مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (2) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (2) 2018

استخدام حلقات شور في إيجاد زمرة أتومورفيزم بيان كيلي من الرتبة pq حيث $p \neq q$ عددان أوليان

د. اسكندر علي[1]
عهد حسون[2]

(تاريخ الإيداع 3 / 12 / 2017. قُبِل للنشر في 22 / 4 /2018)

□ ملخّص □

قمنا في هذا البحث بتحديد زمرة أتومورفيزم بيان كيلي $Cay(\mathbf{Z}_{pq},Q)$ فوق الزمرة $\mathbf{Z}_{pq}$ حيث $p \neq q$ عددان أوليان مع مجموعة اتصال $Q \subset \mathbf{Z}_{pq}$ كيفية، وذلك من خلال بناء حلقة شور المولدة بمجموعة الاتصال Q، ثم تحديد زمرة أتومورفيزم هذه الحلقة و التي هي زمرة أتومورفيزم هذا البيان. وقد قمنا أيضا بتقديم أمثلة على ذلك في نهاية هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: بيان كيلي، زمرة أتومورفيزم، حلقة شور.

[1] استاذ – قسم الرياضيات. كلية العلوم. جامعة تشرين. اللاذقية . سورية.
[2] طالب دراسات عليا(دكتوراه).كلية العلوم. قسم الرياضيات. جامعة تشرين. اللاذقية. سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (2) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (2) 2018

Using Schur rings to find the automorphism group of Cayley graph of order $p.q$ where $p \neq q$ are prime numbers

Dr . Eskander Ali[1]
Ahed Hassoon[2]

(Received 3 / 12 / 2017. Accepted 22 / 4 /2018)

□ ABSTRACT □

In this paper we determine the automorphism group of Cayley graph $Cay(\mathbf{Z}_{pq},Q)$ over the group $\mathbf{Z}_{pq}$ where $p \neq q$ are prime numbers, by building the corresponding Schur ring which is generated by Q , and determine the automorphism group of this ring which is the automorphism group of this graph $Cay(\mathbf{Z}_{pq},Q)$

Key words: Cayley graph, Automorphism group, Schur ring.

[1] **Prof of Mathematics. Department of Mathematics. fac of science. Tishreen University. Lattakia. Syria.**
[2] **Ph-student. Department of Mathematics. fac of science. Tishreen University. Lattakia. Syria.**

مقدمة:

لتكن H زمرة واحدتها e، و $Q \subseteq H$ مجموعة جزئية بحيث $e \notin Q$ ، إن بيان كيلي $\Gamma = Cay(H,Q)$ فوق الزمرة H مع مجموعة اتصال Q هو بيان مجموعة رؤوسه $V(\Gamma) = H$ و مجموعة أضلاعه $E(\Gamma) = \{(x,y) \in H \times H : y.x^{-1} \in Q\}$. نرمز بـ H_R لزمرة التمثيل القانوني الأيمن للزمرة H، وهي مجموعة التباديل h_R ذات الشكل $h_R : H \to H; h_R(x) = xh$ لأجل كل $h \in H$ و $x \in H$. ونرمز بـ $Sym(H)$ لزمرة التباديل على H، و بـ $N_{Sym(H)}(H_R)$ لمنظم الزمرة H_R في الزمرة $Sym(H)$. إن الزمرة $\mathrm{H}(H) = N_{Sym(H)}(H_R)$ تسمى هولومورف الزمرة H. وهنا إن $\mathrm{H}(H) = (Aut\,H)H_R$.

نرمز بـ $Aut(\Gamma)$ لزمرة أتومورفيزم البيان Γ، وهي مجموعة التباديل $f \in Sym(H)$ التي تحقق: $(x,y) \in E(\Gamma) \Leftrightarrow (x^f,y^f) \in E(\Gamma)$. وهنا تكون زمرة أتومورفيزم بيان كيلي $Cay(H,Q)$ تحوي الزمرة الجزئية القانونية H_R.

هنالك مدخلان لدراسة زمرة أتومورفيزم بيان كيلي الأول يعتمد كلياً على نظرية الزمر والذي يعمل به كل من B. Alspach ، T. Parsons ، L. Babai ، C. Godsil في [8,9,10,11,12,13]

بينما يعتمد المدخل الثاني على نظرية الحلقات وتحديداً حلقات شور التي بدأت على يد الألماني I. Schur سنة 1934، وأصبحت خلال السنوات الأخيرة الطريقة الوحيدة التي يعمل بها كثير من الباحثين في دراسة خواص بيانات كيلي من رتب عالية.

إن مسألة تحديد زمرة أتومورفيزم بيان ما والتي تعرف بمسألة König طرحت منذ مطلع القرن الماضي، عندما طرح König في [6] التساؤل التالي: متى زمرة مجردة يمكن أن تكون زمرة أتومورفيزم لبيان ما وبالعكس إذا اعطينا بيان ما كيف يمكننا إيجاد زمرة أتومورفيزم هذا البيان. وقد درس كثير من الباحثين هذه المسألة ونظرا لصعوبة الحالة العامة فقد تم التركيز على بيانات كيلي فوق زمرة H التي تحقق أن زمرة أتومورفيزماتها تحوي الزمرة H_R.

أهمية البحث و أهدافه:

في هذا البحث سوف نقوم بتحديد زمرة الأتومورفيزم لبيان كيلي فوق الزمرة الدائرية $\mathbf{Z}_n$ مع $n = pq$ حيث $p \neq q$ عددان أوليان مختلفان، وذلك باستخدام حلقات شور التي أول من طرحها الألماني I.schur [17]، من ثم H. Wielandt سنة 1964[18]، وقدم كل من M.Klin و R. Pöschel الكثير من الأعمال حول حلقات شور وتطبيقاتها منذ العام1980. كما تابع بذلك Shiu, Wai-chee سنة 1992 بدراسة البناء الجبري لحلقات شور لأجل بعض الرتب[7]. وقام M.Muzychuk سنة 1992 بدراسة مجموعات القاعدة لحلقة شور [15]. كما قام بدراسة استخدام حلقات شور في حل مسألة أيزومورفيزم بيان كيلي لأجل أنواع محددة من الزمر.

