

خوارزمية تدرج مترافق جديدة لحل مسائل الأمثليات غير المقيدة

الدكتور زياد قناية*

علي العيسى**

(تاريخ الإيداع 26 / 3 / 2017. قُبِلَ للنشر في 12 / 12 / 2017)

□ ملخص □

إن خوارزميات التدرج المترافق هامة لحل مسائل الأمثليات غير المقيدة، لذلك نقدم في هذا البحث خوارزمية تدرج مترافق تعتمد على تحسين معامل الترافق β_k الذي يحقق شرط الانحدار الكافي والتقارب الشامل وذلك بإجراء تهجين بين معاملي الترافق β_k^{RMIL} [1] و β_k^{RMIL+} [2]. تظهر النتائج العددية فعالية الخوارزمية المقترحة بعد تطبيقها على عدة مسائل قياسية ومقارنتها مع خوارزميات تدرج مترافق أخرى من حيث عدد التكرارات وقيمة الدالة ونظيم شعاع التدرج.

الكلمات المفتاحية : الأمثلية غير المقيدة، خوارزمية تدرج مترافق، معامل الترافق، التقارب الشامل.

* أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية .

** طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية .

New Conjugate Gradient Algorithm for Solving Unconstrained Optimization Problems

Dr. Ziad Kanaya*
Ali Al-Issa**

(Received 26 / 3 / 2017. Accepted 12 / 12 /2017)

□ ABSTRACT □

Conjugate gradient algorithms are important for solving unconstrained optimization problems, so that we present in this paper conjugate gradient algorithm depending on improving conjugate coefficient β_k achieving sufficient descent condition and global convergence by doing hybrid between the two conjugate coefficients β_k^{RMIL} [1] and β_k^{RMIL+} [2]. Numerical results show the efficiency of the suggested algorithm after its application on several standard problems and comparing it with other conjugate gradient algorithms according to number of iterations, function value and norm of gradient vector.

Key words: Unconstrained Optimization, Conjugate Gradient Algorithm, Conjugate Coefficient, Global Convergence.

* Associate Prof, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Postgraduate student, Dept. of Mathematics, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

لقد درس الباحثون مسألة الأمثليات غير المقيدة على أنها مسألة إيجاد حل أصغري للدالة الحقيقية $f(x)$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1.1)$$

حيث $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق مرة واحدة على الأقل، ولدينا:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\max_{x \in \mathbb{R}^n} [-f(x)]$$

إن خوارزميات التدرج المترافق هامة من أجل حل المسألة (1.1)، تقوم بالبداية من علاقة تكرارية

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

حيث α_k طول الخطوة وبحسب في البحث الخطي المضبوط أو التقريبي عندما تكون المعادلة غير خطية

باستخدام العلاقة الآتية:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha d_k) \quad (1.3)$$

d_k هو اتجاه البحث ويعطى بالصيغة الآتية:

$$d_k = \begin{cases} -g_k & \text{if } k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1} & \text{if } k \geq 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

g_k هو متجه التدرج للدالة f_k و β_k هو معامل الترافق لخوارزمية التدرج المترافق.

نعرض فيما يلي معاملات الترافق لبعض الخوارزميات السابقة:

1- خوارزمية Hestenes–stiefel [3] عام 1952 :

$$\beta_k^{\text{HS}} = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{(g_k - g_{k-1})^T d_{k-1}}$$

2- خوارزمية Fletcher–Reeves [4] عام 1964 :

$$= \frac{g_k^T g_k}{\|g_{k-1}\|^2} \beta_k^{\text{FR}}$$

3- خوارزمية Polak–Ribiere– Polyak [5],[6] عام 1969 :

$$\beta_k^{\text{PRP}} = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2}$$

خوارزمية Conjugate Descent – Fletcher [7] عام 1969 :

$$\beta_k^{\text{CD}} = -\frac{g_k^T g_k}{d_{k-1}^T g_{k-1}}$$

5- خوارزمية Liu – Storey [8] عام 1991 :

$$\beta_k^{\text{LS}} = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{-d_{k-1}^T g_{k-1}}$$

