

معالجة عددية لمعادلات تفاضلية متأخرة باستخدام تقريبات هرميت شرائحية

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور محمد علي**

بشار جديد***

(تاريخ الإيداع 22 / 5 / 2017. قُبل للنشر في 3 / 10 / 2017)

□ ملخص □

نقدم في هذا العمل تقنية شرائحية بخمسة وسطاء تجميع لإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية المتأخرة الخطية وغير الخطية. تعتمد الطريقة على إنشاء تقريبات هرميت الشرائحية في الفضاء C^4 واستخدام خمس نقاط تجميع في كل مجال جزئي من حل المسألة. تم إثبات وجود وحدانية الحل الشرائحي للتقنية المطبقة لهذه المعادلات، كما تمت دراسة الاستقرار لهذه الطريقة، وتحديد وسطاء التجميع التي تحقق الاستقرار القوي للطريقة الشرائحية. تبين الدراسة التحليلية للتقارب أن الطريقة عندما تم تطبيقها لمسألة اختبار من هذه المعادلات كانت مستقرة من النوع-P وشغلت منطقة الاستقرار مساحات لانهائية في المستوي، علاوة على ذلك كانت الطريقة متناسقة ومتقاربة من الرتبة التاسعة. كما تم إثبات فعالية الطريقة الشرائحية المقترحة بحل أربع مسائل اختبار في المعادلات التفاضلية المتأخرة في الحالتين الخطية وغير الخطية، حيث تشير النتائج العددية إلى فعالية وكفاءة طريقتنا مقارنة مع بعض الطرائق الأخرى.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية متأخرة، طريقة شرائحية تجميعية، استيفاء هرميت، الاستقرار، التقارب.

* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية .

**أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Numerical Treatment of Delay-Differential Equations by Using Spline Hermite Approximations

Dr. Suliman M Mahmoud*
Dr. MohamadAli**
Bashar Gdeed***

(Received 22 / 5 / 2017. Accepted 3 / 10 /2017)

□ ABSTRACT □

In this paper, spline technique with five collocation parameters for finding the numerical solutions of delay differential equations (DDEs) is introduced. The presented method is based on the approximating the exact solution by C^4 -Hermite spline interpolation and as well as five collocation points at every subinterval of DDE. The study shows that the spline solution of purposed technique is existent and unique and has strongly stable for some collocation parameters. Moreover, this method if applied to test problem will be consistent, p-stable and convergent from order nine. In addition, it possesses unbounded region of p-stability. Numerical experiments for four examples are given to verify the reliability and efficiency of the purposed technique. Comparisons show that numerical results of our method are more accurate than other methods.

Keywords. Delay Differential Equations; Spline Collocation Method; Hermite Interpolation; Stability; Convergence.

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

**Professor, Department. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student, Department of Mathematics, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة

تنشأ المعادلات التفاضلية المتأخرة كنماذج رياضية في العديد من الحقول العملية المختلفة، لنذكر على سبيل المثال: العوامل المؤثرة في تزايد السكان (حساب فترات تأخير الحمل)، الأمراض المعدية (حساب فترة حضانة الأمراض كالإيدز)، علوم الصيدلة والفيزيولوجيا (فترات استجابة الجسم للأدوية، ونقل الدم، رد فعل الجسم لغاز CO₂ الخ)، وفي الكيمياء الحركية (فترة تأخير خلط التفاعلات)، التحكم بالسفن والملاحة البحرية (فترات التأخير الطويلة والقصيرة) وأيضا الكثير من المسائل الأخرى.

نقدم تقنية شرائحية تجميعية للحل العددي للمعادلات التفاضلية المتأخرة من الشكل :

$$y'(x) = f(x, y(x), y(\alpha(x))), \quad x \in [a, b] \quad (1.1)$$

حيث $f \in C^9([a, b] \times R \times R)$ دالة تحقق استمرارية ليبنتشيز بالنسبة إلى y . تدعى $\alpha(x)$ بدالة التأخير وهي دالة غير سالبة قيمها دائما أصغر أو تساوي متغير الزمن x ، ويمكن أن تكون ثابتة حقيقية موجبة مستقلة عن الزمن تمثل حالة التأخير الزمني. كما ويعطى شرط البدء للمعادلات (1.1) من أجل $\tilde{a} = \inf [\alpha(x)]$ بالعلاقة:

$$y(x) = \phi(x), \quad x \in [\tilde{a}, a] \quad (1.2)$$

حيث $\phi(x)$ دالة ابتدائية معطاة.

فُدمت عدة دراسات لاستقرار [1,2,3] استخدمت نماذج لمعادلات تفاضلية متأخرة خطية من الشكل:

$$y'(x) = \lambda y(x) + q y(x - \tau), \quad x > 0, \quad (1.3)$$

$$y(x) = g(x), \quad x \leq 0 \quad (1.4)$$

حيث $\lambda, q \in C, \tau > 0$. تبين الدراسات أنه إذا كانت الدالة $g(x)$ مستمرة وكان $q < -\text{Re}(\lambda)$ فإن الحل $y(x)$ للمسألة (1.1)-(1.2) يسعى إلى الصفر عندما $x \rightarrow \infty$ ، راجع [4].

دُرست نماذج كثيرة للمعادلات التفاضلية المتأخرة [6] من الشكل:

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \sigma_1), \dots, y(t - \sigma_n)), \quad \text{for } t_0 \leq t \leq t_F \quad (1.5)$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \leq t_0. \quad (1.6)$$

حيث: $\sigma_i = \sigma_i(t, y(t)) \geq 0$ دوال تأخير مرتبطة مع الزمن أو ربما تكون ثابتة حقيقية موجبة مستقلة عنه، و $\phi(t)$ دالة التأخير الابتدائية .

طور Ismail [7] وآخرون عام 2003 طريقة رانج-كونا الضمنية من المرتبة الرابعة بتطبيق استيفاء الفروق المقسومة واستيفاء Hout لحساب دالة التأخير، وتم تحديد ورسم منطقة الاستقرار - p لطريقتهم.

درس Ramadan [8] وآخرون عام 2006 الاستقرار العددي لطريقة تقريب شرائحية تستخدم كثيرات حدود من درجات عالية و تم إثبات التقارب من المراتب الأولى والثانية والثالثة.

قدم Hafshejani [11] وآخرون عام 2011 طريقة موجبات ليجندر لإيجاد الحل العددي للمسألة باستخدام حدوديات ليجندر من الدرجة $M=13$ مع M نقطة تجميع.

اقترح El-Hawary & El-Shami [9] عام 2012 طريقة تجميع شرائحية من الدرجة السادسة في الفضاء C^1 وتم إثبات الاستقرار وتحديد مرتبة التقارب ورسم منطقة الاستقرار - p لطريقتهم.

أوجد Ogunlaran & Olagunju [12] عام 2015 طريقة معدلة عن منشور سلسلة تايلور لتقريب الحل للمعادلات التفاضلية المتأخرة بكثيرات حدود في الحالتين الخطية وغير الخطية.

قدم Sukale&Daftardar-Gejji [14] عام 2016 تقنية تكرارية مطورة عن قاعدة شبه المنحرف وطريقة AdamsMoulton بخطوتين وثلاث خطوات وتم تحديد منطقة الاستقرار وإيجاد الحل العددي على مسارات طويلة. استخدم Ghorbani [13] عام 2017 طريقة التكرار المنغير لتقريب الحل للمعادلات التفاضلية المتأخرة بكثيرات حدود.

أهمية البحث وأهدافه:

ركزت الدراسات العلمية الحديثة [1-14] مؤخراً على بعض النماذج من المعادلات التفاضلية المتأخرة نظراً لأهميتها الواسعة في التطبيقات الحديثة. يهدف هذا العمل لإيجاد طريقة شرائحية مستقرة ومقاربة للحل العددي للمعادلات التفاضلية المتأخرة عندما تخضع لشروط تأخير ابتدائية. ثم استخدام لغة البرمجة Mathematica:10 العالية المستوى لإيجاد النتائج العددية. كما ويتجلى هدفنا بشكل أساسي في دعم وتطوير البحث العلمي في جامعاتنا وتزويد الباحثين وطلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية والتطبيقية.