طرائق البحث ومواده

1-حلقات شور(Schur- Rings):

لتكن H زمرة واحدتها e، نرمز بـ $\mathbb{C}H$ لجبر الزمرة H فوق حقل الأعداد العادية $\mathbb{C}$ والذي يعرف بأنه مجموعة جميع التراكيب الخطية ذات الشكل $\sum_{h\in H} a_h\underline{h}$ مع $a_h \in \mathbb{C}$ ((إن $\underline{h} = h \in H$ لكن هنا تميز كعنصر من الجبر)) مع عملية الجمع المعرفة بالشكل:

$$\sum_{h\in H} a_h\underline{h} + \sum_{h\in H} b_h\underline{h} := \sum_{h\in H}(a_h + b_h)\underline{h}$$

وعملية الجداء المعرفة بالشكل:

$$\left(\sum_{h\in H} a_h\underline{h}\right) * \left(\sum_{k\in H} b_k\underline{k}\right) := \sum_{h\in H}\sum_{k\in H}(a_h b_h)(\underline{h+k}) = \sum_{h\in H}\left(\sum_{k\in H} a_{hk^{-1}} b_k\right)\underline{h}$$

مع عملية الجداء السلمي: $a\left(\sum_{h\in H} a_h\underline{h}\right) := \sum_{h\in H}(a a_h)\underline{h}$ حيث $a \in \mathbb{C}$.

العناصر ذات الشكل $\underline{T} = \sum_{h\in T} a_h\underline{h}$ حيث $a_h = 1$ في حال $h \in T$ و $a_h = 0$ غير ذلك، لأجل كل $T \subseteq H$ تسمى عوامل بسيطة. وبالتالي تصبح $\underline{H} = \sum_{h\in H}\underline{h}$.

كما يعرف منقول العنصر $h = \sum_{h\in H} a_h\underline{h}$ بأنه العنصر $h^{\wedge} = \sum_{h\in Z_n} a_h(\underline{h^{-1}})$.

1-1- تعريف [17] :

الجبر الجزئي A في $\mathbb{C}H$ يسمى حلقة شور (أو S–حلقة) من القياس r ($rank(\mathrm{A}) = r$) فوق الزمرة H إذا تحققت الشروط التالية:

1- إن A كفضاء شعاعي تملك قاعدة من العوامل البسيطة $\underline{T_0}, \underline{T_1}, \dots, \underline{T_r}$ أي أن $\mathrm{A} = \langle \underline{T_0}, \underline{T_1}, \dots, \underline{T_r} \rangle$ حيث $T_i \subseteq H$ لأجل كل $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

2- إن $T_0 = \{0\}$ و $H = \bigcup_{i=0}^{r} T_i$

3- لأجل كل $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ يوجد $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ بحيث أن $\underline{T_i}^{\wedge} = \underline{T_j}$.

العوامل البسيطة $\underline{T_i}$ تسمى عناصر قاعدة A والمجموعات المقابلة T_i تسمى مجموعات القاعدة ونرمز لها بـ: $Bs(\mathrm{A}) = \{T_0, T_1, \dots, T_r\}$. وبالتالي إن S–حلقة A' جزئية في A هي S– حلقة بحيث أن كل عنصر من A' هو مجموع لعناصر بسيطة من $Bs(\mathrm{A})$. كما إن كل عنصر $z \in H$ ينتمي إلى مجموعة قاعدة وحيدة فقط والتي يرمز لها بـ $T_{(z)}$ أو $T^{S}_{(z)}$.

لأجل $I, J \subseteq H$ و $T = \sum_{h\in I} a_h\underline{h}$, $T' = \sum_{h\in J} b_h\underline{h}$ يعرف جداء Schur-Hadmard على $\mathbb{C}H$ للعنصرين T, T' بالشكل:

$$T \circ T' = \left(\sum_{h\in I} a_h\underline{h}\right) \circ \left(\sum_{h\in J} b_h\underline{h}\right) := \sum_{h\in I\cap J}(a_h b_h)\underline{h}$$

وقد بين M.Muzychuk في [15] أن الجبر الجزئي A في ¤ H هو S – حلقة فوق H إذا وفقط إذا كانت A خ $\underline{H}$, $\underline{e}$ و A مغلقة بالنسبة للعمليتين o , ^ المعرفتين سابقاً.

لتكن Q ح H مجموعة جزئية، نرمز بـ $\langle\langle Q \rangle\rangle$ لتقاطع جميع S– حلقات A فوق H مع A خ $\underline{Q}$ وتسمى حلقة شور المولدة بالمجموعة Q. ومن أجل كل ¤ خ q نعرف التطبيق التالي $I_q(\sum_{h \in H} a_h \underline{h}) = \sum_{h \in H} a_h^{q} \underline{h}$ وهنا لدينا المبرهنة الهامة في تحديد S–حلقات $\langle\langle Q \rangle\rangle$.

1–2– مبرهنة مبدأ Schur–Hadmard: إذا كانت A –S حلقة فوق زمرة H، عندئذ A خ $I_q(z)$ لأجل كل A خ z و ¤ خ q.