6- خوارزمية Dai and Yuan [9] عام 1999 :

$$\beta_k^{DY} = \frac{g_k^T g_k}{(g_k - g_{k-1})^T d_{k-1}}$$

7- خوارزمية atal Rivaie [1] عام 2012 :

$$\beta_k^{RMIL} = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{\|d_{k-1}\|^2}$$

8- خوارزمية atal Rivaie [2] عام 2015 :

$$\beta_k^{RMIL+} = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1} - d_{k-1})}{\|d_{k-1}\|^2}$$

أهمية البحث وأهدافه:

يمكن تلخيص أهداف البحث بالنقاط الآتية:

- تقديم خوارزمية تدرج مترافق جديدة لحل مسألة الأمثليات غير المقيدة.
 - دراسة التقارب الشامل للخوارزمية المقترحة.
 - مقارنة الخوارزمية المقترحة مع خوارزميات سابقة بإجراء اختبارات عددية على بعض المسائل القياسية.
- وتأتي أهمية البحث من خلال تطبيقاته في مجالات علمية متعددة كعلوم الحاسوب والاقتصاد ونظرية القرار والتحكم الآلي.

طرائق البحث ومواده:

تم في هذا البحث تقديم خوارزمية تدرج مترافق من خلال تطوير معامل الترافق β_k ، بحيث يتحقق شرط الانحدار الكافي وهذا سيجعل الحل العددي يتقارب من الحل الدقيق من أجل كل تكرار. تعتمد طرائق البحث على بحوث العمليات وتقنيات التحليل العددي حيث تم إعداد برامج بلغة (MatLab) للحصول على النتائج.

تعريف ومفاهيم أساسية :

تعريف 1: المصفوفة المحددة الموجبة (Positive Definite) [10]

بفرض A مصفوفة مربعة من القياس $n \times n$ ، و δ شعاع غير صفري من البعد n ، نقول إن المصفوفة A محددة موجبة إذا تحققت المتراجحة الآتية:

$$\delta^T A \delta > 0, \quad \forall \delta \neq 0$$

تعريف 2: النهاية الصغرى الموضعية (Local Minimum) [10]

نقول إن النقطة $x^* \in \mathbb{R}^n$ نهاية صغرى موضعية للدالة $f(x)$ إذا كانت f معرفة في جوار x^* ويوجد عدد صغير $\epsilon > 0$ بحيث يكون: $f(x^*) < f(x)$ وذلك من أجل جيع النقاط x التي تحقق $0 < \|x^* - x\| < \epsilon$ ، حيث $x^* \neq x$.

تعريف 3: النهاية الصغرى الشاملة (Global Minimum) [10]

نقول إن x^* نقطة نهاية صغرى شاملة للدالة $f(x)$ المستمرة على متحولاتها إذا تحقق الشرط $f(x^*) \leq f(x)$ وذلك مهما تكن x تنتمي إلى الفضاء الاقليدي \mathbb{R}^n .

تعريف 4: النقطة الساكنة (Stationary Point) [10]

نقول إن x^* نقطة ساكنة للدالة $f(x)$ إذا تحقق الشرط $g(x^*) = 0$.

تعريف 5: ترافق شعاعين (Conjugate Vectors) [10]

نقول عن شعاعين $x, y \in \mathbb{R}^n$ غير صفريين إنهما مترافقان بالنسبة للمصفوفة المحددة الموجبة A من الدرجة $n \times n$ إذا كان $x^T A y = 0$.

2- النتائج والمناقشة (Results and Discussion)

نقدم خوارزمية تدرج مترافق تعتمد على تحسين معامل الترافق β_k ، وذلك بإجراء تهجين بين معاملي الترافق β_k^{RMIL+} ، β_k^{RMIL} بحيث يتحقق شرط الانحدار الكافي وله الصيغة الآتية:

$$\beta_k^{new} = \max \{0.9(\beta_k^{RMIL}), \min\{\beta_k^{RMIL+}, \beta_k^{RMIL}\}\} \quad (2.1)$$

نختبر الخوارزمية المقدمة بحل مجموعة من مسائل الاختبار القياسية الموجودة في دراسات سابقة. الخوارزمية المقترحة:

نلخص خوارزمية التدرج المترافق في الخطوات الآتية:

شروط البدء: نبحث من نقطة ابتدائية مفروضة $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، حيث f دالة هدف، وقيمة معيار التوقف $\varepsilon = 10^{-6}$ ، عدد التكرارات $k = 0$.

