثر إلى جانب التأثيرات الميكانيكية على التشوه والإزاحة في المادة. بناءً على العمل [9] تم في العمل [11] وضع نموذج لجسم صلب قابل للتشوه مع الأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي.

تتحرك نقاط القضيب في اتجاه عمودي على محور القضيب عند الاهتزازات العرضانية ، مما يؤدي إلى تقوس محور القضيب. يدعى القضيب في حالة الاهتزازات العرضانية بالعارضة وبالتالي فإن عبارتي اهتزازات العارضة أو الاهتزازات العرضانية لقضيب تعتبر متماثلة. سندرس في هذا العمل مسألة الاهتزازات العرضانية لقضيب رقيق منتهي الطول من مادة مرنة لزجة مع الأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي، حيث أن النسج البيولوجية تملك وبشكل صريح خصائص مرنة لزجة وعلاقة غير خطية بين القوى المؤثرة (الإجهاد المطبق) والتشوه [12].

إن وجود العامل البيولوجي (حساب رد الفعل) يمكن أن يتم بطريقتين [11]:

الأولى: عندما رد فعل الجسم $R(t)$ يتعلق بحالة الإجهاد للجسم في لحظة زمنية تسبق المعطاة:

$$R(t) = -A\sigma(t-\tau)$$

حيث $0 < A < 1$ و τ وسيط يصف زمن تأخر رد الفعل $(0 < \tau << 1)$.

الثانية: عندما رد فعل الجسم $R(t)$ يتعلق بكامل فترة الإجهاد للجسم:

$$R(t)=\int_0^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$$

بما أن الجهد الحقيقي في الجسم في لحظة ما يساوي مجموع الجهد الخامل (غير الفعال) ورد الفعل: $\sigma(t)+R(t)$ فإن معادلة الحركة (من أجل الحالة الأحادية البعد وعند غياب قوى الثقالة) تكتب بالشكل:

$$\frac{\partial(\sigma+R)}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

وبما أن τ صغيرة جداً بالمقارنة مع t فإن العلاقة الآتية محققة (بدقة نشر حتى الدرجة الأولى):

$$\sigma+R=\sigma(t)-A\sigma(t-\tau)\cong(1-A)\sigma(t)+A\tau\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}$$

وبالتالي تأخذ معادلة الحركة من أجل الحالة الأولى (حالة المرونة حيث: $\sigma=E\varepsilon=E\frac{\partial u}{\partial x}$) الشكل:

$$A\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t}+(1-A)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ;\ c_0^2=\frac{E}{\rho}$$

E معامل المرونة و ρ الكثافة.

أما من أجل الحالة الثانية (المرونة واللزوجة $\sigma=\tilde{E}\varepsilon$ (تعميم لقانون كوك)) نستبدل معامل المرنة E بالمعامل $\tilde{E}=E(1-\Gamma^*)$. حيث $\Gamma^*=\int_0^t\Gamma(t-\tau)f(\tau)d\tau$ معامل المقارنة (الضبط) مع نواة الارتخاء التي تحدد قانون تغير الإجهاد مع الزمن حيث التشوه معلوم. وبالتالي تأخذ معادلة الحركة الشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\int_0^t R(t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\tau=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تم بالاعتماد على قانون رابوتنف [15] من أجل الأوساط التي تملك خواص وراثية وعلى خصائص انتشار الاهتزازات العرضانية في قضيب عند الثني الحصول على المعادلة التفاضلية القابلة للحل بالنسبة لتابع تقوس القضيب $W(x,t)$ في العمل [13] بالصيغة:

$$\begin{aligned}&(1-A)\left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Gamma(t-s)ds\right]+A\tau\left[\frac{\partial^5 W}{\partial x^4\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Gamma(t-s)ds\right]+\\&\lambda^2 r^2\left\{(1-A)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3\Gamma(t-s)ds\right]+\right.\\&\left.A\tau\left[\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3\Gamma(t-s)ds\right]\right\}+\eta\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0\end{aligned}\qquad(1)$$

حيث المقادير الديولونية (الغير مقاسة): $\eta=\frac{\ell^4}{c_o^2 r_o^2 t_o^2}$, $r^2=\frac{h^2}{5}$, $r_o=\sqrt{\frac{J}{S^*}}$, $c_o=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ و r_o نصف قطر عطالة المقطع العرضي القضيب. $E=a\lambda$ معامل المرونة اللحظي ليونغ حيث a,λ أعداد ثابتة

بالإضافة إلى أن λ هو بارامتر لاخطية منحني التشوه اللحظي. $J=\frac{2}{3}h^3$ عزم عطالة المقطع العرضي للقضيب بالنسبة لمحور عرضي، S^* مساحة المقطع العرضي للقضيب.

درست بالاعتماد على المعادلة (1) الاهتزازات العرضانية اللاخطية لقضيب من مادة مرنة في العمل [14].

النتائج والمناقشة:

اعتبرت في هذا البحث مادة القضيب مرنة لزجة. وبالتالي فإن نواة معامل الارتخاء [15] $(\Gamma(t-S)\neq 0)$. ننشر التابع المراد تعيينه $W(x,t)$ في سلسلة بقوى البارامترين λ و τ على الشكل:

$$W(x,t)=\sum_{m,n}\lambda^m\tau^n W_{m,n}(x,t) \tag{2}$$

نأخذ بعين الاعتبار أن معادلة النموذج البيولوجي [11] التي اعتمدنا عليها قد تم الحصول عليها بدقة حتى الدرجة الأولى للبارامتر τ. ومن أجل دقة النشر (2) نأخذ العلاقة بين البارامترين λ و τ على الشكل: $\lambda\sim\tau^{\frac{1}{2}};\ (\lambda^0\tau^0,\lambda^0\tau^1,\lambda^1\tau^0\ \lambda^2\tau^0)$ عندئذٍ نقتصر فيها على الحدود التي توافق الأزواج $(m,n)=(0,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (2,0)$.