لأجل A –S حلقة فوق زمرة H و $K \le H$ زمرة جزئية ، نقول أن K هي A –زمرة إذا كانت A خ $\underline{K}$. بالتالي كل من $\{e\}$ و H هي A –زمرة. فإذا كانت K هي A –زمرة جزئية في H، عندئذ يكون الجبر الجزئي $A_K = A \cap ¤H$ هو S–حلقة فوق Kوتسمى حلقة شور الجزئية في A المحدثة بـ K. وتكون $Bs(A_K) = \{T \in Bs(A) : T \subseteq K\}$. وفي حال كانت A –زمرة K جزئية في H بحيث أن H) K يعرف عندئذ عامل S– حلقة A ويرمز له بـ $A_{H/K}$ فوق الزمرة H/K بأنه S– حلقة فوق H/Kجزئية في A بحيث أن $Bs(A_{H/K}) = \{T/K : T \in Bs(A)\}$.

إذا كانت G زمرة مؤثرة على مجموعة ما H عندئذ يعرف مدار العنصر H خ h بأنه $\{g(h) : g \in G\}$ وتعرف الزمرة المثبتة للعنصر H خ h بالشكل: $G_h = \{g \in G : g(h) = h\}$ وهي زمرة جزئية في الزمرة G.

لتكن الآن الزمرة G بحيث $H_R \le G \le Sym(H)$ ولتكن $T_1 = \{e\}, T_2, \ldots, T_r$ مدارات الزمرة المثبتة G_e لـ e في G، عندئذ يكون الفضاء الجزئي $\langle \underline{T_0}, \underline{T_1}, \ldots, \underline{T_r} \rangle$ هو حلقة شور فوق H وهذه النتيجة برهنها I.Schur في [17]، وتسمى المودول المتعدي فوق H المحدث بـ G_e. ويرمز له بـ $V(H,G_e)$ وهنا ليست كل S– حلقة فوق H يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة. ونقول أن S– حلقة Aفوق زمرة H هي حلقة شوريانية ($Shurian\ S-ring$) إذا كانت $A = V(H,G_e)$ لأجل زمرة ما G بحيث أن $H_R \le G \le Sym(H)$.

1–3– الجداء المجدول والجداء المباشر:

لتكن A هي S– حلقة فوق زمرة Hو لتكن $E,F \le H$ هي A –زمر جزئية في H بحيث:

1– $H = E.F$ و $E \cap F = \{e\}$

2– كل $T \in Bs(A)$ هي $T = RS$ مع $R \in Bs(A_E)$ و $S \in Bs(A_F)$.

عندئذ تكون A هي جداء مباشر لـ A_E مع A_F ونكتب في هذه الحالة $A = A_E \times A_F$.

وإذا كانت E) H وكل $T \in Bs(A)$ هي إما $T \subseteq E$ أو $T = TE$ اجتماع صفوف ملاصقة لـ E فإن A هي جداء مجدول لـ A_E مع $A_{H/E}$ ونكتب $A = A_E \wr A_{H/E}$

وهنا نجد مباشرة أنه إذا كانت $H = E.F$ و $E \cap F = \{e\}$ حيث $E,F \le H$ هي A –زمر جزئية في H وكانت $A_E = ¤E$ أو $A_F = ¤F$ فإن $A = A_E \times A_F$.

2- زمرة أتومورفيزم حلقة شور:

إذا كانت $\mathcal{A} = \langle \underline{T_0}, \underline{T_1}, \ldots, \underline{T_r} \rangle$ هي S- حلقة فوق H عندئذ يسمى التبديل $g : H \to H$ أتومورفيزم لـ $\mathcal{A}$ إذا كان أتومورفيزماً لكل $\Gamma_i = Cay(H, T_i)$ وبالتالي تكون

$Aut(\mathcal{A}) = \bigcap_{i=0}^{r} Aut(\Gamma_i)$ هي زمرة أتومورفيزم الحلقة $\mathcal{A}$. وهنا نلاحظ أن $g \in Aut(\mathcal{A})$ إذا وفقط إذا كان يحقق $u^g - v^g \in T \Leftrightarrow u - v \in T$ لأجل كل $T \in Bs(\mathcal{A})$.

وقد برهن R. POOSCHEL في [16] ما يعرف بتقابلات غالوا التي تعرف العلاقة بين حلقات شور فوق زمرة H وبين زمر التباديل G حيث $H_R \leq G \leq Sym(H)$ وفق المبرهنة التالية:

2-1-مبرهنة [16]: إذا كانت كل من $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ هي S- حلقة فوق الزمرة H وكانت G و K زمرتان حيث $H_R \leq G, K \leq Sym(H)$ عندئذ يتحقق مايلي:

1- $\mathcal{A} \geq \mathcal{B} \Leftrightarrow Aut(\mathcal{A}) \leq Aut(\mathcal{B})$

2- $G \leq K \Leftrightarrow V(H, G_e) \supseteq V(H, K_e)$

3- $Aut(V(H, G_e)) = G$

النتائج والمناقشة:

نذكر الآن بالمبرهنة الأساسية التي تربط بين زمرة أتومورفيزم بيان كيلي وبين حلقة شور المولدة بمجموعة اتصال هذا البيان.