الخطوة 0: نحسب $d_0 = -g_0$ ، ثم نحسب $x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0$ حيث α_0 هي نقطة نهاية صغرى للدالة $(f(x_0 + \alpha d_0), g_1 = g(x_1))$ ، ثم نضع $k = 1$.

الخطوة 1: نحسب معاملي الترافق β_k^{RMIL+} و β_k^{RMIL} لكل من الخوارزميتين 7 و 8 على الترتيب ثم نحسب معامل ترافق جديد:

$$\beta_k^{new} = \max\{0.9(\beta_k^{RMIL}), \min\{\beta_k^{RMIL+}, \beta_k^{RMIL}\}\}$$

الخطوة 2: نعين اتجاه البحث d_k وفق الصيغة الآتية:

$$d_k = -g_k + \beta_k^{new} d_{k-1}$$

الخطوة 3: نحسب α_k وهي نقطة نهاية صغرى للدالة $(f(x_k + \alpha d_k))$ حيث $\alpha > 0$.

الخطوة 4: نعين نقطة التكرار الجديدة وفق العلاقة الآتية:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

الخطوة 5: نختبر المعيار ε ، فإذا كان محقق نتوقف وإلا نضع $k = k + 1$ ونعود

للتكرار بدءاً من الخطوة 1.

تحليل التقارب :

لدراسة التقارب الشامل يجب أن يحقق معامل الترافق المقترح العلاقة الآتية:

$$[1] \quad \beta_{k+1}^{new} \leq \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|d_k\|^2}$$

أن:

$$\beta_{k+1}^{RMIL} = \frac{g_{k+1}^T(g_{k+1} - g_k)}{\|d_k\|^2} = \frac{\|g_{k+1}\|^2 - g_{k+1}^T g_k}{\|d_k\|^2} \quad (2.2)$$

$$\beta_{k+1}^{RMIL} \leq \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|d_k\|^2}$$

ومن الواضح أن:

أيضاً:

$$\beta_{k+1}^{RMIL+} = \frac{g_{k+1}^T(g_{k+1} - g_k - d_k)}{\|d_k\|^2} = \frac{\|g_{k+1}\|^2 - g_{k+1}^T g_k - g_{k+1}^T d_k}{\|d_k\|^2} \leq \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|d_k\|^2} \quad (2.3)$$

وبالمقارنة بين العلاقتين (2.2) و(2.3) نستنتج أن:

$$0 \leq \beta_{k+1}^{new} < \beta_{k+1}^{RMIL+} \leq \beta_{k+1}^{RMIL} \leq \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|d_k\|^2}$$

نتيجة 1: إن خوارزمية التدرج المترافق المقترحة مع اتجاه البحث d_k حسب الخطوة (2) من الخوارزمية ومعامل الترافق β_{k+1}^{new} حسب الخطوة (1) من الخوارزمية تحقق شرط الانحدار الكافي.

$$g_k^T d_k \leq -c \|g_k\|^2 \quad \forall k \geq 0, c > 0 \quad (2.4)$$

البرهان:

نبرهن أولاً صحة العلاقة من أجل $k = 0$ فنجد أن:

$$g_0^T d_0 = -\|g_0\|^2 \leq -c \|g_0\|^2$$

وبالتالي العلاقة (2.4) صحيحة من أجل $k = 0$ ، نفرض أن العلاقة (2.4) صحيحة من أجل $k > 0$ ، ولنبرهن صحتها من أجل $k + 1$ لذلك نضرب طرفي متجه البحث d_k المعرفة بالخطوة (3) من الخوارزمية المقترحة اليسار بـ g_{k+1} نجد أن:

$$g_{k+1}^T d_{k+1} = g_{k+1}^T (-g_{k+1} + \beta_{k+1}^{new} d_k)$$

$$= -\|g_{k+1}\|^2 + \beta_{k+1}^{new} g_{k+1}^T d_k$$

وبما أن الخوارزمية تستخدم البحث الخطي المضبوط في الخطوة 3 فإن:

$$g_{k+1}^T d_k = 0$$

$$g_{k+1}^T d_{k+1} = -\|g_{k+1}\|^2$$

إذاً العلاقة (2.4) صحيحة من أجل $k + 1$ ، وبالتالي فهي صحيحة بحسب مبدأ الاستقراء الرياضي مما

سبق نستنتج أن شرط الانحدار الكافي محقق أياً كانت $k \geq 0$.