نعوض النشر (2) في المعادلة (1) ونقارن الحدود المتساوية المراتب في الصغر فنحصل على جملة معادلات تفاضلية مترابطة تسمح بتعيين الدوال $W_{0.0}(x,t)\ ,\ W_{0.1}(x,t)\ ,\ W_{1.0}(x,t),\ W_{2,0}(x,t)$.

$$(1-A)\left[\frac{\partial^4 W_{0,0}}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial x^2}\Gamma(t-\tau)d\tau\right]+\eta\frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&(1-A)\left[\frac{\partial^4 W_{0,1}}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W_{0,1}}{\partial x^2}\Gamma(t-\tau)d\tau\right]+\\&+A\left[\frac{\partial^5 W_{0,0}}{\partial x^4\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial x^2}\Gamma(t-\tau)d\tau\right]+\eta\frac{\partial^2 W_{0,1}}{\partial t^2}=0\end{aligned} \tag{4}$$

$$(1-A)\left[\frac{\partial^4 W_{1,0}}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W_{1,0}}{\partial x^2}\Gamma(t-\tau)d\tau\right]+\eta\frac{\partial^2 W_{1,0}}{\partial t^2}=0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&(1-A)\left[\frac{\partial^4 W_{2,0}}{\partial x^4}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 W_{2,0}}{\partial x^2}\Gamma(t-\tau)d\tau\right]+\eta\frac{\partial^2 W_{2,0}}{\partial t^2}+\\&(1-A)r^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial t^2}\right)^3-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{\partial^2 W_{0,0}}{\partial x^2}\right)^3\Gamma(t-\tau)d\tau\right]=0\end{aligned} \tag{6}$$

والتي تعين بدورها الحل العام (2) وفق العلاقة:

$$W(x,t)=W_{0,0}(x,t)+\tau W_{0,1}(x,t)+\lambda W_{1,0}(x,t)+\lambda^2 W_{2,0}(x,t)$$

سندرس اعتماداً على هذه المعادلات الاهتزازات العرضانية لقضيب رقيق منتهي الطول من مادة مرنة لزجة. تأخذ الشروط الحدية كما في الحالة المرنة الشكل الآتي:

$$W(x,t) = W_0 \cos \omega t \ , \ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad ; \ x = 0 \tag{7}$$

توافق غياب عزم التقوس عن الطرف الأيسر للقضيب وإخضاعه لاهتزاز قسري مطاله W_0 وتردده ω.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad , \ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0 \ ; \quad x = \ell = 1 \tag{8}$$

توافق غياب أي تأثير على الطرف الآخر للقضيب. تسمح هذه الشروط بصياغة الشروط الحدية للدوال $W_{m,n}(x,t)$ وتحديد المنحنيات الموافقة للمسألة وتبيان أثر الاهتزازات الصغيرة [16] في هذه الحالة.

نختار نواة معامل التسلق بالشكل النظامي: $\Gamma(t-\tau) = \xi e^{-\mu(t-\tau)}$ حيث ξ و μ ثوابت.

تصادفنا في المسائل التطبيقية صعوبات ناتجة عن زيادة عدد مرات تكامل العوامل والتي تؤدي بدورها إلى حسابات معقدة بحيث أن نوى التكاملات التكرارية تغدو بشكل طارئ حساسة تجاه الأخطاء المرتكبة أثناء قياس الإجهاد أو التشوه [17]. ولذلك غالباً ما يتم تجاوز تلك المشاكل ببناء نظريات المرونة واللزوجة على أساس دلائل تجريبية لمنحنيات تسلق وارتخاء زمنية متشابهة [18]. يمكن في إطار هذه النظريات حل المسائل التي تملك بالأساس حل في الحالة اللاخطية لنظرية المرونة. والاختلاف يكمن في ضرورة تحديد بارامترات المرونة واللزوجة. بالبحث وفق هذا التصور عن حل المعادلة (3) في شكل سلسلة:

$$W_{0,0}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x,\gamma_k) e^{-i\gamma_k t} \ ; \quad \gamma_k - const \tag{9}$$

نحصل من أجل $W_k(x,\gamma_k)$ على معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة:

$$W_k^{(4)} - \frac{\eta \gamma_k^2 \left(\mu^2 - \mu \xi + \gamma_k^2 + i \xi \gamma_k\right)}{(1-A)\left[(\mu-\xi)^2 + \gamma_k^2\right]} W_k = 0 \tag{10}$$

حيث الاشتقاق يتم بالنسبة للإحداثي x. حل المعادلة (10) يعطى بالشكل [19]:

$$W_k(x,\gamma_k) = C_{1k} ch\beta_k^{(1)} x + C_{2k} sh\beta_k^{(1)} x + C_{3k} ch\beta_k^{(3)} x + C_{4k} sh\beta_k^{(3)} x \tag{11}$$

حيث العلاقة بين جذور المعادلة المميزة للمعادلة (10) هي [19]:

$$\beta_k^{(1)} = -\beta_k^{(2)} = f + ig \, , \qquad \beta_k^{(3)} = -\beta_k^{(4)} = i\beta_k^{(1)} \tag{12}$$

وتعطى C, B, v, u, g, f بالعلاقات الآتية:

$$f = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} + u}{2}} \ , \qquad g = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2}}$$

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 + C^2} + B}{2}} \ , \qquad v = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 + C^2} - B}{2}}$$

$$B = \frac{\eta \gamma_k^2 \left(\mu^2 - \mu \xi + \gamma_k^2\right)}{(1-A)\left[(\mu-\xi)^2 + \gamma_k^2\right]} \ , \qquad C = \frac{\eta \gamma_k^3 \xi}{(1-A)\left[(\mu-\xi)^2 + \gamma_k^2\right]}$$

عند تحقيق الحل (11) للشروط الحدية:

$$W_k(x) = \frac{W_0}{2}, \ \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} = 0 \quad ; \ x = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^3} = 0 \ ; \quad x = 1 \tag{13}$$