3- مبرهنة: لتكن H زمرة ما و $Q \subseteq H$ مجموعة جزئية ، عندئذ $Aut\,Cay(H,Q) = Aut\langle\langle Q \rangle\rangle$

البرهان: لتكن $G = Aut\,Cay(H,Q)$ و $\mathcal{A} = V(H, G_e)$ وبما أن $Q \subseteq H$ فإن $Q = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ لأجل $T_i \in Bs(\langle\langle Q \rangle\rangle)$ وبالتالي $Aut\langle\langle Q \rangle\rangle \leq \bigcap_{i=1}^{k} Aut\,Cay(H, T_i) \leq G$

ولكن حسب (2-1) إن $G = Aut(\mathcal{A})$ وبما أن $\underline{Q} \in \mathcal{A}$ بالتالي $G = Aut(\mathcal{A}) \leq Aut\langle\langle Q \rangle\rangle$

4-نتيجة: لتكن $Q \subseteq \mathbf{Z}_n$ إذا كانت $\langle\langle Q \rangle\rangle \neq \underline{1}$ فإن $AutCay(\mathbf{Z}_n, Q) = \mathbf{Z}_n$

البرهان: $\langle\langle Q \rangle\rangle \neq \underline{1}$ تعني أن $\langle Q \rangle \neq 1$ لكن $|H : \langle Q \rangle| = 1$ لكن $Q \subseteq H$ بالتالي $H = \langle Q \rangle$ وبالتالي $Aut\,Cay(\mathbf{Z}_n, Q) = Aut\langle\langle Q \rangle\rangle = \mathbf{Z}_n$

5- حلقات شور فوق $\mathbf{Z}_n$:

لنأخذ الزمرة الدائرية $H = \mathbf{Z}_n$ ولتكن $\mathrm{P}(n)$ مجموعة الاعداد الأولية مع n. فهي كزمرة تباديل تؤثر على $\mathbf{Z}_n$ بالشكل: $x \to x.a$ لكل $x \in \mathbf{Z}_n$ و $a \in \mathrm{P}(n)$.

ويكون هولومورف الزمرة $\mathbf{Z}_n$ هو $\mathrm{H}(\mathbf{Z}_n)=\mathrm{N}_{Sym(H)}((\mathbf{Z}_n)_R)=\mathrm{P}(n)(\mathbf{Z}_n)_R$ حيث أن $\mathrm{P}(n)=Aut(\mathbf{Z}_n)$ وتكون الزمر الجزئية $G\le \mathrm{H}(\mathbf{Z}_n)$ المتعدية لها الشكل $G=A.(\mathbf{Z}_n)_R$ حيث $A\le \mathrm{P}(n)$ زمرة جزئية. ويتحقق هنا أن $\mathrm{N}_{Sym(\mathbf{Z}_n)}(G)=\mathrm{H}(\mathbf{Z}_n)$

5−1− تعريف: لتكن A هي S −حلقة فوق $\mathbf{Z}_n$ و لتكن $D_n=\{d_0,d_1,\dots,d_{k-1}\}$ مجموعة كل قواسم العدد n غير المساوية للعدد n. نضع $d_0=1$ ولأجل كل $K\subset \mathbf{Z}_n$ نعرف المجموعة $K/d=\{x\in K: \mathrm{g.c.d}(x,n)=d\}$ و العلاقة الثنائية $Q(\mathrm{A})$ على D_n بالشكل التالي $(d,d')\in Q(\mathrm{A}) \Leftrightarrow T_{(d)}/d'\neq\emptyset$ لأجل كل $d,d'\in D_n$ هي علاقة تكافؤ، وتسمى علاقة التكافؤ الأساسية لـ A. و تعرف الزمر الجزئية في $\mathrm{P}(n)$ المقابلة لها بالشكل التالي $A_d=\{x\in \mathrm{P}(n)\,;T_{(d)}.\,x=T_{(d)}\}$ لأجل كل $d\in D(n)$. وعندئذ:

$\underline{\underline{C}}(\mathrm{A})=\langle A_{d_0},A_{d_1},A_{d_2},\dots,A_{d_{k-1}},Q\rangle$ تسمى نظام مقابل لـ S−حلقة A فوق $\mathbf{Z}_n$ ، حيث أن :

$$A_{d_i}=A_{d_j} \Leftrightarrow (d_i,d_j)\in Q(\mathrm{A}) \quad \text{و} \quad T_{d_i}=\bigcup_{(d_i,d_j)\in Q(\mathrm{A})} A_{d_i}.d_j$$

في حالة $n=p$: لدينا علاقة تكافؤ واحدة $Q=\{(1,1)\}$ وبالتالي لأجل كل زمرة جزئية $H=H_d$ في $\mathrm{P}(n)=\mathbf{Z}_p^*=\{1,2,\dots,p-1\}$ من الرتبة d يوجد S−حلقة وحيدة مقابلة فوق $\mathbf{Z}_p$ لها الشكل: $\mathrm{A}_d=\langle \underline{0},\underline{H},\underline{y_2H},\dots,\underline{y_lH}\rangle$ حيث $H,y_2H\dots,y_lH$ هي الصفوف الملاصقة المختلفة لـ H في $\mathbf{Z}_p^*$ مع $l=\dfrac{p-1}{d}$. وبالتالي هناك $s(p)$ حلقة شور فوق $\mathbf{Z}_p$ حيث $s(p)$ يمثل عدد قواسم العدد $p-1$ وبالتالي نجد المبرهنة التالية:

5−2−مبرهنة: أن

$$Aut(\mathrm{A}_d)=\begin{cases}\mathbf{Z}_p.H_d & : d<p-1\\ Sym(\mathbf{Z}_p) & : d=p-1\end{cases}$$

حيث H_d زمرة جزئية في $\mathbf{Z}_p^*$ من الرتبة d و d قاسم للعدد $p-1$.