طرائق البحث ومواده: Methodology

تعتمد طرائق البحث على بعض المفاهيم والمبرهنات الأساسية في نظرية التقريب مثل فضاء التقريبات بكثيرات حدود بالإضافة إلى بعض الأساسيات والمبرهنات في الجبر الخطي، وكذلك تم الاطلاع على عدد واسع من التقنيات العددية في بعض المراجع العلمية التي تتطرق لحل نماذج من نمط المعادلات التفاضلية المتأخرة بغية الاستفادة من المزايا الايجابية وتجنب العيوب والثغرات والمزايا السلبية، ولهذا تم اختيار فضاء التقريب بكثيرات حدود هرميت الشرائحية في C^4 .

النتائج والمناقشة

2- صياغة تقنية تجميع شرائحية للمعادلة التفاضلية المتأخرة

Formulation of Spline Collocation Technique

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية للمعادلة التفاضلية المتأخرة:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(\alpha(x))), & x \in [a, b] \\ y(x) = g(x), & \text{for } \tilde{a} \leq x < a \end{cases} \quad (2.1)$$

حيث $f \in C^9([a, b] \times R \times R)$ تحقق استمرارية ليبشيز (Lipschitz Continuous) بالنسبة إلى y ، $\alpha(x) = \inf [a, b]$ ، ودالة التأخير $\alpha(x) \leq x, x \in [a, b]$.

وبفرض $x_i = a + ih, i = 0(1)N$ نقاط تجزئة منتظمة للمجال $[a, b]$ ، إلى N مجال جزئي $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ، حيث $h = (b - a)/N$ طول الخطوة، $x_0 = a, x_N = b$ عندئذ يمكن إنشاء كثيرة حدود شرائحية من الدرجة التاسعة $S(x) \in C^4$ في المجال الجزئي I_i بالشكل:

$$S(x) = \bar{\gamma}^5 [(1 + 5\gamma + 15\gamma^2 + 35\gamma^3 + 70\gamma^4)S_{i-1}^{[0]} + (\gamma + 5\gamma^2 + 15\gamma^3 + 35\gamma^4)S_{i-1}^{[1]} + (\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{5}{2}\gamma^3 + \frac{15}{2}\gamma^4)S_{i-1}^{[2]} + (\frac{1}{6}\gamma^3 + \frac{5}{6}\gamma^4)S_{i-1}^{[3]} + (\frac{1}{24}\gamma^4)S_{i-1}^{[4]}] + \gamma^5 [(1 + 5\bar{\gamma} + 15\bar{\gamma}^2 + 35\bar{\gamma}^3 + 70\bar{\gamma}^4)S_i^{[0]} + (\bar{\gamma} + 5\bar{\gamma}^2 + 15\bar{\gamma}^3 + 35\bar{\gamma}^4)S_i^{[1]} + (\frac{1}{2}\bar{\gamma}^2 + \frac{5}{2}\bar{\gamma}^3 + \frac{15}{2}\bar{\gamma}^4)S_i^{[2]} + (\frac{1}{6}\bar{\gamma}^3 + \frac{5}{6}\bar{\gamma}^4)S_i^{[3]} + (\frac{1}{24}\bar{\gamma}^4)S_i^{[4]}] \quad (2.2)$$

حيث إن $\bar{\gamma} = 1 - \gamma \in [0,1]$ ، ولتبسيط استخدمنا الترميزات:

$$S_{i-1}^{[0]} = S(x_{i-1}), \quad S_{i-1}^{[1]} = hS'(x_{i-1}), \quad S_{i-1}^{[2]} = h^2S''(x_{i-1}), \quad S_{i-1}^{[3]} = h^3S'''(x_{i-1}), \quad S_{i-1}^{[4]} = h^4S^{(4)}(x_{i-1}), \quad i = 1(1)N \quad (2.3)$$

وباشتقاق الدالة (2.3) بالنسبة ل x ، نحصل على كثيرة الحدود:

$$hS'(x) = \bar{\gamma}^4 [(-630\gamma^4)S_{i-1}^{[0]} + (1 + 4\gamma + 10\gamma^2 + 20\gamma^3 - 315\gamma^4)S_{i-1}^{[1]} + (\gamma + 4\gamma^2 + 10\gamma^3 - \frac{135}{2}\gamma^4)S_{i-1}^{[2]} + (\frac{1}{2}\gamma^2 + 2\gamma^3 - \frac{15}{2}\gamma^4)S_{i-1}^{[3]} + (\frac{1}{6}\gamma^3 - \frac{3}{8}\gamma^4)S_{i-1}^{[4]}] + \gamma^4 [(630\bar{\gamma}^4)S_i^{[0]} + (1 + 4\bar{\gamma} + 10\bar{\gamma}^2 + 20\bar{\gamma}^3 - 315\bar{\gamma}^4)S_i^{[1]} - (\bar{\gamma} + 4\bar{\gamma}^2 + 10\bar{\gamma}^3 - \frac{135}{2}\bar{\gamma}^4)S_i^{[2]} + (\frac{1}{2}\bar{\gamma}^2 + 2\bar{\gamma}^3 - \frac{15}{2}\bar{\gamma}^4)S_i^{[3]} - (\frac{1}{6}\bar{\gamma}^3 - \frac{3}{8}\bar{\gamma}^4)S_i^{[4]}] \quad (2.4)$$

تستخدم الطريقة الشرائحية خمس نقاط تجميع:

$$x_{i-1+z_j} = x_{i-1} + z_j h, \quad j = 1(1)5 \quad (2.5)$$

في كل مجال جزئي $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1(1)N$ ، وترتبط تلك النقاط مع خمس وسطاء تجميع مرتبة كالاتي:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \quad (2.6)$$

وبشكل عام، يوجد شريحة $S_i(x)$ فوق كل مجال جزئي تُعرف كالاتي:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ \vdots \\ S_{i-1}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \vdots \\ S_{N-1}(x), & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

تحقق هذه الشرائح الشروط الآتية:

- i. $S(x) \in C^4[a, b]; \quad S(x_i) \cong y(x_i), \quad i = 0(1)N$
- ii. $S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i), \quad i = 1(1)N-1$
- iii. $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad i = 1(1)N-1$
- iv. $S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i), \quad i = 1(1)N-1$
- v. $S'''_i(x_i) = S'''_{i-1}(x_i), \quad i = 1(1)N-1$
- vi. $S^{(4)}_i(x_i) = S^{(4)}_{i-1}(x_i), \quad i = 1(1)N-1$

وبتطبيق الشرائح $S(x)$ ، $S'(x)$ مع نقاط التجميع (2.5)–(2.6) على المسألة (2.1)، نحصل على المنظومة:

$$S'(x_{i-1+z_j}) = f(x_{i-1+z_j}, S(x_{i-1+z_j}), S(\alpha(x_{i-1+z_j}))), \quad j = 1(1)5 \quad (2.7)$$

في المجال الجزئي $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ، و لتبسيط التعبير نستخدم الترميزات:

$$\cdot f_{i-1+z_j} \equiv f(x_{i-1+z_j}, S(x_{i-1+z_j}), S(\alpha(x_{i-1+z_j}))), \quad \hat{z}_j = 1 - z_j$$

وباستبدال قيم الشرائح في نقاط التجميع نحصل من منظومة المعادلات (2.7) على الآتي:

$$\begin{aligned}
 & z_j^4 [(630\hat{z}_j^4)S_i^{[0]} + (1+4\hat{z}_j + 10\hat{z}_j^2 + 20\hat{z}_j^3 - 315\hat{z}_j^4)S_i^{[1]} - \\
 & (\hat{z}_j + 4\hat{z}_j^2 + 10\hat{z}_j^3 - \frac{135}{2}\hat{z}_j^4)S_i^{[2]} + (\frac{1}{2}\hat{z}_j^2 + 2\hat{z}_j^3 - \frac{15}{2}\hat{z}_j^4)S_i^{[3]} - (\frac{1}{6}\hat{z}_j^3 - \frac{3}{8}\hat{z}_j^4)S_i^{[4]}] = \\
 & - \hat{z}_j^4 [(-630z_j^4)S_{i-1}^{[0]} + (1+4z_j + 10z_j^2 + 20z_j^3 - 315z_j^4)S_{i-1}^{[1]} + (z_j + 4z_j^2 + 10z_j^3 - \frac{135}{2}z_j^4)S_{i-1}^{[2]} + \\
 & (\frac{1}{2}z_j^2 + 2z_j^3 - \frac{15}{2}z_j^4)S_{i-1}^{[3]} + (\frac{1}{6}z_j^3 - \frac{3}{8}z_j^4)S_{i-1}^{[4]}] + hf_{i-1+z_j} \quad j=1(1)5
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