التي تنتج من الشروط (7) و (8)، فإننا نحصل من أجل المعاملات C_{jk} على سلسلة من المعادلات الجبرية حلها له الشكل الآتي:

$$C_{1k}=C_{3k}=\frac{W_0}{4}$$
$$C_{2k}=\frac{W_0}{4}\frac{-1+\cos\beta_k^{(1)}ch\beta_k^{(1)}-\sin\beta_k^{(1)}sh\beta_k^{(1)}}{\sin\beta_k^{(1)}ch\beta_k^{(1)}-\cos\beta_k^{(1)}sh\beta_k^{(1)}}$$
$$C_{4k}=\frac{-iW_0}{4}\frac{1-\cos\beta_k^{(1)}ch\beta_k^{(1)}-\sin\beta_k^{(1)}sh\beta_k^{(1)}}{\sin\beta_k^{(1)}ch\beta_k^{(1)}-\cos\lambda_k^{(1)}sh\beta_k^{(1)}} \qquad (14)$$

عند الحصول على القيم (14) فإن الشروط الحدية (8) والشرط الثاني من (7) تكون محققة. أما من أجل تحقق الشرط الأول من (7) يكفي أن نقتصر في (9) على حدين من حدود السلسلة وذلك بأخذ $W_{01}=W_{02}=\frac{W_0}{2}$ و $\gamma_1=-\gamma_2=\omega$. بهذا الشكل فإن الحل (9) للمسألة المطروحة (3) ، (7)، (8) يأخذ الشكل:

$$W_{0,0}(x,t)=R_{0,0}(x,\omega)\cos[\omega t-\varphi(x,\omega)] \qquad (15)$$

حيث المطال والطور الابتدائي للاهتزاز يعطيان بالعلاقات:

$$R_{0,0}(x,\omega)=\frac{W_0}{2}\sqrt{L_1^2(x)+L_2^2(x)}$$
$$\varphi(x,\omega)=arctg\frac{L_2}{L_1}+\begin{cases}0\ ; & L_1>0\\ \pi\ ; & L_1<0\end{cases}$$

وبدوره فإن:

$$L_1(x)=chfx\cdot\cos gx+\Gamma shfx\cdot\cos gx-Bchfx\cdot\sin gx+$$
$$+\cos fx\cdot chgx-B_1\sin fx\cdot chgx-\Gamma_1\cos fx\cdot shgx$$
$$L_2(x)=shfx\cdot\sin gx+\Gamma chfx\cdot\sin gx+Bshfx\cdot\cos gx-$$
$$-\sin fx\cdot shgx-B_1\cos fx\cdot shgx+\Gamma_1\sin fx\cdot chgx$$

كذلك فإن:

$$\Gamma=\mathrm{Re}\left(\frac{4C_{2k}}{W_0}\right),\quad B=\mathrm{Im}\left(\frac{4C_{2k}}{W_0}\right),\quad \Gamma_1=\mathrm{Re}\left(\frac{4C_{4k}}{W_0}\right),\quad B_1=\mathrm{Im}\left(\frac{4C_{4k}}{W_0}\right) \qquad (16)$$

- بالاعتماد على أن:

$$W_{0,0}(x,t)=W_1(x,\omega)e^{-i\omega t}+W_2(x,-\omega)e^{i\omega t} \qquad (17)$$

حيث $W_2(x,-\omega)$ المرافق العقدي للتابع $W_1(x,\omega)$.

سنبحث عن حل المعادلة (4) على الشكل:

$$W_{0,1}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k(x,\gamma_k)e^{-i\gamma_k t}+\overline{V_k(x,\gamma_k)}e^{i\gamma_k t}\right] \qquad (18)$$

حيث $\gamma_k=\omega k$. نعوض (17) و (18) في (4) فنحصل على:

$$V_k^{(4)}-\frac{\eta\omega^2\left(\mu^2-\mu\,\xi+\omega^2+i\,\xi\omega\right)}{(1-A)\left[(\mu-\xi)^2+\omega^2\right]}V_1= \\ =\frac{B^*W_0\left(\beta^{(1)}\right)^4}{4}\left[ch\beta^{(1)}x+\Gamma_2 sh\beta^{(1)}x+\cos\beta^{(1)}x+B_2\sin\beta^{(1)}x\right] \tag{19}$$

هنا:

$$\Gamma_2=\Gamma+iB,\quad B_2=i(\Gamma_1+iB_1),\quad B^*=\frac{iA\omega}{1-A} \tag{20}$$

Γ,Γ_1,B,B_1 تعين من العلاقة (16). يأخذ حل المعادلة (19) الشكل:

$$V_1=C_1ch\beta^{(1)}x+C_2sh\beta^{(1)}x+C_3ch\beta^{(3)}x+C_4sh\beta^{(3)}x+\tilde{V}_1(x) \tag{21}$$

حيث: $\tilde{V}_1(x)$ حل خاص للمعادلة (19) له الشكل:

$$\tilde{V}_1=\frac{xB^*W_0\beta^{(1)}}{16}\left[\Gamma_2ch\beta^{(1)}x+sh\beta^{(1)}x+B_2\cos\beta^{(1)}x-\sin\beta^{(1)}x\right] \tag{22}$$

نعين الثوابت C_1,C_2,C_3,C_4 من الشروط الحدية الآتية والتي نحصل عليها انطلاقاً من (7) و (8):

$$V_1(x)=0\quad,\quad\frac{\partial^2V_1(x)}{\partial x^2}=0\quad;\ x=0 \\ \frac{\partial^2V_1}{\partial x^2}=\frac{\partial^3V_1}{\partial x^3}=0\ ;\quad x=1 \tag{23}$$

عندئذٍ يأخذ حل المعادلة (19) الشكل الآتي:

$$V_1(x)=L_3(x)+i\,L_4(x) \tag{24}$$

حيث:

$$L_3(x)=\mathrm{Re}\left[Nsh\beta^{(1)}x+M\sin\beta^{(1)}x+\tilde{V}_1(x)\right] \\ L_4(x)=\mathrm{Im}\left[Nsh\beta^{(1)}x+M\sin\beta^{(1)}x+\tilde{V}_1(x)\right]$$