الفرضية 1 [2]: لتكن المجموعة المحدودة $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ حيث f دالة قابلة

للاشتقاق على جوار N للمجموعة Ω وشعاع التدرج للدالة f يحقق شرط Lipschitz ومستمر على جوار N

للمجموعة Ω عندئذٍ يوجد ثابت $l > 0$ بحيث أن:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq l\|x - y\|, \quad \forall x, y \in N$$

حيث l ثابت ليشيز .

مبرهنة 1 [11]: اذا كانت الفرضية 1 محققة α_k و طول الخطوة تُحدد حسب البحث الخطي المضبوط، و d_k اتجاه البحث يحقق شرط الانحدار الكافي عندئذٍ خوارزمية التدرج المترافق المقترحة تحقق شرط **Zoutendijk** الآتي:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < \infty$$

مبرهنة 2:

إذا كانت الفرضية 1 محققة عندئذٍ خوارزمية التدرج المترافق المقترحة تُحقق العلاقة الآتية:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$$

البرهان:

إذا كان $g_k \neq 0$ عندئذٍ يوجد ثابت $\mu > 0$ بحيث أن: $\|g_k\| > \mu \quad \forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\|^2 &= d_{k+1}^T d_{k+1} \\ &= (-g_{k+1}^T + \beta_{k+1}^{new} d_k^T)(-g_{k+1} + \beta_{k+1}^{new} d_k) \\ &= \|g_{k+1}\|^2 - 2\beta_{k+1}^{new} g_{k+1}^T d_k + (\beta_{k+1}^{new})^2 \|d_k\|^2 \end{aligned}$$

بما أن: $g_{k+1}^T d_k = 0$ حسب البحث الخطي المضبوط للخوارزمية، نقسم الطرفين على $\|g_{k+1}\|^4$ نجد

أن:

$$\frac{\|d_{k+1}\|^2}{\|g_{k+1}\|^4} = \frac{1}{\|g_{k+1}\|^2} + (\beta_{k+1}^{new})^2 \frac{\|d_k\|^2}{\|g_{k+1}\|^4}$$

لكن بما أن: $\beta_{k+1}^{new} \leq \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|d_k\|^2}$ نجد أن :

$$\frac{\|d_{k+1}\|^2}{\|g_{k+1}\|^4} \leq \frac{1}{\|g_{k+1}\|^2} + \frac{\|g_{k+1}\|^4}{\|d_k\|^4} \frac{\|d_k\|^2}{\|g_{k+1}\|^4}$$

$$\frac{\|d_{k+1}\|^2}{\|g_{k+1}\|^4} \leq \frac{1}{\|d_k\|^2} + \frac{1}{\|g_{k+1}\|^2}$$

نلاحظ أنه من أجل $k = 0$ ، $\frac{1}{\|d_0\|^2} = \frac{1}{\|g_0\|^2}$ ، وبالتالي فإن:

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} = \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2}$$

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leq \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2}$$

$$\frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} \geq \frac{\mu^2}{k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} \geq \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

وهذا يخالف شرط **Zoutendijk**، إذًا:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$$

3- نتائج عددية (Numerical Results)

نختبر خوارزمية التدرج المترافق المقترحة بحل مجموعة من مسائل الاختبار الموجودة في [12]، ثم نقارن مع خوارزمية FR وخوارزمية PRP في [13]، وخوارزمية SDYCG في [14] وخوارزمية RML [1] و [2]. تم إنجاز النتائج العددية بإعداد برامج بلغة Mat Lab.

المسألة (1) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Diagonal 4 function**.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{2} (x_{2i-1}^2 + cx_{2i}^2), \quad c = 100$$

حيث لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (1,1)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (0,0)$ ، $f(x^*) = 0$.