وبتعيين $S_i^{(1)} = hf_i, S_{i-1}^{(1)} = hf_{i-1}$ في (2.8)، تنتج لدينا المنظومة التكرارية:

$$\underline{S}_i = A\underline{S}_{i-1} + hB\underline{f}_i \tag{2.9}$$

حيث إن: $B = A_1^{-1}H, A = A_1^{-1}A_2$ ، ولدينا أيضا:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 630z_1^4\hat{z}_1^4 & z_1^4(\frac{135}{2}\hat{z}_1^4 - 10\hat{z}_1^3 - 4\hat{z}_1^2 - \hat{z}_1) & z_1^4(\frac{1}{2}\hat{z}_1^2 + 2\hat{z}_1^3 - \frac{15}{2}\hat{z}_1^4) & z_1^4(\frac{3}{8}\hat{z}_1^4 - \frac{1}{6}\hat{z}_1^3) \\ 630z_2^4\hat{z}_2^4 & z_2^4(\frac{135}{2}\hat{z}_2^4 - 10\hat{z}_2^3 - 4\hat{z}_2^2 - \hat{z}_2) & z_2^4(\frac{1}{2}\hat{z}_2^2 + 2\hat{z}_2^3 - \frac{15}{2}\hat{z}_2^4) & z_2^4(\frac{3}{8}\hat{z}_2^4 - \frac{1}{6}\hat{z}_2^3) \\ 630z_3^4\hat{z}_3^4 & z_3^4(\frac{135}{2}\hat{z}_3^4 - 10\hat{z}_3^3 - 4\hat{z}_3^2 - \hat{z}_3) & z_3^4(\frac{1}{2}\hat{z}_3^2 + 2\hat{z}_3^3 - \frac{15}{2}\hat{z}_3^4) & z_3^4(\frac{3}{8}\hat{z}_3^4 - \frac{1}{6}\hat{z}_3^3) \\ 630z_4^4\hat{z}_4^4 & z_4^4(\frac{135}{2}\hat{z}_4^4 - 10\hat{z}_4^3 - 4\hat{z}_4^2 - \hat{z}_4) & z_4^4(\frac{1}{2}\hat{z}_4^2 + 2\hat{z}_4^3 - \frac{15}{2}\hat{z}_4^4) & z_4^4(\frac{3}{8}\hat{z}_4^4 - \frac{1}{6}\hat{z}_4^3) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 630\hat{z}_1^4z_1^4 & \hat{z}_1^4(\frac{135}{2}z_1^4 - 10z_1^3 - 4z_1^2 - z_1) & \hat{z}_1^4(\frac{15}{2}z_1^4 - 2z_1^3 - \frac{1}{2}z_1^2) & \hat{z}_1^4(\frac{3}{8}z_1^4 - \frac{1}{6}z_1^3) \\ 630\hat{z}_2^4z_2^4 & \hat{z}_2^4(\frac{135}{2}z_2^4 - 10z_2^3 - 4z_2^2 - z_2) & \hat{z}_2^4(\frac{15}{2}z_2^4 - 2z_2^3 - \frac{1}{2}z_2^2) & \hat{z}_2^4(\frac{3}{8}z_2^4 - \frac{1}{6}z_2^3) \\ 630\hat{z}_3^4z_3^4 & \hat{z}_3^4(\frac{135}{2}z_3^4 - 10z_3^3 - 4z_3^2 - z_3) & \hat{z}_3^4(\frac{15}{2}z_3^4 - 2z_3^3 - \frac{1}{2}z_3^2) & \hat{z}_3^4(\frac{3}{8}z_3^4 - \frac{1}{6}z_3^3) \\ 630\hat{z}_4^4z_4^4 & \hat{z}_4^4(\frac{135}{2}z_4^4 - 10z_4^3 - 4z_4^2 - z_4) & \hat{z}_4^4(\frac{15}{2}z_4^4 - 2z_4^3 - \frac{1}{2}z_4^2) & \hat{z}_4^4(\frac{3}{8}z_4^4 - \frac{1}{6}z_4^3) \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \hat{z}_1^4(315z_1^4 - 20z_1^2 - 10z_1 - 1) & 1 & 0 & 0 & 0 & z_1^4(315\hat{z}_1^4 - 20\hat{z}_1^2 - 10\hat{z}_1 - 1) \\ \hat{z}_2^4(315z_2^4 - 20z_2^2 - 10z_2 - 1) & 0 & 1 & 0 & 0 & z_2^4(315\hat{z}_2^4 - 20\hat{z}_2^2 - 10\hat{z}_2 - 1) \\ \hat{z}_3^4(315z_3^4 - 20z_3^2 - 10z_3 - 1) & 0 & 0 & 1 & 0 & z_3^4(315\hat{z}_3^4 - 20\hat{z}_3^2 - 10\hat{z}_3 - 1) \\ \hat{z}_4^4(315z_4^4 - 20z_4^2 - 10z_4 - 1) & 0 & 0 & 0 & 1 & z_4^4(315\hat{z}_4^4 - 20\hat{z}_4^2 - 10\hat{z}_4 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_i = (S_i^{[0]}, S_i^{[2]}, S_i^{[3]}, S_i^{[4]})^T$$

$$\underline{f}_i = (f_{i-1}, f_{i-1+z_1}, f_{i-1+z_2}, f_{i-1+z_3}, f_{i-1+z_4}, f_i)^T$$

كما ويمكن ملاحظة أن $S(\alpha(x_{i-1+z_j})) = g(\alpha(x_{i-1+z_j}))$ من أجل $\alpha(x_{i-1+z_j}) \leq a$

وإذا كان $\alpha(x_{i-1+z_j}) \in [x_{k-1}, x_k]$ لأجل $k=1(1)N, k \leq i$ ، يتم حساب $S(\alpha(x_{i-1+z_j}))$ كالآتي:

$$S(\alpha(x_{i-1+z_j})) = \hat{z}_j^5 [(1 + 5z_j + 15z_j^2 + 35z_j^3 + 70z_j^4)S_{k-1}^{[0]} + (z_j + 5z_j^2 + 15z_j^3 + 35z_j^4)S_{k-1}^{[1]} + \\ (\frac{1}{2}z_j^2 + \frac{5}{2}z_j^3 + \frac{15}{2}z_j^4)S_{k-1}^{[2]} + (\frac{1}{6}z_j^3 + \frac{5}{6}z_j^4)S_{k-1}^{[3]} + (\frac{1}{24}z_j^4)S_{k-1}^{[4]}] + \\ z_j^5 [(1 + 5\hat{z}_j + 15\hat{z}_j^2 + 35\hat{z}_j^3 + 70\hat{z}_j^4)S_k^{[0]} + (\hat{z}_j + 5\hat{z}_j^2 + 15\hat{z}_j^3 + 35\hat{z}_j^4)S_k^{[1]} + \\ (\frac{1}{2}\hat{z}_j^2 + \frac{5}{2}\hat{z}_j^3 + \frac{15}{2}\hat{z}_j^4)S_k^{[2]} + (\frac{1}{6}\hat{z}_j^3 + \frac{5}{6}\hat{z}_j^4)S_k^{[3]} + (\frac{1}{24}\hat{z}_j^4)S_k^{[4]}]$$

$$\text{حيث إن } \bar{\gamma}_{k-1+z_j} = 1 - \gamma_{k-1+z_j} \text{ و } \gamma_{k-1+z_j} = \frac{\alpha(x_{i-1+z_j}) - x_{k-1}}{h}$$