وبدوره فإن:

$$N=\frac{\beta^{(1)}\tilde{V}_1''(1)\cos\beta^{(1)}-\tilde{V}_1^{(3)}(1)\sin\beta^{(1)}}{\left(\beta^{(1)}\right)^3\left(ch\beta^{(1)}\sin\beta^{(1)}-sh\beta^{(1)}\cos\beta^{(1)}\right)}$$

$$M=\frac{1}{\left(\beta^{(1)}\right)^2\sin\beta^{(1)}}\left[\frac{sh\beta^{(1)}\left(\beta^{(1)}\tilde{V}_1''(1)\cos\beta^{(1)}-\tilde{V}_1^{(3)}(1)\sin\beta^{(1)}\right)}{\beta^{(1)}\left(ch\beta^{(1)}\sin\beta^{(1)}-sh\beta^{(1)}\cos\beta^{(1)}\right)}+\tilde{V}_1''(1)\right]$$

نعوض (24) في (18) فيأخذ حل المعادلة (4) الشكل الآتي:

$$W_{0,1}(x)=2\left[L_3^2(x)+L_4^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}\cos(\omega t-\psi(x,\omega)) \tag{25}$$

حيث الطور الابتدائي للاهتزاز له الشكل:

$$\psi(x,\omega)=arctg\frac{L_4(x)}{L_3(x)}+\begin{cases}0\ ;\ L_3>0\\ \pi\ ;\ L_3<0\end{cases}$$

– تملك المعادلة (5) الحل الصفري من أجل الشروط الحدية المتجانسة التي تنتج من الشروط الحدية , (8) (7) و (13).

– ننتقل لحل المعادلة (6) من أجل تعيين الدالة $W_{2,0}(x,t)$. من أجل الشروط الحدية المتجانسة الآتية:

$$W_{2,0}(x)=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 W_{2,0}}{\partial x^2}=0 \quad ; \; x=0$$

$$\frac{\partial^2 W_{2,0}}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 W_{2,0}}{\partial x^3}=0 \; ; \quad x=1 \tag{26}$$

والتي تنتج بدورها من الشروط الحدية (7) , (8) و (13).

بتعويض (15) في المعادلة (6) والبحث عن حل المعادلة الناتجة على شكل السلسلة الآتية:

$$W_{2,0}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[U_k(x,\gamma_k)e^{-i\gamma_k t}+\overline{U_k(x,\gamma_k)}e^{i\gamma_k t}\right] \; ; \; \gamma_k=\omega k \tag{27}$$

نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\mathrm{Re}\left[U_k^{(4)}\left(1-\frac{\xi}{\mu-i\omega k}\right)-\frac{\eta\omega^2 k^2}{1-A}\right]e^{-i\omega kt}=\mathrm{Re}\left[\alpha Q(x)e^{-i\omega t}+\alpha_1 Q_1(x)e^{-3i\omega t}\right] \tag{28}$$

حيث:

$$\alpha_1=-r^2\frac{W_0\left(\beta^{(1)}\right)^6}{64}\left(1-\frac{\xi}{\mu-3i\omega}\right), \quad \alpha=-3r^2\frac{W_0^3\overline{\left(\beta^{(1)}\right)^2}\left(\beta^{(1)}\right)^4}{64}\left(1-\frac{\xi}{\mu-i\omega}\right)$$

$$\begin{aligned} Q(x)=\ & r_1 ch\beta^{(1)}x+r_2 sh\beta^{(1)}x+r_3\cos\beta^{(1)}x+r_4\sin\beta^{(1)}x+\\ &+r_5 ch3\beta^{(1)}x+r_6 sh3\beta^{(1)}x+r_7\cos3\beta^{(1)}x+r_8\sin3\beta^{(1)}x+\\ &+s_1\cos ux+s_2\cos vx+s_3\sin ux+s_4\sin vx+\\ &+s_5\cos u_1x+s_6\cos v_1x+s_7\sin u_1x+s_8\sin v_1x \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} Q_1(x)=\ & n\left(ch\overline{\beta^{(1)}}x+\overline{\Gamma_2}sh\overline{\beta^{(1)}}x+\cos\overline{\beta^{(1)}}x+\overline{B_2}\sin\overline{\beta^{(1)}}x\right)+\\ &+n_1chpx+m_1chqx+n_2shpx+m_2shqx+\\ &+n_3\cos px+m_3\cos qx+n_4\sin px+m_4\sin qx+\\ &+n_5\cos p_1x+m_5\cos q_1x+n_6\sin p_1x+m_6\sin q_1x+\\ &+n_7\cos p_2x+m_7\cos q_2x+n_8\sin p_2x+m_8\sin q_2x+\\ &+n_9\cos p_3x+m_9\cos q_3x+n_{10}\sin p_3x+m_{10}\sin q_3x+\\ &+n_{11}\cos p_4x+m_{11}\cos q_4x+n_{12}\sin p_4x+m_{12}\sin q_4x+\\ &+n_{13}\cos p_5x+m_{13}\cos q_5x+n_{14}\sin p_5x+m_{14}\sin q_5x+\\ &+n_{15}\cos p_6x+m_{15}\cos q_6x+n_{16}\sin p_6x+m_{16}\sin q_6x \end{aligned} \tag{30}$$

وبدوره فإن:

$$r_1=\frac{3\left(\beta^{(1)}\right)^2}{4}\left(3-2B_2^2-\Gamma_2^2\right), \quad r_2=r_1\Gamma_2, \quad r_3=\frac{3\left(\beta^{(1)}\right)^2}{4}\left(3-2\Gamma_2^2+B_2^2\right)$$

$$r_4=r_1B_2 \; , \quad r_5=\frac{9\left(\beta^{(1)}\right)^2}{4}\left(1+3\Gamma_2^2\right) \qquad r_6=\frac{9\left(\beta^{(1)}\right)^2\Gamma_2}{4}\left(3+\Gamma_2^2\right)$$

$$r_5=\frac{9\left(\beta^{(1)}\right)^2}{4}\left(1+3\Gamma_2^2\right),\qquad r_6=\frac{9\left(\beta^{(1)}\right)^2\Gamma_2}{4}\left(3+\Gamma_2^2\right),$$
$$r_7=\frac{9\left(\beta^{(1)}\right)^2}{4}\left(1-3B_2^2\right),\qquad r_8=\frac{9\left(\beta^{(1)}\right)^2B_2}{4}\left(3-B_2^2\right)$$