المسألة (2) : أوجد النهاية الصغرى لدالة **Extended Himmelblau**.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2} (x_{2i-1}^2 + x_{2i} - 11)^2 + (x_{2i-1} + x_{2i}^2 - 7)^2$$

حيث لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (1,1)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (3,2)$ ، $f(x^*) = 0$.

المسألة (3): أوجد النهاية الصغرى لدالة **Extended Beale**.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2} (1.5 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}))^2 + (2.25 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^2))^2 + (2.625 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^3))^2$$

لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (1,0.8)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (3,0.5)$ ، $f(x^*) = 0$.

المسألة (4): أوجد النهاية الصغرى لدالة **Generalized Tridiagonal 1**.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1} - 3)^2 + (x_i - x_{i+1} + 1)^4$$

لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (2,2)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (3,0.5)$ ، $f(x^*) = 0$.

المسألة (5): أوجد النهاية الصغرى لدالة **Extended DENSCHNF**.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (2(x_{i-1} + x_i)^2 + (x_{i-1} - x_i)^2 - 8)^2 + (5x_{2i-1}^2 + (x_{2i} - 3)^2 - 9)^2$$

حيث لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (2,0)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (1,1)$, $f(x^*) = 0$.
المسألة (6): أوجد النهاية الصغرى لدالة LIRWHD.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n 4(x_i^2 - x_1)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2$$

حيث لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (4,4)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (1,1)$, $f(x^*) = 0$.
المسألة (7): أوجد النهاية الصغرى لدالة ENGVAL.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (-4x_i + 3),$$

حيث لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (2,2)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (1,0)$, $f(x^*) = 0$.
المسألة (8): أوجد النهاية الصغرى لدالة QUARTC.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^4$$

حيث لأجل $n = 2$ نقطة البدء $x_0 = (2,2)$ يكون الحل الدقيق $x^* = (1,1)$, $f(x^*) = 0$.
الجدول (1): مقارنة الخوارزمية المقترحة مع خوارزميات التدرج المترافق في [13].

(وشرط توقف الخوارزمية $\|g_k\| \leq 10^{-6}$)

الخوارزمية المقترحة			FR [13]			PRP[13]			المسألة المطروحة
Iter	f_k	$\ g_k\ $	Iter	f_k	$\ g_k\ $	Iter	f_k	$\ g_k\ $	
6	2.6771E-24	2.6934E-12	30	1.43E-16	3.5E-07	37	2.35E-16	4.0E-07	المسألة 1
13	8.6697E-20	2.9773E-09	34	3.90E-15	7.2E-07	34	3.50E-15	6.2E-07	المسألة 2
50	2.7716E-14	1.6549E-07	102	1.80E-13	5.5E-07	221	8.50E-15	9.0E-07	المسألة 3
29	6.9253E-12	2.4328E-08	189	6.40E-02	3.8E-01	36	6.10E-15	2.2E-07	المسألة 4

تبين النتائج العددية أن خوارزمية التدرج المترافق المقترحة أكثر فعالية من خوارزميتي التدرج المترافق لـ FR, PRP وذلك يتجلى في المسائل (1), ..., (4) فمثلاً في الخوارزمية المقترحة المطبقة على المسألة 1 تكون قيمة الدالة $f_k = 2.6771E - 24$ وهي قيمة دقيقة تقريباً وقريبة من الصفر وقيمة تنظيم شعاع التدرج عنده

$\|g_k\| = 2.6934E - 12$ باستخدام 6 تكرارات في حين أن الخوارزميتين **FR**, **PRP** لم يصلا إلى هذه الدقة بعد 30 و37 تكرار لكل منهما على الترتيب.

ملاحظة 1: تم حل المسائل المطروحة في الجدول (1) باختيار نقاط البدء الآتية: $(1,1)$ ، $(1,1)$ ، $(1,0.8)$ ، $(2,2)$ على الترتيب .