البرهان: لأجل d قاسم للعدد $p-1$ مع $d\neq p-1$ تكون

$\mathrm{A}_d=\langle \underline{0},\underline{H},\underline{y_2H},\dots,\underline{y_lH}\rangle=V(\mathbf{Z}_p,(\mathbf{Z}_p.H_d)_e)$ ومنه $Aut(\mathrm{A}_d)=\mathbf{Z}_p.H_d$ حسب المبرهنة (1−2)

وعندما $d=p-1$ فإن $\mathrm{A}_d=\langle \underline{0}\,,\ \underline{\mathbf{Z}_p\setminus\{0\}}\rangle$ وبالتالي $Aut(\mathrm{A}_d)=Sym(\mathbf{Z}_p)$

حالة $n=p.q$ **حيث** $p\neq q$ **عددان أوليان:** يوجد عددان مختلفان e_p و e_q يحققان الشروط:

$$e_p=1(\mathrm{mod}\,q),e_q=1(\mathrm{mod}\,p),\ e_p=0(\mathrm{mod}\,p),e_q=0(\mathrm{mod}\,q)$$
$$e_p+e_q=1(\mathrm{mod}\,p.q)$$

وبالتالي كل عنصر $a \in \mathbf{Z}_{p.q}$ يملك التمثيل الوحيد التالي: $a = a'e_p + a''e_q$ حيث $a' \in \mathbf{Z}_q$ و $a'' \in \mathbf{Z}_p$ و $a' = a(\bmod q)$ و $a'' = a(\bmod p)$ ويكون التطبيق $g : a \mapsto (a', a'')$ هو أيزمومورفيزم بين $\mathbf{Z}_{pq}$ و $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_q$

5-3- مبرهنة: لتكن $\mathcal{A}$ هي S-حلقة فوق $\mathbf{Z}_{p.q}$ حيث p , q عددان أوليان و $p \neq q$ ، إن الزمرة $Aut(\mathcal{A})$ تملك أحد الأشكال التالية:

1- $Sym(\mathbf{Z}_{pq})$

2- $Aut(\Gamma_p) \times Aut(\Gamma_q)$ حيث Γ_p S-حلقة فوق $\mathbf{Z}_p$ و Γ_q S-حلقة فوق $\mathbf{Z}_q$.

3- $A.\mathbf{Z}_{p.q}$ حيث $A \leq \wp(p.q)$ لا تكتب كجداء مباشر لزمرة جزئية من $\wp(p)$ مع زمرة جزئية من $\wp(q)$ أي $A \neq W'e_p + W''e_q : W' \leq \wp(q) , W'' \leq \wp(p)$

4- $Aut(\Gamma_q) \wr Aut(\Gamma_p)$ أو $Aut(\Gamma_p) \wr Aut(\Gamma_q)$ حيث Γ_p S-حلقة فوق $\mathbf{Z}_p$ و Γ_q S-حلقة فوق $\mathbf{Z}_q$.

البرهان: لتكن $\mathcal{A}$ هي S-حلقة فوق $\mathbf{Z}_{p.q}$، إن $D_{p.q} = \{1, p, q\}$ و بالتالي توجد خمسة تجزئات للمجموعة $D_{p.q}$ هي:

$$\Theta_1 = \{1, p, q\} \ , \Theta_2 = \{\{1\}, \{p\}, \{q\}\} \ , \Theta_3 = \{\{1, p\}, \{q\}\}$$
$$\Theta_4 = \{\{1, q\}, \{q\}\} , \ \Theta_5 = \{1\}, \{p, q\}$$

لنأخذ الآن $\mathbf{Z}_{pq} = \langle a, b : a^p = b^q = e, ab = ba \rangle$ و $H = \langle a \rangle$ و $K = \langle b \rangle$ فتكون $G = H \times K$ وبالتالي يكون لدينا الحالات التالية:

<u>أولاً:</u> $\Theta_1 = \{1, p, q\}$ يكون لدينا S-حلقة وحيدة تحوي صفين فقط $\{0\}$ ، $\mathbf{Z}_{pq} \setminus \{0\}$ أي أذا كانت $\Theta(\mathcal{A}) = \Theta_1$ فإن $\mathcal{A} = \langle \underline{0} , \underline{\mathbf{Z}_{pq} \setminus \{0\}} \rangle$ وبالتالي $Aut(\mathcal{A}) = Sym(\mathbf{Z}_{pq})$.

<u>ثانياً:</u> $\Theta_2 = \{\{1\}, \{p\}, \{q\}\}$ يكون لدينا S-حلقة عادية $\mathcal{A}$ حيث أن $Bs(\mathcal{A}) = \{\{e\}, H \setminus \{e\}, K \setminus \{e\}, \mathbf{Z}_{pq} \setminus H \cup K\}$ وتكون كل S-حلقة $\mathcal{A}$ فوق $\mathbf{Z}_{pq}$ مع $\Theta(\mathcal{A}) = \Theta_2$ يتم بناؤها وفق الشكل: $T_{(z)} = A.z \ , \ T_{(pz)} = A.pz \ , \ T_{(qz)} = A.qz$ حيث $z \in \wp(pq)$ و $A \leq \wp(pq)$ أي أن $\mathcal{A} = V(\mathbf{Z}_{pq}, (A\mathbf{Z}_{pq})_e)$ وهنا نميز حالتين:

الأولى: $A = W'e_p + W''e_q : W' \leq \wp(q), W'' \leq \wp(p)$ بالتالي نجد إن $A\mathbf{Z}_{pq} = W'\mathbf{Z}_q \times W''\mathbf{Z}_p$ وبالتالي إن $\mathcal{A}$ تكتب كجداء مباشر لـ S-حلقة Γ_p فوق $\mathbf{Z}_p$ مع S-حلقة Γ_q فوق $\mathbf{Z}_q$. وتكون $Aut(\mathcal{A}) = Aut(\Gamma_p) \times Aut(\Gamma_q)$.