كذلك:

$$s_1=\frac{-3u^2}{4}\left(1-B_2^2+2i\Gamma_2B_2\right),\qquad s_2=\frac{-3v^2}{4}\left(1-B_2^2-2i\Gamma_2B_2\right)$$
$$s_3=\frac{-3u^2}{4}\left(2B_2-i\Gamma_2\left(1-B_2^2\right)\right),\qquad s_4=\frac{-3v^2}{4}\left(2B_2+i\Gamma_2\left(1-B_2^2\right)\right)$$
$$s_5=\frac{3u_1^2}{4}\left(1+\Gamma_2^2+2i\Gamma_2B_2\right),\qquad s_6=\frac{3v_1^2}{4}\left(1+\Gamma_2^2-2i\Gamma_2B_2\right)$$
$$s_7=\frac{3u_1^2}{4}\left(B_2\left(1+\Gamma_2^2\right)-2i\Gamma_2\right),\qquad s_8=\frac{3v_1^2}{4}\left(B_2\left(1+\Gamma_2^2\right)+2i\Gamma_2\right)$$
$$n=\overline{\left(\beta^{(1)}\right)^2}\left(1+\frac{B_2^2}{2}-\frac{\Gamma_2^2}{2}\right),\quad n_1=\frac{p^2}{4}\left(1+\Gamma_2^2+2\Gamma_2\overline{\Gamma_2}\right),\quad m_1=\frac{q^2}{4}\left(1+\Gamma_2^2-2\Gamma_2\overline{\Gamma_2}\right)$$
$$n_2=\frac{p^2}{4}\left(\overline{\Gamma_2}\left(1+\Gamma_2^2\right)+2\Gamma_2\right),\qquad m_2=\frac{q^2}{4}\left(2\Gamma_2-\overline{\Gamma_2}\left(1+\Gamma_2^2\right)\right)$$
$$n_3=\frac{p^2}{4}\left(1-B_2^2-2B_2\overline{B_2}\right),\qquad m_3=\frac{q^2}{4}\left(1-B_2^2+2B_2\overline{B_2}\right)$$
$$n_4=\frac{p^2}{4}\left(\overline{B_2}\left(1-\overline{B_2^2}\right)+2B_2\right),\qquad m_4=\frac{-q^2}{4}\left(\overline{B_2}\left(1-\overline{B_2^2}\right)-2B_2\right)$$
$$n_5=\frac{p_1^2}{4}\left(1+\Gamma_2^2+2i\Gamma_2\overline{B_2}\right),\qquad m_5=\frac{q_1^2}{4}\left(1+\Gamma_2^2-2i\Gamma_2\overline{B_2}\right)$$
$$n_6=\frac{p_1^2}{4}\left(\overline{B_2}\left(1+B_2^2\right)-2i\Gamma_2\right),\qquad m_6=\frac{q_1^2}{4}\left(\overline{B_2}\left(1+B_2^2\right)+2i\Gamma_2\right)$$
$$n_7=\frac{-p_2^2}{4}\left(1-B_2^2+2iB_2\overline{\Gamma_2}\right),\qquad m_7=\frac{-q_2^2}{4}\left(1-B_2^2-2iB_2\overline{\Gamma_2}\right)$$
$$n_8=\frac{p_2^2}{4}\left(i\overline{\Gamma_2}\left(1-B_2^2\right)-2B_2\right),\qquad m_8=\frac{-q_2^2}{4}\left(i\overline{\Gamma_2}\left(1-B_2^2\right)+2B_2\right)$$
$$n_9=\frac{p_3^2}{2}\left(1+i\Gamma_2B_2+i\overline{\Gamma_2}\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right),\qquad m_9=\frac{q_3^2}{2}\left(1+i\Gamma_2B_2-i\overline{\Gamma_2}\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_9=\frac{p_3^2}{2}\left(1+i\Gamma_2B_2+i\overline{\Gamma_2}\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right),\qquad m_9=\frac{q_3^2}{2}\left(1+i\Gamma_2B_2-i\overline{\Gamma_2}\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_{10}=\frac{-p_3^2}{2}\left(i\overline{\Gamma_2}\left(1+i\Gamma_2B_2\right)-\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right),\quad m_{10}=\frac{q_3^2}{2}\left(i\overline{\Gamma_2}\left(1+i\Gamma_2B_2\right)+\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_{11}=\frac{-p_4^2}{2}\left(1+i\Gamma_2\overline{B_2}-\overline{B_2}\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right),\qquad m_{11}=\frac{-q_4^2}{2}\left(1+i\Gamma_2\overline{B_2}+\overline{B_2}\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_{12}=\frac{-p_4^2}{2}\left(\overline{B_2}\left(1+i\Gamma_2B_2\right)+\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right),\quad m_{12}=\frac{q_4^2}{2}\left(\overline{B_2}\left(1+i\Gamma_2B_2\right)-\left(B_2-i\Gamma_2\right)\right)$$

$$n_{13}=\frac{p_5^2}{2}\left(1-i\Gamma_2B_2+i\overline{\Gamma_2}\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right),\qquad m_{13}=\frac{q_5^2}{2}\left(1-i\Gamma_2B_2-i\overline{\Gamma_2}\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_{14}=\frac{-p_5^2}{2}\left(i\overline{\Gamma_2}\left(1-i\Gamma_2B_2\right)-\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right),\quad m_{14}=\frac{q_5^2}{2}\left(i\overline{\Gamma_2}\left(1-i\Gamma_2B_2\right)+\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_{15}=\frac{-p_6^2}{2}\left(1-i\Gamma_2B_2-\overline{B_2}\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right),\qquad m_{15}=\frac{-q_6^2}{2}\left(1-i\Gamma_2B_2+\overline{B_2}\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right)$$
$$n_{16}=\frac{-p_6^2}{2}\left(\overline{B_2}\left(1-i\Gamma_2B_2\right)+\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right),\quad m_{16}=\frac{q_6^2}{2}\left(\overline{B_2}\left(1-i\Gamma_2B_2\right)-\left(B_2+i\Gamma_2\right)\right)$$