نجد أن: $\alpha(x_{i-1+z_j}) - x_{k-1} \leq h z_j$ وبالتالي يوجد $0 < r \leq 1$ بحيث يكون $\alpha(x_{i-1+z_j}) - x_{k-1} = r h z_j$ ومنه

$$\bar{\gamma}_{k-1+z_j} = 1 - r z_j, \gamma_{i-1+z_j} = \frac{r h z_j}{h} = r z_j$$

ملاحظة (1): بما أن $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < 1$ محققة دوماً فإن منظومة المعادلات التكرارية (2.9) تكون

موجودة دائماً وتملك حل وحيد لأن محدد المصفوفة A_1 غير صفري كما سنجد:

$$|A_1| = -\frac{105(z_1 z_2 z_3 z_4)^4 \hat{z}_1 \hat{z}_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 (\hat{z}_2 - \hat{z}_1)(\hat{z}_1 - \hat{z}_3)(\hat{z}_2 - \hat{z}_3)(\hat{z}_1 - \hat{z}_4)(\hat{z}_2 - \hat{z}_4)(\hat{z}_3 - \hat{z}_4)}{2} \neq 0$$

$$\text{حيث: } \hat{z}_j = 1 - z_j, j=1(1)5.$$

الاستقرار والتقارب للطريقة: Stability and Convergence

● الاستقرار: Stability

تعريف (1) [15]: يقال عن طريقة تجميع شرائحية من الشكل (2.9) إنها **مستقرة** إذا كانت جميع القيم المميزة للمصفوفة A تقع جميعها داخل قرص الوحدة أو على محيطه، ويكون الاستقرار قوي **Strong Stability** إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة للمصفوفة A تقع داخل قرص الوحدة وجذر بسيط يقع على محيطه، حيث A هي مصفوفة المنظومة التكرارية (2.9).

نتيجة (1): تكون طريقة التجميع الشرائحية المطبقة على المسألة (2.1) مع خمس نقاط تجميع **مستقرة بقوة**

إذا تحققت الشروط:

$$\begin{aligned} |\mu_1| &= 1, \\ |\mu_j| &< 1, \quad j = 2(1)5 \end{aligned} \quad (3.1)$$

حيث: $\mu_j, j = 1(1)5$ هي القيم المميزة للمصفوفة المنظومة التكرارية (2.9).

الإثبات: نلاحظ أن عناصر المصفوفة A يعبر عنها بدلالة وسطاء التجميع $z_j, j = 1(1)4$ ، ولهذا تم استخدام برنامج Mathematica:10 للبحث عن إمكانية وجود قيم مثبتة لوسطاء التجميع $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < 1$ من أجلها تتحقق الشروط (3.1)، وبإجراء العديد من الاختبارات العددية تم التوصل إلى النتائج المدرجة في الجدول (1)، حيث تبين الحسابات في الجدول (1) بأنه يوجد بعض التحديدات المختلفة لوسطاء التجميع من أجلها تكون جميع جذور المعادلة المميزة للمصفوفة A تقع داخل قرص الوحدة وجذر بسيط يقع على محيطه، وهذا يجعل الشروط

(3.1) محققة، وبالتالي وفقاً للتعريف (1) ستكون طريقة التجميع الشرائحية المطبقة إلى المسألة (2.1) مستقرة بقوة إذا تم استخدام أيّاً من وسطاء التجميع المدرجة في الجدول (1).

الجدول (1): تحديد وسطاء التجميع التي تحقق الاستقرار القوي للطريقة الشرائحية

القيم المميزة للمصفوفة A	وسطاء التجميع
$\mu_1 = 1; \mu_2 = -0.99787; \mu_3 = -0.001982; \mu_4 = -1.77199E-7; \mu_5 = 0.$	$z_1 = 0.63; z_2 = 0.75; z_3 = 0.85; z_4 = 0.98$
$\mu_1 = 1; \mu_2 = -0.99466; \mu_3 = -0.001571; \mu_4 = -2.88338E-10; \mu_5 = 0.$	$z_1 = 0.5; z_2 = 0.78; z_3 = 0.88; z_4 = 0.998$
$\mu_1 = 1; \mu_2 = -0.52183; \mu_3 = -0.0006973; \mu_4 = -1.3531E-10; \mu_5 = 0.$	$z_1 = 0.6; z_2 = 0.8; z_3 = 0.9; z_4 = 0.998$
$\mu_1 = 1; \mu_2 = -0.944459; \mu_3 = -0.001745; \mu_4 = -3.60489E-7; \mu_5 = 0.$	$z_1 = 0.65; z_2 = 0.71; z_3 = 0.89; z_4 = 0.97$
$\mu_1 = 1; \mu_2 = -0.894633; \mu_3 = -0.001668; \mu_4 = -7.29605E-7; \mu_5 = 0.$	$z_1 = 0.64; z_2 = 0.74; z_3 = 0.91; z_4 = 0.95$

التناسق: Consistent

تعريف (2) [16]: يقال عن طريقة عددية من الشكل (2.9) إنها متناسقة (Consistent) من الرتبة p إذا كان $\|\tau_k\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq N} |\tau_k| = O(h^{p+1})$ حيث τ_k هو خطأ الاقتطاع الموضعي للطريقة.

نتيجة (2): بفرض أن $f \in C^9([a, b] \times R \times R)$ ، عندئذ فإن طريقة التجميع الشرائحية المطبقة على المسألة (2.1) مع خمس نقاط تجميع تكون متناسقة ومن الرتبة التاسعة.

الإثبات: بفرض أن $\alpha(x_{i-1+z_j}) \in [x_{k-1}, x_k]$ وأن $y \in C^{10}[a, b]$ و $S(x)$ تقريب شرائحي للدالة $y(x)$ ،

وبفرض أن τ_i شعاع الخطأ الموضعي، نحصل عليه من المنظومة (2.9) بالشكل:

$$\tau_i = \begin{bmatrix} y(x_i) \\ h^2 y''(x_i) \\ h^3 y'''(x_i) \\ h^4 y^{(4)}(x_i) \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} y(x_{i-1}) \\ h^2 y''(x_{i-1}) \\ h^3 y'''(x_{i-1}) \\ h^4 y^{(4)}(x_{i-1}) \end{bmatrix} - hB \begin{bmatrix} y'(x_{i-1}) \\ y'(x_{i-1+z_1}) \\ y'(x_{i-1+z_2}) \\ y'(x_{i-1+z_3}) \\ y'(x_{i-1+z_4}) \\ y'(x_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1(1)N \quad (3.2)$$

الآن، باستخدام منشور تايلور:

$$y(x) = \sum_{k=0}^9 \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_{i-1}) \gamma^k + O(h^{10}), \quad \gamma = (x - x_{i-1})/h, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

وأيضاً من الجدول (1) نستخدم وسطاء التجميع $z_1 = 0.63; z_2 = 0.75; z_3 = 0.85; z_4 = 0.98$ وبالتعويض في المنظومة (3.2) نحصل على:

$$\tau_i = \begin{bmatrix} -2.72697E-10 y^{(10)}(x_{i-1}) h^{10} \\ 7.64716E-10 y^{(10)}(x_{i-1}) h^{10} \\ 1.03037E-7 y^{(10)}(x_{i-1}) h^{10} \\ 4.51232E-6 y^{(10)}(x_{i-1}) h^{10} \end{bmatrix}$$

ومنه فإن:

$$\|\tau_i\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq 4} |\tilde{\tau}_{i,j}| = 4.51232 \times 10^{-6} y^{(10)}(x_{i-1}) h^{10} \equiv O(h^{10})$$

حيث $\tau_i = (\tilde{\tau}_{i,j}), j=1(1)4$.

نلاحظ أن الخطأ المقتطع الموضوعي عند x_i من الرتبة العاشرة لطريقة التجميع الشرائحية المطبقة على

المسألة (2.1) والخطأ الشامل على كامل المجال $[a,b]$ سيحسب بعد N خطوة كالاتي:

$$\|T\|_{\infty} = N \|\tau_i\|_{\infty} = N.O(h^{10}) = \frac{b-a}{h} O(h^{10}) \equiv O(h^9)$$

إذن فالطريقة الشرائحية متناسقة من الرتبة التاسعة وهو المطلوب.