الثانية: $A \neq W'e_p + W''e_q : W' \leq \wp(q), W'' \leq \wp(p)$ أي أن A ليست جداء مباشر لزمرة $W' \leq \wp(q)$ مع زمرة $W'' \leq \wp(p)$. وهنا نضع $A'' := A(\bmod p)$ ، $A' := A(\bmod q)$. فيكون لدينا $A'\mathbf{Z}_q \leq Sym(\mathbf{Z}_q)$ و $A''\mathbf{Z}_p \leq Sym(\mathbf{Z}_p)$ ومنه نجد $A\mathbf{Z}_{pq}$ زمرة جزئية في $A'\mathbf{Z}_q \times A''\mathbf{Z}_p$ وبالتالي

$Aut(A) \le AutV(\mathbf{Z}_q, A') \times AutV(\mathbf{Z}_p, A'')$ وهذا يعني أن $Aut(A)$ عبارة عن مجموعة من الثنائيات (g', g'') بحيث أن $g' \in AutV(\mathbf{Z}_q, A')$ و $g'' \in AutV(\mathbf{Z}_p, A'')$ وهنا لدينا حالتان:

الأولى: $Aut(A) \le H(H)$ أي $Aut(A) = B\,\mathbf{Z}_{pq}$ لأجل $B \le H(H)$ و لكن بما أن $A = V(H, A) = V(H, Aut(A)_e) = V(H, B)$ بالتالي تكون $A = T_{(1)} = B$

الثانية: $Aut(A) \not\le H(H)$ بالتالي يوجد $g_0 = (g_0', g_0'') \in Aut(A) \setminus H(\mathbf{Z}_n)$ بحيث أنه على الأقل $g_0' \notin H(\mathbf{Z}_q)$ وليكن $N_{Sym(\mathbf{Z}_q)}((\mathbf{Z}_q)_R) = H(\mathbf{Z}_q)$ وحيث أن $(\mathbf{Z}_q)_R$ هي الزمرة الدائرية الوحيدة ذات الرتبة q في $H(\mathbf{Z}_q)$ يوجد $h_1 \in (\mathbf{Z}_q)_R$ بحيث أن $g_1 := (g_0')^{-1}(h_1)_R(g_0') \notin H(\mathbf{Z}_q)$

لنضع $G' := \{g' \in Sym(\mathbf{Z}_q) : (g', id) \in Aut(A)\}$ حيث id_p حيادي الزمرة $\mathbf{Z}_p$، ونضع $G'' := \{g'' \in Sym(\mathbf{Z}_p) : (id_q, g'') \in Aut(A)\}$ حيث id_q حيادي الزمرة $\mathbf{Z}_q$. فيكون لدينا عندئذ $(\mathbf{Z}_q)_R \le G'$ و $(\mathbf{Z}_p)_R \le G''$ كذلك تكون $G' = Aut(G_q)$ حيث G_q هي S− حلقة فوق $\mathbf{Z}_q$ و $G'' = Aut(G_p)$ حيث G_p هي S− حلقة فوق $\mathbf{Z}_p$. بالتالي لأجل $(h)_R = ((h_1)_R, id) = (h_1 e_p)_R \in (\mathbf{Z}_{pq})_R \le Aut(A)$ و بما أن $g_0 \in Aut(A)$ بالتالي نجد هنا $(g_1', id) = (g_0')^{-1} h g_0' \in Aut(A)$ إذن $g_1' \in G'$ لكن $g_0' \notin H(\mathbf{Z}_q)$ ومنه تكون $G' = Sym(\mathbf{Z}_q)$ وبالتالي $Aut(A) = G' \times G''$ ولكن:

$$\begin{aligned} A &= (A\mathbf{Z}_n)_e \wr P(n) \\ &= T_{(1)}^{V(A,\mathbf{Z}_n)} = T_{(1)}^{V(Aut(A)_e,\mathbf{Z}_n)} \\ &= Aut(A)_e \wr P(n) \\ &= (G_0' \times G_0'') \wr (P(q) \times P(p)) \\ &= (G_0' \wr P(q)) \times (G_0'' \wr P(p)) \end{aligned}$$

وهذا يناقض كون $A \ne W'e_p + W''e_q$ إذن الفرض بأن $Aut(A) \not\le H(H)$ خاطئ.

<u>ثالثاً:</u> $Q_2 = \{\{1, p\}, \{q\}\}$ يكون لدينا S−حلقة عادية A حيث أن $Bs(A) = \{\{e\}, H \setminus \{e\}, \mathbf{Z}_{pq} \setminus H\}$ وتكون كل S−حلقة A فوق $\mathbf{Z}_{pq}$ مع $Q(A) = Q_2$ يتم بناؤها وفق الشكل: $T_{(z)} = T_{(pz)} = W'z + q\mathbf{Z}_p,\ T_{(qz)} = W''.qz$

حيث $z \in P(pq)$ و $W' \le P(q), W'' \le P(p)$ أي أن A هي جداء مجدول لـ S−حلقة G_q فوق $\mathbf{Z}_q$ مع S−حلقة G_p فوق $\mathbf{Z}_p$. وتكون $Aut(A) = Aut(G_q) \wr Aut(G_p)$

<u>رابعاً:</u> $Q_2 = \{\{1, q\}, \{p\}\}$ يكون لدينا S−حلقة عادية A حيث أن $Bs(A) = \{\{e\}, K \setminus \{e\}, \mathbf{Z}_{pq} \setminus K\}$ وتكون كل S−حلقة A فوق $\mathbf{Z}_{pq}$ مع $Q(A) = Q_4$ يتم بناؤها وفق الشكل: $T_{(z)} = T_{(qz)} = W''z + p\mathbf{Z}_q,\ T_{(pz)} = W'.pz$

حيث $z \in P(pq)$ و $W' \le P(q), W'' \le P(p)$ أي أن A هي جداء مجدول مباشر لـ S−حلقة G_p فوق $\mathbf{Z}_p$ مع S−حلقة G_q فوق $\mathbf{Z}_q$. وتكون $Aut(A) = Aut(G_p) \wr Aut(G_q)$

خامساً: $Q_2=\{\{1\},\{q,p\}\}$ وهنا لا توجد علاقة تكافؤ تجعل القاسم المشترك لجميع العناصر في كل صف هو الواحد ما لم تكن تحوي صف تكافؤ واحد وبالتالي لا توجد S- حلقة A مع $Q(A)=Q_4$

5-4- نتيجة: من برهان النظرية السابقة نجد أنه يوجد $s(n)+2s(p)s(q)+1$ حلقة لشور فوق $\mathbf{Z}_{pq}$ حيث $s(k)$ تمثل عدد الزمر الجزئية في $P(k)$.