حيث:

$$u=2\beta^{(1)}+i\beta^{(1)}\ ,\quad u_1=\bar{u}\ ,\quad v=\beta^{(1)}+2i\beta^{(1)}\ ,\quad v_1=\bar{v}$$
$$p=2\beta^{(1)}+\overline{\beta^{(1)}}\ ,\quad q=2\beta^{(1)}-\overline{\beta^{(1)}}\ ,\quad p_1=\overline{\beta^{(1)}}+2i\beta^{(1)}\ ,\quad q_1=\overline{\beta^{(1)}}-2i\beta^{(1)}$$
$$p_2=2\beta^{(1)}+i\,\overline{\beta^{(1)}},\qquad q_2=2\beta^{(1)}-i\overline{\beta^{(1)}}\ ,\qquad p_3=\beta^{(1)}+i\left(\beta^{(1)}+\overline{\beta^{(1)}}\right)$$
$$q_3=\beta^{(1)}+i\left(\beta^{(1)}-\overline{\beta^{(1)}}\right),\quad p_4=\beta^{(1)}+\overline{\beta^{(1)}}+i\,\beta^{(1)}\ ,\quad q_4=\beta^{(1)}-\overline{\beta^{(1)}}+i\,\beta^{(1)}$$
$$p_5=\beta^{(1)}+i\left(\overline{\beta^{(1)}}-\beta^{(1)}\right),\quad q_5=\beta^{(1)}-i\left(\overline{\beta^{(1)}}+\beta^{(1)}\right)$$
$$p_6=\beta^{(1)}+\overline{\beta^{(1)}}-i\,\beta^{(1)}\ ,\qquad q_6=\beta^{(1)}-\overline{\beta^{(1)}}-i\,\beta^{(1)}$$

هنا $\beta^{(1)}$ تعطى بالعلاقة (12).

- من أجل k=1 نحصل من (28) على:

$$U_1^{(4)}-\frac{\eta\omega^2\left(\mu^2-\mu\,\xi+\omega^2+i\,\xi\omega\right)}{(1-A)\left[(\mu-\xi)^2+\omega^2\right]}U_1=\alpha_2Q(x)\tag{31}$$

حل المعادلة (31) يعطى بالشكل:

$$U_1=C_1ch\beta^{(1)}x+C_2sh\beta^{(1)}x+C_3\cos\beta^{(1)}x+C_4\sin\beta^{(1)}x+G(x)\tag{32}$$

هنا $G(x)$ حل خاص للمعادلة (31) له الشكل:

$$G(x)=\frac{\alpha_2n\,x}{4\overline{\beta^{(1)}}}\left(\overline{\Gamma_2}ch\overline{\beta^{(1)}}x+sh\overline{\beta^{(1)}}x+\overline{B_2}\cos\overline{\beta^{(1)}}x-\sin\overline{\beta^{(1)}}x\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{p^4-m}\left(n_1chpx+n_2shpx+n_3\cos px+n_4\sin px\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{q^4-m}\left(m_1chqx+m_2shqx+m_3\cos qx+m_4\sin qx\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{p_1^4-m}\left(n_5\cos p_1x+n_6\sin p_1x\right)+\frac{\alpha_2}{q_1^4-m}\left(m_5\cos q_1x+m_6\sin q_1x\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{p_2^4-m}\left(n_7\cos p_2x+n_8\sin p_2x\right)+\frac{\alpha_2}{q_2^4-m}\left(m_7\cos q_2x+m_8\sin q_2x\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{p_3^4-m}\left(n_9\cos p_3x+n_{10}\sin p_3x\right)+\frac{\alpha_2}{q_3^4-m}\left(m_9\cos q_3x+m_{10}\sin q_3x\right)+$$

$$+\frac{\alpha_2}{p_4^4-m}\left(n_{11}\cos p_4x+n_{12}\sin p_4x\right)+\frac{\alpha_2}{q_4^4-m}\left(m_{11}\cos q_4x+m_{12}\sin q_4x\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{p_5^4-m}\left(n_{13}\cos p_5x+n_{14}\cos q_5x\right)+\frac{\alpha_2}{q_5^4-m}\left(m_{13}\cos q_5x+m_{14}\sin q_5x\right)+$$
$$+\frac{\alpha_2}{p_6^4-m}\left(n_{15}\cos p_6x+n_{16}\sin p_6x\right)+\frac{\alpha_2}{q_6^4-m}\left(m_{15}\cos q_6x+m_{16}\sin q_6x\right) \qquad (33)$$

حيث:

$$m=\frac{\eta\omega^2\left(\mu^2-\mu\xi+\omega^2+i\xi\omega\right)}{(1-A)\left[(\mu-\xi)^2+\omega^2\right]}, \qquad \alpha_2=\frac{\alpha(\mu-i\omega)}{\mu-i\omega-\xi}$$

انطلاقا من الشروط الحدية (26)، من أجل تعيين الدالة $U_1(x)$ لدينا الشروط الحدية الآتية:

$$\frac{\partial^2U_1(1)}{\partial x^2}=\frac{\partial^3U_1(1)}{\partial x^3}=0 \quad \text{و} \quad U_1(0)=\frac{\partial^2U_1(0)}{\partial x^2}=0 \qquad (34)$$

نحسب الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 من الشروط (34)، عندئذٍ من أجل الدالة $U_1(x)$ نحصل على:

$$U_1(x)=L_5(x)+iL_6(x) \qquad (35)$$

حيث:

$$L_5(x)=\mathrm{Re}\left[N_1ch\beta^{(1)}x+N_2sh\beta^{(1)}x+N_3\cos\beta^{(1)}x+N_4\sin\beta^{(1)}x+G(x)\right]$$
$$L_6(x)=\mathrm{Im}\left[N_1ch\beta^{(1)}x+N_2sh\beta^{(1)}x+N_3\cos\beta^{(1)}x+N_4\sin\beta^{(1)}x+G(x)\right]$$