الجدول (2): مقارنة الخوارزمية المقترحة مع خوارزمية التدرج المترافق **SDYCG** في [14]

$$(\|g_k\| \leq 10^{-6} \text{ وشرط توقف الخوارزمية})$$

SDYCG[14]		الخوارزمية المقترحة				المسألة المطروحة
Iter	CPU	Iter	x_k	f_k	$\ g_k\ $	
22	0.0636	8	(1,1)	9.4077E-16	5.8906E-07	المسألة 5
12	0.0186	11	(1,1)	2.5148E-09	3.1216E-04	المسألة 6
28	0.0893	9	(1,0)	0	6.1760E-08	المسألة 7
1	0.0012	2	(1,1)	1.8669E-60	0	المسألة 8

تبين النتائج المدرجة في الجدول (2) أن الخوارزمية المقترحة أعطت الحل الأمثل الدقيق لجميع المسائل (5)، (6)، (7)، (8) كما أنها أسرع من خوارزمية التدرج المترافق لـ **SDYCG**.

حيث **CPU** زمن التنفيذ للوصول للحل الأمثل لكن نهتم في دراستنا بإيجاد قيمة الدالة ونظيم متجه التدرج وعدد التكرارات.

ملاحظة 2: تم حل المسائل المطروحة في الجدول (2) باختيار نقاط البدء الآتية: $(2,0)$ ، $(4,4)$ ، $(2,2)$ ، $(2,2)$ على الترتيب.

الجدول (3): مقارنة الخوارزمية المقترحة مع خوارزمية التدرج المترافق لـ **RMIL** في [1]

$$(\|g_k\| \leq 10^{-6} \text{ وشرط توقف الخوارزمية})$$

RMIL[1]			الخوارزمية المقترحة				المسألة المطروحة
Iter	f_k	$\ g_k\ $	Iter	f_k	$\ g_k\ $	نقاط البدء	
7	5.3405E-17	9.3647E-08	7	2.7759E-18	2.1298E-08	(4,3)	المسألة 2
8	5.7914E-15	1.4896E-06	8	9.4077E-16	5.8906E-07	(2,0)	المسألة 5
9	2.7074E-15	1.3535E-06	9	3.2330E-16	4.6289E-07	(2,2)	
13	4.4087E-14	1.3450E-06	13	2.3336E-14	9.7645E-07	(1,0)	المسألة 6
8	3.2465E-11	5.0059E-08	8	2.3242E-11	3.9107E-08	(6,5,4)	المسألة 8

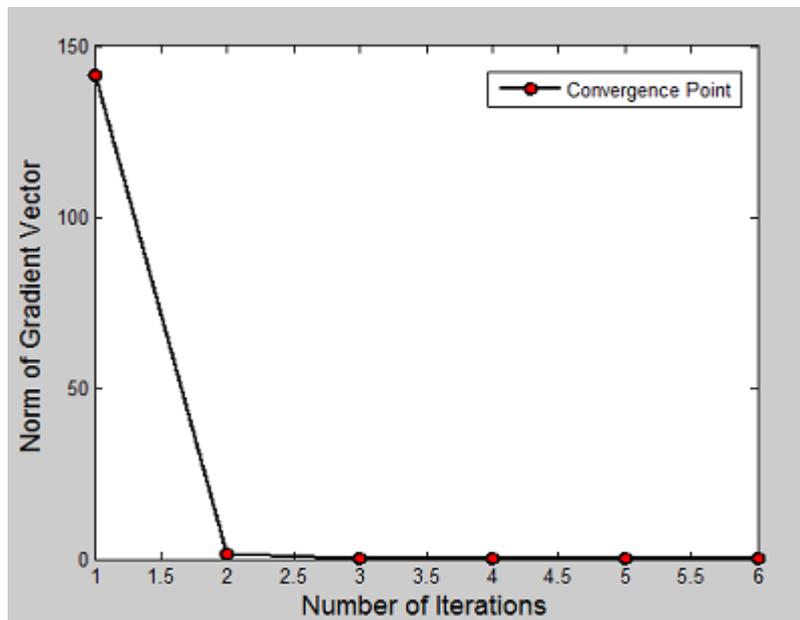
تم في الجدول (3) حساب عدد التكرارات **Iter** وقيم الدالة f_k ونظام شعاع التدرج ثم نقارن مع خوارزمية التدرج المترافق لـ **RMIL** وتبين النتائج أن الخوارزمية المقترحة أفضل لأنها تعطي حلاً عددياً أكثر دقة ويتضح ذلك في المسائل الأربعة المطبقة.

الجدول (4): مقارنة الخوارزمية المقترحة مع خوارزمية التدرج المترافق لـ RMIL+ في [2].