نتيجة (3):

بفرض أن $f \in C^9([a,b] \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R})$ عندئذ فإن التقريب الشرائحي $S(x)$ المعطى يتقارب إلى الحل $y(x)$ للمسألة

(2.1) عندما $h \rightarrow 0$ إذا تحققت شروط التجميع المدرجة في الجدول (1)، حيث إن

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-m} S_0^{[m]} = y^{(m)}(x_0), m=0(1)4 \quad (3.3)$$

علاوة على ذلك، إذا حققت القيم الابتدائية (2.3) والعلاقاتين (3.3) لأجل $i=0$ ، فإن التقارب يكون من الرتبة

التاسعة، يعني أن

$$|y^{(m)}(x_i) - h^{-m} S_i^{[m]}| \leq L_m h^9, m=0,1, \quad (3.4)$$

الإثبات: من الواضح أنه بتطبيق شرط ليبشيز يمكن بسهولة الحصول على الآتي:

$$\begin{aligned} |y'(x_i) - S'(x_i)| &= |f(x_i, y(x_i), y(\alpha(x_i))) - f(x_i, S(x_i), S(\alpha(x_i)))| \\ &\leq L\{|y(x_i) - S(x_i)| + |y(\alpha(x_i)) - S(\alpha(x_i))|\} \\ &\leq L\{L_0 h^9 + L_0 h^9\} = L_1 h^9 \end{aligned}$$

حيث $L_1 = 2L_0$ ، و L ثابت ليبشيز وهو المطلوب.

ملاحظة (2)

يمكن تقدير الخطأ الشامل في المشتقات العليا للحل كالاتي:

$$|y^{(m)}(x) - S_i^{(m)}(x)| \leq L_m h^{9-m}, m=2(1)9, x \in [a,b], x \neq x_i \quad (3.5)$$

● الاستقرار-P: P-Stability

لدراسة الاستقرار-P للطريقة نختبر المعادلة التفاضلية المتأخرة الخطية النموذجية الآتية [1-3]:

$$y'(x) = \lambda y(x) + q y(x-\tau) \quad (3.6)$$

حيث $\lambda, q \in C$ اختيارية والتأخير τ هو ثابت موجب. وقبل البدء نقدم التعريف الآتي.

تعريف (3): [4,9] يقال عن طريقة عددية مطبقة للمعادلة (3.6) إنها في حالة استقرار P- إذا كان تحت الشرط

$$|q| < -\operatorname{Re}(\lambda) \text{ عند } S(x_i) \rightarrow 0 \text{ عندما } x_i \rightarrow \infty \text{ مهما تكن } h \text{ تحقق } \tau = mh \text{ ، } \tilde{m} \in \mathbb{N}$$

فإذا رمزنا بـ S_p لمنطقة الاستقرار P-، حيث تعرف هذه المنطقة بأنها مجموعة جميع النقاط $(h\lambda, hq)$ من المستوي التي من أجلها تكون الطريقة الشرانجية مستقرة.

وبتطبيق التقريبات الشرانجية ونقاط التجميع على المعادلة (3.6) نجد أن:

$$S'(x_{i-1+z_j}) = \lambda S(x_{i-1+z_j}) + q S(x_{i-m-1+z_j}), \quad j=1(1)4, \quad i=1(1)N, \quad m \leq i, \quad (3.7)$$

حيث:

$$x_{i-m-1+z_j} \in [x_{i-m-1}, x_{i-m}], \quad S(x_{i-m-1+z_j}) = S(x_{i-1+z_j} - mh), \quad \tau = mh$$

وباستبدال قيم الشرانج في نقاط التجميع يمكن كتابة (3.7) بالشكل:

$$\begin{aligned} & [630z_j^4 \hat{z}_j^4 - u z_j^5 (1 + 5\hat{z}_j + 15\hat{z}_j^2 + 35\hat{z}_j^3 + 70\hat{z}_j^4)] S_i^{[0]} + [z_j^4 (1 + 4\hat{z}_j + 10\hat{z}_j^2 + 20\hat{z}_j^3 - 315\hat{z}_j^4) \\ & - u z_j^5 (\hat{z}_j + 5\hat{z}_j^2 + 15\hat{z}_j^3 + 35\hat{z}_j^4)] S_i^{[1]} + [z_j^4 (\hat{z}_j + 4\hat{z}_j^2 + 10\hat{z}_j^3 - \frac{135}{2}\hat{z}_j^4) - u z_j^5 (\frac{1}{2}\hat{z}_j^2 + \frac{5}{2}\hat{z}_j^3 + \\ & \frac{15}{2}\hat{z}_j^4)] S_i^{[2]} + [z_j^4 (\frac{1}{2}\hat{z}_j^2 + 2\hat{z}_j^3 - \frac{15}{2}\hat{z}_j^4) - u z_j^5 (\frac{1}{6}\hat{z}_j^3 + \frac{5}{6}\hat{z}_j^4)] S_i^{[3]} + [z_j^4 (\frac{3}{8}\hat{z}_j^4 - \frac{1}{6}\hat{z}_j^3) - \\ & u z_j^5 (\frac{1}{24}\hat{z}_j^4)] S_i^{[4]} + [-630\hat{z}_j^4 z_j^4 - u \hat{z}_j^5 (1 + 5z_j + 15z_j^2 + 35z_j^3 + 70z_j^4)] S_{i-m-1}^{[0]} + \\ & [\hat{z}_j^4 (1 + 4z_j + 10z_j^2 + 20z_j^3 - 315z_j^4) - u \hat{z}_j^5 (z_j + 5z_j^2 + 15z_j^3 + 35z_j^4)] S_{i-m-1}^{[1]} + \\ & [\hat{z}_j^4 (z_j + 4z_j^2 + 10z_j^3 - \frac{135}{2}z_j^4) - u \hat{z}_j^5 (\frac{1}{2}z_j^2 + \frac{5}{2}z_j^3 + \frac{15}{2}z_j^4)] S_{i-m-1}^{[2]} + \\ & [\hat{z}_j^4 (\frac{1}{2}z_j^2 + 2z_j^3 - \frac{15}{2}z_j^4) - u \hat{z}_j^5 (\frac{1}{6}z_j^3 + \frac{5}{6}z_j^4)] S_{i-m-1}^{[3]} + [\hat{z}_j^4 (\frac{1}{6}z_j^3 - \frac{3}{8}z_j^4) - \\ & u \hat{z}_j^5 (\frac{1}{6}z_j^3 - \frac{3}{8}z_j^4)] S_{i-m-1}^{[4]} = \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & v z_j^5 [(1 + 5\hat{z}_j + 15\hat{z}_j^2 + 35\hat{z}_j^3 + 70\hat{z}_j^4)] S_{i-m}^{[0]} + (\hat{z}_j + 5\hat{z}_j^2 + 15\hat{z}_j^3 + 35\hat{z}_j^4) S_{i-m}^{[1]} + \\ & (\frac{1}{2}\hat{z}_j^2 + \frac{5}{2}\hat{z}_j^3 + \frac{15}{2}\hat{z}_j^4) S_{i-m}^{[2]} + (\frac{1}{6}\hat{z}_j^3 + \frac{5}{6}\hat{z}_j^4) S_{i-m}^{[3]} + (\frac{1}{24}\hat{z}_j^4) S_{i-m}^{[4]} + \\ & v \hat{z}_j^5 [(1 + 5z_j + 15z_j^2 + 35z_j^3 + 70z_j^4)] S_{i-m-1}^{[0]} + (z_j + 5z_j^2 + 15z_j^3 + 35z_j^4) S_{i-m-1}^{[1]} + \\ & (\frac{1}{2}z_j^2 + \frac{5}{2}z_j^3 + \frac{15}{2}z_j^4) S_{i-m-1}^{[2]} + (\frac{1}{6}z_j^3 + \frac{5}{6}z_j^4) S_{i-m-1}^{[3]} + (\frac{1}{24}z_j^4) S_{i-m-1}^{[4]} \end{aligned}$$

$$S_i^{[1]} = z S_i^{[0]} + v S_{i-m}^{[0]}, \quad (3.9)$$

$$S_{i-1}^{[1]} = z S_{i-1}^{[0]} + v S_{i-m-1}^{[0]}. \quad (3.10)$$

حيث $u = \lambda h$, $v = qh$ كما يمكن إعادة كتابة (3.8)-(3.10) وفق الترميز المصفوفي بالشكل:

$$\overline{A}_1 \overline{S}_i + \overline{A}_2 \overline{S}_{i-1} = \overline{B}_1 \overline{S}_{i-m} + \overline{B}_2 \overline{S}_{i-m-1} \quad (3.11)$$