وبدوره:

$$N_1=\frac{-1}{2\left(\beta^{(1)}\right)^2}\left(G''(0)+\left(\beta^{(1)}\right)^2G(0)\right) \text{ ، } N_3=\frac{1}{2\left(\beta^{(1)}\right)^2}\left(G''(0)-\left(\beta^{(1)}\right)^2G(0)\right)$$

$$N_2=\frac{1}{sh\beta^{(1)}}\left(N_3\cos\beta^{(1)}-N_1ch\beta^{(1)}+N_4\sin\beta^{(1)}-\frac{G''(1)}{\left(\beta^{(1)}\right)^2}\right)$$

$$N_4=\frac{1}{\cos\beta^{(1)}-cth\beta^{(1)}\sin\beta^{(1)}}\left\{\left(\frac{G'''(1)}{\left(\beta^{(1)}\right)^3}-\frac{cth\beta^{(1)}}{\left(\beta^{(1)}\right)^2}G''(1)\right)+\right.$$
$$\left.+N_1\left[sh\beta^{(1)}-ch\beta^{(1)}cth\beta^{(1)}\right]+N_2\left[\sin\beta^{(1)}+cth\beta^{(1)}\cos\beta^{(1)}\right]\right\}$$

- من أجل k=3 نحصل من (28) على:

$$U_3^{(4)}-\frac{9\eta\omega^2(\mu-3i\omega)}{(1-A)(\mu-3i\omega-\xi)}U_3=\alpha_3Q_1(x) \qquad (36)$$

حل المعادلة (36) يعطى بالشكل:

$$U_3=C_5ch\zeta^{(1)}x+C_6sh\zeta^{(1)}x+C_7\cos\zeta^{(1)}x+C_8\sin\zeta^{(1)}x+Z(x) \qquad (37)$$

حيث:

$$\zeta^{(1)}=-\zeta^{(2)}=f_1+ig_1, \qquad \zeta^{(3)}=-\zeta^{(4)}=i\zeta^{(1)}$$

وبدوره فإن:

$$f_1=\sqrt{\frac{\sqrt{e^2+d^2}+e}{2}}, \qquad g_1=\sqrt{\frac{\sqrt{e^2+d^2}-e}{2}}$$

$$e=\sqrt{\frac{\sqrt{a^{*2}+b^{*2}}+a^*}{2}}\ ,\qquad v=\sqrt{\frac{\sqrt{a^{*2}+b^{*2}}-a^*}{2}}$$

$$a^*=\mathrm{Re}\frac{9\eta\gamma_k^2(\mu-3i\omega)}{(1-A)[\mu-3i\omega-\xi]}\ ,\qquad b^*=\mathrm{Im}\frac{9\eta\gamma_k^2(\mu-3i\omega)}{(1-A)[\mu-3i\omega-\xi]}$$

$Z(x)$ حل خاص للمعادلة (36) يعطى بالشكل:

$$\begin{aligned}Z(x)=&\frac{\alpha_3}{\left(\beta^{(1)}\right)^4-m^*}\left(r_1ch\beta^{(1)}x+r_2sh\beta^{(1)}x+r_3\cos\beta^{(1)}x+r_4\sin\beta^{(1)}x\right)+\\&+\frac{\alpha_3}{81\left(\beta^{(1)}\right)^4-m^*}\left(r_5ch3\beta^{(1)}x+r_6sh3\beta^{(1)}x+r_7\cos3\beta^{(1)}x+r_8\sin3\beta^{(1)}x\right)+\\&+\frac{\alpha_3}{u^4-m^*}\left(s_1\cos ux+n_3\sin ux\right)+\frac{\alpha_3}{v^4-m^*}\left(s_2\cos vx+s_4\sin vx\right)+\\&+\frac{\alpha_3}{u_1^4-m^*}\left(s_5\cos u_1x+s_7\sin u_1x\right)+\frac{\alpha_3}{v_1^4-m^*}\left(s_6\cos v_1x+s_8\sin v_1x\right)+\end{aligned}$$

حيث:

$$m^*=\frac{9\eta\omega^2(\mu-3i\omega)}{(1-A)[\mu-3i\omega-\xi]}\ ,\qquad \alpha_3=\frac{\alpha_1(\mu-3i\omega)}{\mu-3i\omega-\xi}$$

نحسب الثوابت $C_5\,,C_6\,,C_7\,,C_8$ من الشروط:

$$\frac{\partial^2U_3(1)}{\partial x^2}=\frac{\partial^3U_3(1)}{\partial x^3}=0\quad \text{و}\quad U_3(0)=\frac{\partial^2U_3(0)}{\partial x^2}=0$$

التي تنتج من الشروط الحدية (26). عندئذٍ من أجل الدالة $U_3(x)$ نحصل على:

$$U_3(x)=L_7(x)+iL_8(x)\tag{38}$$

حيث:

$$\begin{aligned}L_7(x)&=\mathrm{Re}\left[N_5ch\zeta^{(1)}x+N_6sh\zeta^{(1)}x+N_7\cos\zeta^{(1)}x+N_8\sin\zeta^{(1)}x+Z(x)\right]\\L_8(x)&=\mathrm{Im}\left[N_5ch\zeta^{(1)}x+N_6sh\zeta^{(1)}x+N_7\cos\zeta^{(1)}x+N_8\sin\zeta^{(1)}x+Z(x)\right]\end{aligned}$$

وبدوره:

$$N_5=\frac{-1}{2\left(\zeta^{(1)}\right)^2}\left(Z''(0)+\left(\zeta^{(1)}\right)^2Z(0)\right)\ ،\ N_7=\frac{1}{2\left(\zeta^{(1)}\right)^2}\left(Z''(0)-\left(\zeta^{(1)}\right)^2Z(0)\right)$$

$$N_6=\frac{1}{sh\zeta^{(1)}}\left(N_7\cos\zeta^{(1)}-N_5ch\zeta^{(1)}+N_8\sin\zeta^{(1)}-\frac{Z''(1)}{\left(\zeta^{(1)}\right)^2}\right)$$

$$\begin{aligned}N_8=&\frac{1}{\cos\zeta^{(1)}-cth\zeta^{(1)}\sin\zeta^{(1)}}\left\{\left(\frac{Z'''(1)}{\left(\zeta^{(1)}\right)^3}-\frac{cth\zeta^{(1)}}{\left(\zeta^{(1)}\right)^2}Z''(1)\right)+\right.\\&\left.+N_5\left[sh\zeta^{(1)}-ch\zeta^{(1)}cth\zeta^{(1)}\right]+N_7\left[\sin\zeta^{(1)}+cth\zeta^{(1)}\cos\zeta^{(1)}\right]\right\}\end{aligned}$$