5-5- مثال: لنأخذ $n=10$ مع $p=2$ و $q=5$ فتكون $P(10)=\{1,3,7,9\}$ تحوي ثلاث زمر جزئية $W_0=\{1\},W_1=\{1,9\},W_2=P(10)$ كذلك $P(5)=\{1,2,3,4\}$ تحوي ثلاث زمر جزئية $W_0'=\{1\},W_1'=\{1,4\},W_2'=P(5)$، وإن $P(2)=\{1\}$ تحوي زمرة جزئية وحيدة فقط $W_0''=P(2)$.
وتكون $e_p=6$ و $e_q=5$.

توجد ثلاث S- حلقات فوق $\mathbf{Z}_5$ هي: $\langle\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\underline{4}\rangle$ ، $\langle\underline{0},\underline{1,4},\underline{2,3}\rangle$ ، $\langle\underline{0},\underline{1,2,3,4}\rangle$ بينما توجد S- حلقة وحيدة فوق $\mathbf{Z}_2$ هي: $\langle\underline{0},\underline{1}\rangle$ وبالتالي يكون لدينا الحلقات التالية:

$$A_1=\langle\underline{0},\underline{1,2,3,4,5,6,7,8,9}\rangle \text{ وتكون } AutA_1=S_{10}$$

لأجل $A=W_0=\{1\}$ إن $A=W_0'e_p+W_0''e_q$ وبالتالي تكون

$$A_2=\langle\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\underline{4},\underline{5},\underline{6},\underline{7},\underline{8},\underline{9}\rangle=\langle\underline{0},\underline{1}\rangle\times\langle\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\underline{4}\rangle \text{ و } AutA_2=S_2\times\mathbf{Z}_5$$

لأجل $A=W_1=\{1,9\}$ إن

$T_{(1)}=\{1,9\},T_{(3)}=\{3,7\},T_{(2)}=\{2,8\},T_{(6)}=\{4,6\},T_{(5)}=\{5\}$ وتكون هنا

$A=\{1,4\}e_p+\{1\}e_q$ ولكن $A_3=\langle\underline{0},\underline{1,9},\underline{3,7},\underline{2,8},\underline{4,6},\underline{5}\rangle$ بالتالي:

$$A_3=\langle\underline{0},\underline{1}\rangle\times\langle\underline{0},\underline{1,4},\underline{2,3}\rangle \text{ و } AutA_3=S_2\times\{1,4\}\mathbf{Z}_5$$

لأجل $A=\{1,3,7,9\}$ تكون $T_{(1)}=\{1,3,7,9\},T_{(2)}=\{2,4,6,8\},T_{(5)}=\{5\}$ أي

$A_3=\langle\underline{0},\underline{1,3,7,9},\underline{2,4,6,8},\underline{5}\rangle$ لكن $A=\{1,2,3,4\}e_p+\{1\}e_q$ إذن تكون

$$A_4=\langle\underline{0},\underline{1}\rangle\times\langle\underline{0},\underline{1,2,3,4}\rangle \text{ و } AutA_4=S_2\times S_5$$

أما الحلقات الباقية فهي إما من الشكل $A=G_p\wr G_q$ وهنا لدينا:

$$A_5=\langle\underline{0},\underline{1}\rangle\wr\langle\underline{0},\underline{1,2,3,4}\rangle=\langle\underline{0},\underline{1,3,5,7,9},\underline{2,8,4,6}\rangle \Rightarrow AutA_5=S_2\wr S_5$$

$$A_6=\langle\underline{0},\underline{1}\rangle\wr\langle\underline{0},\underline{1,4},\underline{2,3}\rangle=\langle\underline{0},\underline{1,3,5,7,9},\underline{2,8},\underline{4,6}\rangle$$
$$\Rightarrow AutA_6=S_2\wr\{1,4\}\mathbf{Z}_5$$

$$A_7=\langle\underline{0},\underline{1}\rangle\wr\langle\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\underline{4}\rangle=\langle\underline{0},\underline{1,3,5,7,9},\underline{2},\underline{4},\underline{6},\underline{8}\rangle$$
$$\Rightarrow AutA_7=S_2\wr\mathbf{Z}_5$$

أو الشكل $A=G_q\wr G_p$ وهنا لدينا:

$$A_8=\langle\underline{0},\underline{1,2,3,4}\rangle\wr\langle\underline{0},\underline{1}\rangle=\langle\underline{0},\underline{1,2,3,4,6,7,8,9},\underline{5}\rangle \Rightarrow AutA_8=S_5\times S_2$$

$$A_5=\langle\underline{0},\underline{1,4},\underline{2,3}\rangle\wr\langle\underline{0},\underline{1}\rangle=\langle\underline{0},\underline{1,4,6,9},\underline{2,3,7,8},\underline{5}\rangle$$
$$\Rightarrow AutA_9=\{1,4\}\mathbf{Z}_5\wr S_2$$

$$A_{10} = \langle \underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\underline{4} \rangle \cong \langle \underline{0},\underline{1} \rangle = \langle \underline{0}\,,\, \underline{1,6}\,,\, \underline{2,7}\,,\, \underline{3,8}\,,\, \underline{4,9}\,,\, \underline{5} \rangle$$

$$= Aut A_{10} \quad \mathbf{Z}_5 \wr S_2$$

5–6–مثال : لنأخذ الأن بيان كيلي $G = Cay(\mathbf{Z}_{10}, Q)$ حيث $Q = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\underline{1,2,3,4} * \underline{1,2,3,4} = \underline{2,8} + 2\,\underline{3,7} + 4\,\underline{4,6} + 4\,\underline{5}$$