حيث إن المصفوفات $\overline{A}_1 = (a_{i,j})$, $\overline{A}_2 = (\hat{a}_{i,j})$, $\overline{B}_1 = (b_{i,j})$, $\overline{B}_2 = (\hat{b}_{i,j})$ معرفة بالشكل:

$$a_{1,j} = 630z_j^4 \hat{z}_j^4 - u z_j^5 (1 + 5\hat{z}_j + 15\hat{z}_j^2 + 35\hat{z}_j^3 + 70\hat{z}_j^4),$$

$$a_{2,j} = z_j^4 (1 + 4\hat{z}_j + 10\hat{z}_j^2 + 20\hat{z}_j^3 - 315\hat{z}_j^4) - u z_j^5 (\hat{z}_j + 5\hat{z}_j^2 + 15\hat{z}_j^3 + 35\hat{z}_j^4),$$

$$a_{3,j} = z_j^4 (\hat{z}_j + 4\hat{z}_j^2 + 10\hat{z}_j^3 - \frac{135}{2}\hat{z}_j^4) - u z_j^5 (\frac{1}{2}\hat{z}_j^2 + \frac{5}{2}\hat{z}_j^3 + \frac{15}{2}\hat{z}_j^4),$$

$$\begin{aligned}
 a_{4,j} &= z_j^4 \left(\frac{1}{2} \hat{z}_j^2 + 2\hat{z}_j^3 - \frac{15}{2} \hat{z}_j^4 \right) - u z_j^5 \left(\frac{1}{6} \hat{z}_j^3 + \frac{5}{6} \hat{z}_j^4 \right), \\
 a_{5,j} &= z_j^4 \left(\frac{3}{8} \hat{z}_j^4 - \frac{1}{6} \hat{z}_j^3 \right) - u z_j^5 \left(\frac{1}{24} \hat{z}_j^4 \right), \\
 \hat{a}_{1,j} &= -630 \hat{z}_j^4 z_j^4 - u \hat{z}_j^5 (1 + 5z_j + 15z_j^2 + 35z_j^3 + 70z_j^4), \\
 \hat{a}_{2,j} &= \hat{z}_j^4 (1 + 4z_j + 10z_j^2 + 20z_j^3 - 315z_j^4) - u \hat{z}_j^5 (z_j + 5z_j^2 + 15z_j^3 + 35z_j^4), \\
 \hat{a}_{3,j} &= \hat{z}_j^4 (z_j + 4z_j^2 + 10z_j^3 - \frac{135}{2} z_j^4) - u \hat{z}_j^5 \left(\frac{1}{2} z_j^2 + \frac{5}{2} z_j^3 + \frac{15}{2} z_j^4 \right), \\
 \hat{a}_{4,j} &= \hat{z}_j^4 \left(\frac{1}{2} z_j^2 + 2z_j^3 - \frac{15}{2} z_j^4 \right) - u \hat{z}_j^5 \left(\frac{1}{6} z_j^3 + \frac{5}{6} z_j^4 \right), \\
 \hat{a}_{5,j} &= \hat{z}_j^4 \left(\frac{1}{6} z_j^3 - \frac{3}{8} z_j^4 \right) - u \hat{z}_j^5 \left(\frac{1}{6} z_j^3 - \frac{3}{8} z_j^4 \right), \\
 b_{1,j} &= v z_j^5 (1 + 5\hat{z}_j + 15\hat{z}_j^2 + 35\hat{z}_j^3 + 70\hat{z}_j^4), \quad b_{2,j} = v z_j^5 (\hat{z}_j + 5\hat{z}_j^2 + 15\hat{z}_j^3 + 35\hat{z}_j^4), \\
 b_{3,j} &= v z_j^5 \left(\frac{1}{2} \hat{z}_j^2 + \frac{5}{2} \hat{z}_j^3 + \frac{15}{2} \hat{z}_j^4 \right), \quad b_{4,j} = v z_j^5 \left(\frac{1}{6} \hat{z}_j^3 + \frac{5}{6} \hat{z}_j^4 \right), \quad b_{5,j} = v z_j^5 \left(\frac{1}{24} \hat{z}_j^4 \right), \\
 \hat{b}_{1,j} &= v \hat{z}_j^5 [(1 + 5z_j + 15z_j^2 + 35z_j^3 + 70z_j^4)], \quad \hat{b}_{2,j} = v \hat{z}_j^5 (z_j + 5z_j^2 + 15z_j^3 + 35z_j^4), \\
 \hat{b}_{3,j} &= v \hat{z}_j^5 \left(\frac{1}{2} z_j^2 + \frac{5}{2} z_j^3 + \frac{15}{2} z_j^4 \right), \quad \hat{b}_{4,j} = v \hat{z}_j^5 \left(\frac{1}{6} z_j^3 + \frac{5}{6} z_j^4 \right), \quad \hat{b}_{5,j} = v \hat{z}_j^5 \left(\frac{1}{24} z_j^4 \right); \quad j=1(1)5
 \end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على الجملة:

$$W(z, v)M_i = G(z, v)M_{i-1} \quad (3.12)$$

حيث:

$$\begin{aligned}
 M_i &= (\bar{S}_i, \bar{S}_{i-m})^T, \quad M_{i-1} = (\bar{S}_{i-1}, \bar{S}_{i-m-1})^T, \\
 W(z, v) &= [\bar{A}_1 \mid -\bar{B}_1], \quad G(z, v) = [-\bar{A}_2 \mid \bar{B}_2]. \\
 \bar{A}_1 &= (a_{ij}), \quad \bar{A}_2 = (\hat{a}_{1,j}), \quad \bar{B}_2 = (\hat{b}_{1,j}), \quad \bar{B}_1 = (b_{1,j})
 \end{aligned}$$

وهكذا وفقاً للتعريف فإن $u = \lambda h, v = qh$ تنتمي إلى منطقة الاستقرار P -، بمعنى أن $(u, v) \in S_p$ إذا كانت

القيم المميزة $\xi_j(u, v), j=1(1)8$ لمسألة القيمة المميزة المعممة:

$$\xi W(z, v) \cdot \underline{x} = G(z, v) \cdot \underline{x}, \quad \underline{x} \neq 0 \quad (3.13)$$

تقع داخل قرص الوحدة، أي إذا تحققت الشروط:

$$|\xi_j(u, v)| < 1, \quad j=1(1)8. \quad (3.14)$$

لنأخذ $\det(\xi W(u, v) - G(u, v)) = 0$ المعادلة المميزة للمسألة (3.13) وندرس السلوك المقارب عندما

$u \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty$ وباختيار وسطاء التجميع من الجدول (1):

$$\mathbf{z1} = \mathbf{0.7}; \quad \mathbf{z2} = \mathbf{0.75}; \quad \mathbf{z3} = \mathbf{0.85}; \quad \mathbf{z4} = \mathbf{0.99}$$

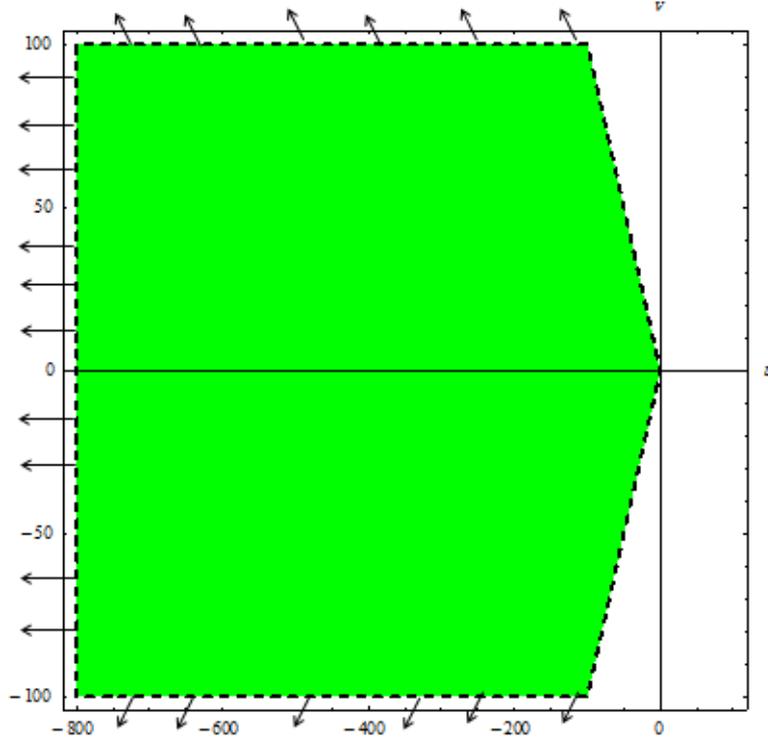
واستخدام Mathematica:10 نحسب القيم المميزة للمسألة (3.12) وندرج النتائج في الجدول (2).