بتعويض (35) و (38) في (27) فإن الحل النهائي للمسألة (6) ، (26) سيأخذ الصيغة :

$$W_{2,0}(x,t) = 2\left[L_5^2(x) + L_6^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(\omega t - \theta(x,\omega)\right) + \\ + 2\left[L_7^2(x) + L_8^2(x)\right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(3\omega t - \theta_1(x,\omega)\right) \quad (39)$$

حيث: $\theta(x,\omega)$ توافق الحالة k=1، وبدوره $\theta_1(x,\omega)$ توافق الحالة k=3 في (27). أما من أجل بقية القيم (k=0,2,4,5,…) فإننا نحصل على حلول صفرية.

$$\theta(x,\omega) = arctg\,\frac{L_6(x)}{L_5(x)} + \begin{cases} 0\ ; & L_5 > 0 \\ \pi\ ; & L_5 < 0 \end{cases}$$

$$\theta_1(x,\omega) = arctg\,\frac{L_8(x)}{L_7(x)} + \begin{cases} 0\ ; & L_7 > 0 \\ \pi\ ; & L_7 < 0 \end{cases}$$

تجدر الإشارة إلى أنه من أجل $(\xi \to 0)$ نحصل على تابع التقوس للقضيب في الحالة المرنة [14].

الاستنتاجات والتوصيات:

- تم بالاعتماد على معادلات الحركة لقضيب عند الثني، حيث مادة القضيب مرنة لزجة لاخطية، حل مسائل الاهتزازات العرضانية مع الأخذ بعين الاعتبار وجود العامل البيولوجي
- تم بناء الحل بالاعتماد على طريقة البارامترات الصغيرة. حيث قاد مجرى المسألة إلى حل المعادلات التفاضلية الناتجة، بحيث تم البحث عن تلك الحلول على شكل سلسلة توافقية.
- وتم الحصول من أجل بعض التقريبات الأولى من السلسلة على مجموعة مترابطة من المعادلات التفاضلية، كتبت حلولها في عبارات تحليلية لها صيغ موحدة. وهذا يعتبر مهم جداً عند وضع برنامج على الحاسوب وإجراء الحسابات العددية.

المراجع:

1. Munteanu L., Delsanto P.P., Dumitriu D., Mosnegutu V. On the characterization of auxetic materials , Research Trends in Mechanics. V. 2. Ed. Academiei. 2008. P. 21–41.
2. Gonzalez_Lopez S., Fernandez_Saez J. Bending Vibrations of Euler-Bernoulli Beams Treated with Non-Local Damping Patches , Proc. 10th Int. Conf. Comput. Struct. Technology, Eds B.H.V. Topping et al. 2010, P. 341
3. Reddy J.N. Nonlocal continuum theories for buckling, bending and vibration of beams , Int. J. Engng Sci. 2007. V. 45. № 2–8. P. 288–307.
4. Thai, Huu_Tai. A nonlocal beam theory for bending, buckling and vibration of nanobeam , Int. J.Engng Sci. 2012. V. 52. № 3. P. 56–64.
5. Беляев А .К , Морозов Н. Ф, Товстик П.Е, Товстик Т. П. Параметре_ ческие резонансы в задаче о продольном ударе по Тонком стержню. Вестн СПБГУ сер.1.2016. №1, С. 77_ 94.
6 . Беляев А .К , Морозов Н. Ф, Товстик П.Е, Товстик Т. П. Статика и динамика стержня при продольном сжатии . 7 Поляховские чтения 2015, СПб. Тезисы. С. 9
7. Беляев А .К , Морозов Н. Ф, Товстик П.Е, Товстик Т. П. Задача Левревтева – Ишленского. Развитие Идеи. Тр. Всерос. Съезда по теор . и прикл. Механике. Казань. 2015.

8. С. Е. Александров, Р. В. Гольдштейн. Движение жесткого стержня в жестокопластической среде: влияние типа модели на поведение решения МТТ- 2015. № 4 p, 28- 37
9. Nikitine L. V. An elastic biological body model, IZV .AH CCCP, MTT- 1971. N˚3 P, 145-15
10. Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanic in solid media. Moscow. Since, 1977. 382P.
11. Akuhundov M. B., Rabotnov Yu. N., Suvorova Yu. V. A deformable body model with reaction and application in dynamic problems of biological mechanic, IZV .AH CCCP, MTT- 1985. N˚6 P, 96-100
12. Archinov G. A. longitudinal nonlinear waves in viscoelastic bars, tabulars and cylindrical incrustation . Since, KUBGAU, N81 , 2012. 15 P
13. Hasan Khalifeh,. One-dimensional wave propagation in viscoelastic media with reaction. CCCP, Baku 1993. 164 P
14. Specification of cross nonlinear vibration of elastic affective bar. . Hasan khalifeh. Journal of Tishreen university, Vo (36). № (1) 2014.
15. Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanic in solid media. Moscow. Since, 1977. 382P.
16. G.A.Koloweski., A.P. Chokanova Modern Problems in Mathematics "Nonlinear Small Amplitude Waves in Elastic Media" P, 19-32 , MIAN, Moscow 2007.
17- Gradowzky M. N. On the accuracy of the Green-Revlon presentation for viscoelastic solids structures. 1969. V.5.

18- Блитштейн Ю. М. К определению реологических параметров в квазистатических задачах нелинейной теории вязкоупругости, Прикладная механика. 1972. Т. УШ, В. 3. С.68–72.
19– Бугров Я. С. Николъский Ю. М. Дифференциалъные уравнения, Высшая математика. М. Наука, 1989. -464 с.