وبالتالي حسب مبدأ Schur-Hadmard إن $\langle Q \rangle \ni \underline{2,8}, \underline{3,7}, \underline{4,6}, \underline{5}$ وبتطبيق جداء Hadmard نجد:

$$\underline{1,2,3,4} \circ \underline{2,8} = \underline{2} \text{ و } \underline{1,2,3,4} \circ \underline{3,7} = \underline{3} \text{ و } \underline{1,2,3,4} \circ \underline{4,6} = \underline{4}$$

وبالتالي $\mathbf{Z}_{10} \cong \langle Q \rangle$ وعليه تكون $\underline{1} =$ $Aut(G) = Aut(\langle Q \rangle) = \mathbf{Z}_{10}$

5–7–مثال : لنأخذ الأن بيان كيلي $Cay(\mathbf{Z}_{10}, Q)$ حيث $Q = \{2, 5, 8\}$ بالتالي:

$\underline{2,5,8} * \underline{2,5,8} = 2\,\underline{3,7} + \underline{4,6}$ وبالتالي حسب مبدأ Schur-Hadmard إن $\langle Q \rangle \ni \underline{3,7}\,,\, \underline{4,6}$

فتكون $\langle Q \rangle = \langle \underline{0}\,,\, \underline{1,9}\,,\, \underline{3,7}\,,\, \underline{2,8}\,,\, \underline{4,6}\,,\, \underline{5} \rangle$ وبالتالي تكون

$$AutCay(\mathbf{Z}_{10}, Q) = Aut \langle Q \rangle = S_2 \times \{1, 4\}\mathbf{Z}_5$$

الاستنتاجات والتوصيات:

نستنتج في نهاية هذا المثال و اعتماداً على المبرهنة (3) و المبرهنة (5–3) أنه يمكننا تحديد زمرة أتومورفيزم أي بيان لكيلي من الرتبة n حيث $n = pq$ و $p\,,\,q$ عددان أوليان و $p \neq q$. و إن زمرة أتومورفيزم بيان كيلي $Cay(\mathbf{Z}_{pq}, Q)$ مع $Q \subset \mathbf{Z}_{pq}$ لها أحدى الصيغ المذكورة في المبرهنة (5–3).

المراجع:

[1] M. KLIN; M.MUZYCHUK; R.POSCHEL. *The isomorphism problem for circulant graphs via Schur rings theory*. Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 56, 2001, 241-265.

[2] KLIN. H. M. *Automorphism groups of circulant graphs*. Agungsbericht of the conference Applicable Algebra. Oberwolfach, 1993, 1- 12.

[3] KLIN. H. M; ISTVÁN. K. *Automorphism groups of rational circulant* graphs. The electronic journal of combinatorics, Vol.19, 2012, 1-35.

[4] MUZYCHUK; M, POSCHEL.R. *Isomorphism criterion for circulant graphs*. Preprint Math, Vol. 9, 1999, 185-217.

[5] JOSEPH. A. *The isomorphism problem for Cayley digraphs on groups of prime squared order*. Discrete Math, Vol. 141, 1995, 173–183.

[6] D. KONIG. *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1936, 425.

[7] Shiu; Wai. chee. *The algebraic structure and computation of Schur rings*. University of Hong Kong, PH Thesis. 1992.

[8] B. A LSPACH ; T. D. PAREON. *Isomorphism of circulant graphs and digraphs*. Discrete Math, Vol. 25, 1979, 97-108.

[9] L. BABAI. *Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, Vol. 29, 1977, 329-336.

[10] L.BABAI; P.FRANKL. *Isomorphism of Cayley graphs I*. Combinatorics, Keszthely, Vol. 18, 1976, 35-52.

[11] L.BABAI ; P.FRANKL. *Isomorphism of Cayley graphs II*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar .Vol. 34, 1979, 177-183.

[12] C.D.GODSIL. *On Cayley graph isomorphisms*. Ars Combin, Vol. 15, 1983, 231-246.

[13] P.P.PALFY. *Isomorphism problem for relational structures with a cyclic automorphism*. European J. Combin . Vol. 8, 1987, 35-43.

[14] LEUNG.K.H; MA.S.L. *The structure of Schur rings over cyclic groups*. J. Pure Appl.Math, Vol. 66, 1990, 287-302.

[15] MUZYCHUK. E. *The structure of basic sets of Schur rings over cyclic groups*. J. Algebra, Vol. 169, 1994, 655–678.

[16] MUZYCHUK. E. *The structure of rational Schur rings over cyclic groups*. European. J. Combin. Vol. 14, 1993, 479-490.

[17] SCHUR, I. *Zur Theorie der einfach trasitiven Permutationsgruppen*. Sitz. Ber. Preuss. Akad.Wiss, phys.-math. Kl, Vol. 18/20 , 1933, 598–623

[18] R. POOSCHEL. *Untersuchungen von S-Ringen, insbensondere im Gruppenring von p-Gruppen*. Math. Nachr, Vol. 60, 1974, 1-27.

[19] WIELANDT. H. *Finite Permutation Groups*. Academic Press, Berlin, 1964, 128.