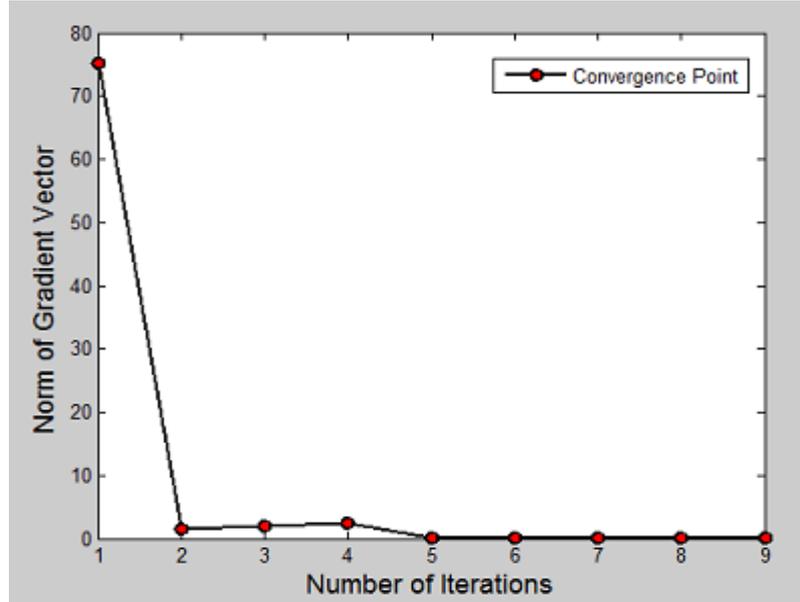
$$(\|g_k\| \leq 10^{-6} \text{ (وشرط توقف الخوارزمية)})$$

RMIL+[2]			الخوارزمية المقترحة				المسألة
Iter	f_k	$\ g_k\ $	Iter	f_k	$\ g_k\ $	نقاط البدء	المطروحة
5	6.1026E-10	3.8644E-05	4	3.1808E-14	2.5302E-07	(2,2,2,2)	المسألة 1
9	1.6547E-16	1.0443E-07	9	5.5347E-17	5.3497E-08	(0,0)	المسألة 2
9	3.7880E-16	1.6679E-07	9	1.0803E-17	1.9102E-08	(-1,1)	المسألة 6
9	6.6613E-16	1.0672E-07	9	0	6.1760E-08	(2,2)	المسألة 7
3	6.6513E-34	3.9807E-25	3	1.2641E-38	1.1458E-28	(8,8,8)	المسألة 8
2	1.8669E-60	0	2	1.8669E-60	0	(0,0,0)	

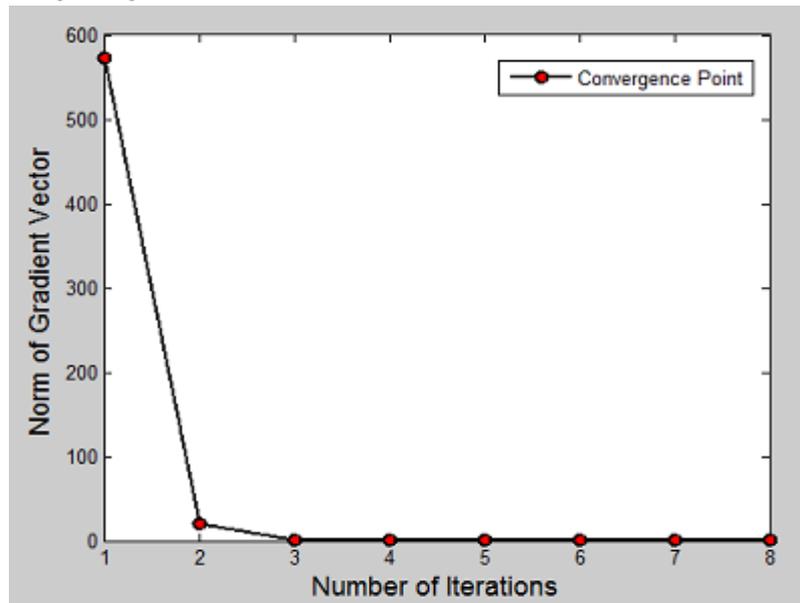
يتضح من الجدول (4) أن خوارزمية التدرج المترافق المقترحة أفضل من خوارزمية التدرج المترافق لـ RMIL+ لأننا نجد من المقارنات المسجلة في الجدول (4) أن قيم الدالة ونظام شعاع التدرج وعدد التكرارات في جميع المسائل المطبقة تشير إلى أفضلية خوارزمتنا على خوارزمية التدرج المترافق لـ RMIL+. نرسم في الأشكال (1), (2), (3) المخططات بيانية لتوضيح تقارب الخوارزمية المقترحة.