الجدول (2): القيم المميزة لمسألة القيمة المميزة المعممة

$\xi_1 = -0.94650$	$\xi_5 = -0.001975$
$\xi_2 = -6.35429E-12$	$\xi_6 = -9.93673E-7$
$\xi_3 = 2.992E-13$	$\xi_7 = 0.00143146$
$\xi_4 = 2.70671E-7$	$\xi_8 = 0$

ولتحديد منطقة الاستقرار S_p للطريقة الشرائحية المطبقة إلى مسألة الاختبار (3.6) نعين المنحني الحدودي لمجموعة نقاط الاستقرار $\{(u, v)\}$ في المستوى $uv=0$ ، تحت الشرط $|v| < -\text{Re}(u)$ وفقاً لـ:

(1) $I = \sqrt{-1} \det(e^{\rho I} W(u, v) - G(u, v)) = 0$ ، ونرسم باستخدام Mathematica:10 في الشكل (1) منطقة الاستقرار P- وهي المنطقة المظللة، ومن الواضح أن الطريقة تحدد مساحات لا نهائية من الاستقرار.



الشكل (1): منطقة الاستقرار P- للطريقة الشرائحية

النتائج العددية Numerical Results

نقدم أربع أمثلة اختبار خطية وغير خطية لإثبات الاستقرار والتقارب والدقة العددية للطريقة الشرائحية المقترحة. كما سنقوم بإجراء مقارنات لنتائج طريقتنا الشرائحية مع خمس طرائق أخرى مختلفة [4,9-11,14]. تمت برمجة الطريقة وتنفيذها باستخدام لغة البرمجة Mathematica الإصدار العاشر.

مثال (1): لناخذ اختبارنا الأول معادلة تفاضلية متأخرة بوسيط قاسي (Stiffness) [4,10]

$$y'(t) = A y(t) + y(t - \frac{3\pi}{2}) - A \sin(t),$$

مع الدالة الابتدائية: $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, 0]$ ، $y(\theta) = e^{p\theta} + \sin(\theta)$ ، حيث: $A = p - e^{-3\pi p/2}$

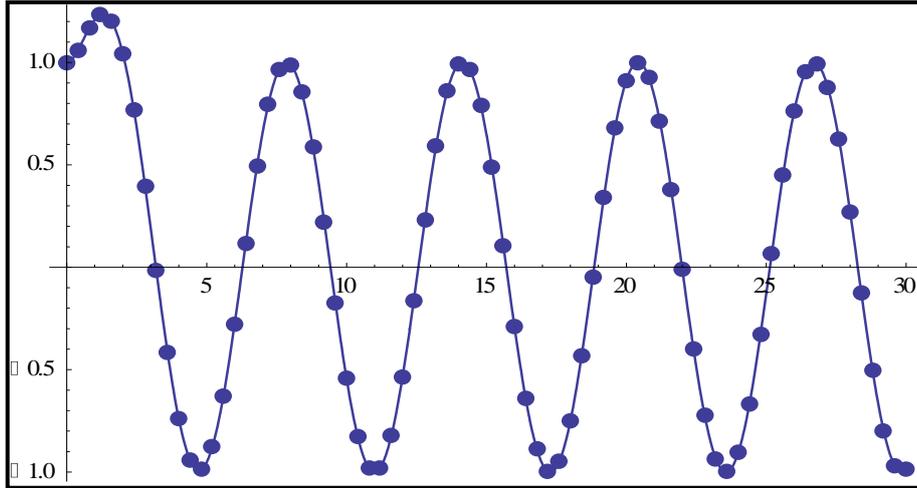
ويعطى الحل التحليلي: $y(t) = e^{pt} + \sin(t)$

إن زيادة قيم P السالبة يجعل الجزء الأسى في الحل ينتهي إلى الصفر بسرعة وينتج عن ذلك تدبذبات وتأثيرات قاسية ومفاجئة على الحل. نطبق الطريقة الشرائحية بخطوة $h = \pi/40$ ونحسب الخطأ المطلق في الحل الشرائحي ونقارن نتائجنا مع نتائج الطريقتين الشرائحيين [4,10] بأخذ قيم مختلفة لـ p: (-0.1, -1.0, -2.0) النتائج مدرجة في

الجدول(3). نرسم في الشكل(2) الحل الشرائحي والحل الدقيق بخطوة $h = \pi/40$ في المجال $[0,30]$ ، لأجل الوسيط $p=-1.0$. وبمقارنة النتائج تتضح دقة وفعالية التقنية الشرائحية المقترحة.

الجدول(3): مقارنة الأخطاء المطلقة في المثال(1) للطريقة المقترحة مع طرائق أخرى بـ $h = \pi/40$.

P	t	الطريقة الشرائحية[4]	الطريقة الشرائحية[10]	الطريقة الشرائحية المقترحة
-0.1	$3\pi/4$	6.0E-12	2.7E-13	2.3639 E-17
	$3\pi/2$	9.3E-12	2.3E-13	5.5511 E-17
	$9\pi/4$	1.8E-11	2.1E-13	4.3786 E-17
	3π	2.9E-11	7.2E-14	1.6764 E-17
	$15\pi/4$	4.4E-11	2.4E-13	8.1102 E-17
	9π	-----	-----	5.0816 E-17
P	t	الطريقة الشرائحية[4]	الطريقة الشرائحية[10]	الطريقة الشرائحية المقترحة
-1.0	$3\pi/4$	9.8E-15	4.6E-16	1.11022E-17
	$3\pi/2$	2.2E-14	5.0E-16	2.5641 E-17
	$9\pi/4$	3.6E-14	3.1E-16	4.8767 E-17
	3π	7.1E-14	6.0E-17	5. 5451 E-17
	$15\pi/4$	1.5E-13	4.0E-16	9.6751 E-16
	9π	-----	-----	2.6455 E-18
P	t	الطريقة الشرائحية[4]	الطريقة الشرائحية[10]	الطريقة الشرائحية المقترحة
-2.0	$3\pi/4$	1.5E-15	7.5E-16	3.8782 E-17
	$3\pi/2$	3.3E-15	7.9E-16	8.8757 E-17
	$9\pi/4$	5.2E-15	8.4E-16	6.2577 E-17
	3π	7.5E-15	8.9E-16	5.8768 E-17
	$15\pi/4$	9.7E-15	9.4E-16	1.4371 E-17
	9π	-----	-----	9.9679 E-17



الشكل (2): الحل الشرائحي التقريبي ●●● والحل الدقيق — للمثال (1) بخطوة $h = \pi/40$, $p = -1.0$.