الشكل (1): مخطط سرعة التقارب للخوارزمية المقترحة مطبقة للمسألة (1) من أجل $x_0 = (1,1,1,1)$.



الشكل (2): مخطط سرعة التقارب للخوارزمية المقترحة مطبقة للمسألة (6) من أجل $x_0 = (-1, 1)$.



الشكل (3): مخطط سرعة التقارب للخوارزمية المقترحة مطبقة للمسألة (8) من أجل $x_0 = (6, 5, 4)$.

الاستنتاجات والتوصيات:

من أهم النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث تقديم خوارزمية تدرج مترافق لحل مسائل الأمثليات غير المقيدة، ودراسة التقارب الشامل للخوارزمية المقترحة، ولقد أظهرت النتائج العددية أن الخوارزمية المقترحة تعطي حلول عددية أكثر دقة من خوارزميات التدرج المترافق لـ [1]RMIL, [2]RMIL+, [13]FR, [13]PRP, [14]SDYCG لذلك نوصي باستخدام الخوارزمية المقترحة في حل مسائل الأمثلية غير المقيدة لأنها أقل كلفة وأكثر دقة من الطرائق الأخرى.

المراجع:

1. RIVAIE, M., MUSTAFA, M., JUNE, L. W., MOHD, I., *A new class of nonlinear conjugate gradient coefficient with global convergence properties*, Appl. Math. Comp. 218, 2012, 11323-11332.
2. RIVAIE, M., MAMAT, M., ABASHAR, A., *A new class of nonlinear conjugate gradient coefficients with exact and inexact line searches*. Appl. Math. Comp. 268, 2015, 1152-1163.
3. HESTENES, M. R., STIEFEL, E. L., *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Research Nat. Bur. Standards, 49, 1952, 409-436.
4. FLETCHER, R. , REEVES C., *Function minimization by conjugate gradients*, Comput . J.,7, 1964, 149-154.
5. POLAK, E., RIBIERE, G., *Note sur la convergence de directions conjugees*, Rev. Francaise In format Recherche Opertionelle, 3e Anne 16, 1969, 35-43.
6. POLYAK, B. T., *The conjugate gradient method in extreme problems*, Ussr Comp. Math. Phys, 9, 1969, 94-112.
7. FLETCHER, R., *Practical Methods of Optimization vol.1: Unconstrained Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1987.
8. LIU, Y., STOREY, C., *Efficient generalized conjugate gradient algorithms*, Part Theory, J. Optim. Theory Appl, 69, 1991, 129-137.
9. DAI, Y. H., YUAN Y., *A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property*, SIAM J. Optim,10, 1999, 177-182.
10. MURRAY, W., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*, Academic Press. London and New York, 1972.
11. ZOUTENDIJK, G., *Nonlinear programming computational methods*, in: Abadie(Ed.), Integer and nonlinear programming, North Hollan Amsterdam,1970.
12. ANDREI, N., *An unconstrained optimization test functions collection*, Advanced Modeling and Optimization, Vol 2008.10,no.1,147161.
13. BAMIGBOLA, O. M., ADEWUMI, A. O., Adeleke O. J., Agarana, M. C., *A Diagnostic Treatment of Unconstrained Optimization Problems via a Modified Armijo line search technique*, IOSR Journal of Mathematics.10, 2014, 47-53.
14. ZHOU, G., NI, Q., *A Spectral Dai-Yuan-Type Conjugate Gradient Method for Unconstrained Optimization*, Mathematical Problems in Engineering, Vol 2015, ID 839659, <<http://dx.doi.org/10.1155/2015/839659>>.