مثال (2): اختبارنا الثاني في المسألة غير الخطية [11]:

$$\begin{cases} y'(t) + \sqrt{y(t)} + y(y(t)) + y(y^2(t)) = \cos t + \sqrt{\sin t} + \sin(\sin t) + \sin(\sin^2 t), & t \geq 0; \\ \phi(t) = \sin t, & t \leq 0 \end{cases}$$

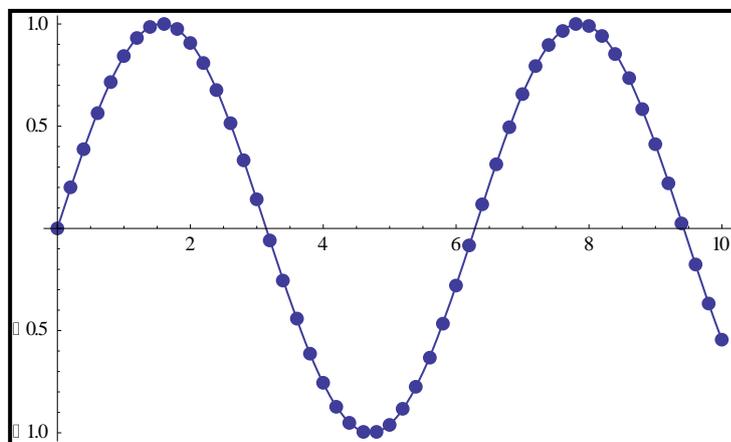
مع الحل التحليلي:

$$y(t) = \sin t$$

نطبق الطريقة الشرائحية بخطوة $h=0.1$ ونحسب الحل الشرائحي والحل الدقيق ونقارن نتائجنا مع نتائج طريقة موجبات ليجندر [11] كما هي مدرجة في الجدول (4). نرسم في الشكل (3) الحل الشرائحي والحل الدقيق بخطوة $h=0.2$ في المجال $[0,10]$. وبمقارنة النتائج نجد أن نتائج التقنية المقترحة أفضل بكثير. الجدول (4): مقارنة الطريقة المقترحة مع طريقة موجبات ليجندر [11].

t	Legendre Wavelet Method [11]		الطريقة الشرائحية المقترحة خطوة $h=0.2$
	الحل الدقيق	الحل التقريبي	الحل الشرائحي
0.1	0.09983341664682815	0.09983342	0.09983341664682763
0.2	0.19866933079506122	0.19866933	0.19866933079495167
0.3	0.2955202066613396	0.29552020	0.2955202066613396
0.4	0.3894183423086505	0.38941834	0.38941834230843997
0.5	0.479425538604203	0.47942553	0.47942553860382225
0.6	0.5646424733950355	0.56464247	0.5646424733950354
0.7	0.6442176872376911	0.64421768	0.6442176872376894
0.8	0.7173560908995228	0.71735609	0.7173560908995202
0.9	0.7833269096274834	0.78332691	0.783326909627327
1.0	0.8414709848078965	0.84147098	0.8414709848078965

5.0	-0.9589242746631385	-----	-0.9589242746631382
10.	-0.5440211108893698	-----	-0.5440211108893695



الشكل(3): الحل الشرائحي التقريبي●●●والحل الدقيق — للمثال (2) بخطوة $h=0.2$.

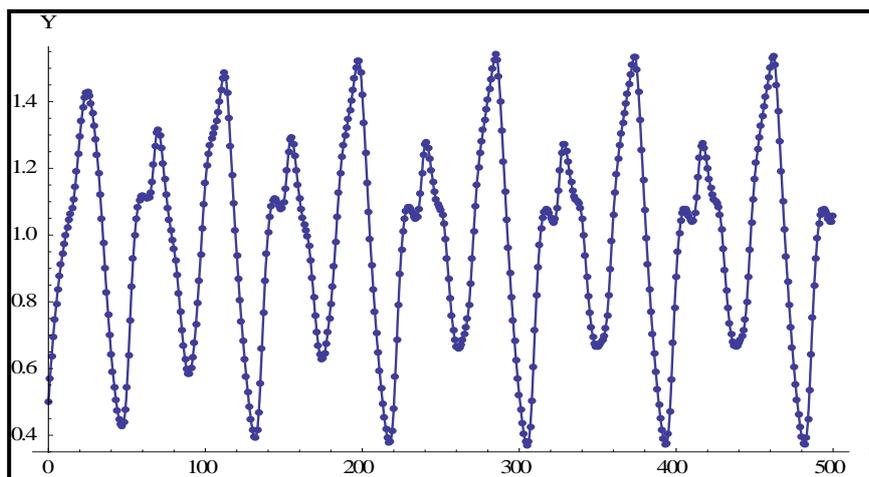
مثال 3: لنأخذ نموذج Mackey-Glass الذي يهدف لإنتاج خلايا الدم البيضاء [5]:

$$y'(t) = \frac{1}{4} \frac{y(t-\tau)}{1+y(t-\tau)^{10}} - \frac{1}{4} y(t), \quad t \in [0, 500]$$

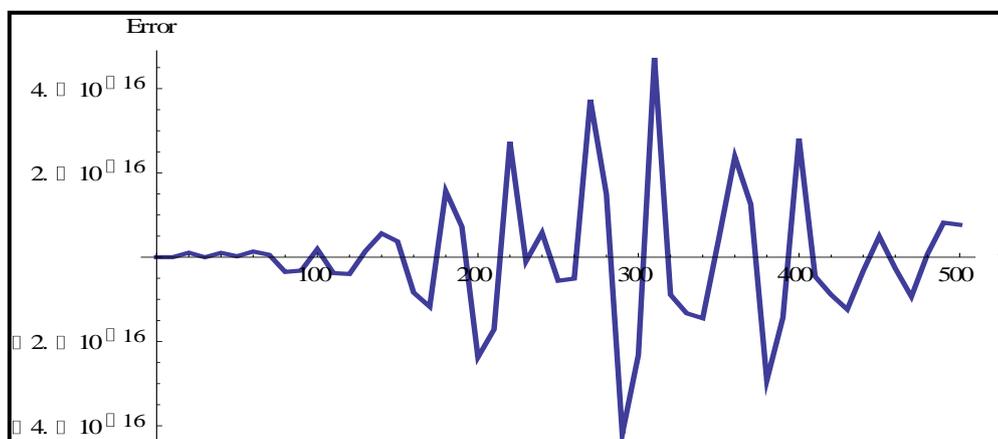
مع دالة التأخير :

$$\phi(t) = \frac{1}{2}, \quad t \leq 0$$

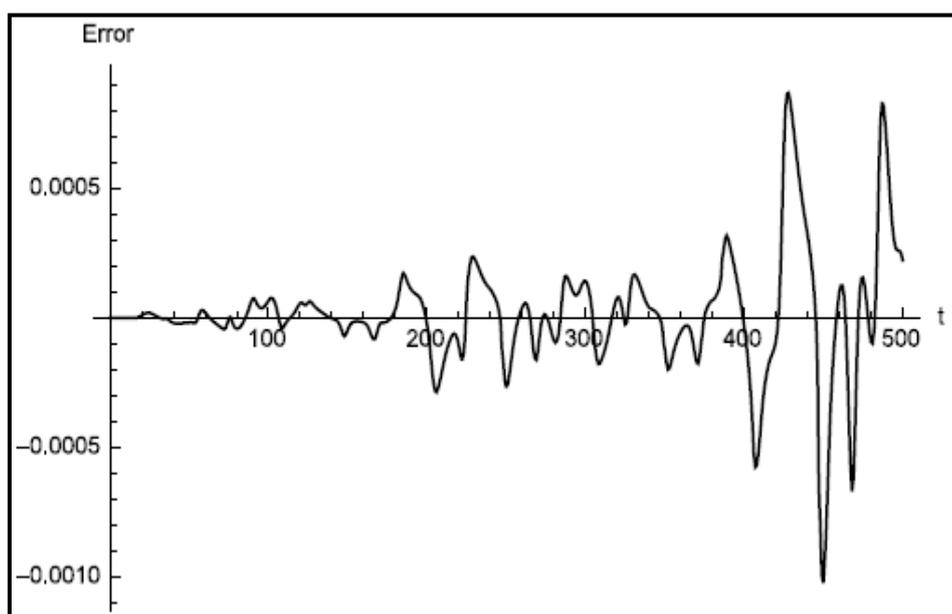
قدم Mackey-Glass هذا النموذج عام 1977 ويعد من أشهر النماذج الرياضية لإنتاج خلايا الدم البيضاء. نطبق الطريقة الشرائحية بخطوة $h=0.2$ وندرج في الجدول (5) الحل الشرائحي والخطأ المطلق. ونرسم في الشكل (4) الحل الشرائحي والحل الدقيق بخطوة $h=0.2$ وثابت التأخير $\tau = 15$. ونرسم أيضاً في الشكل (5) الخطأ في الحل الشرائحي وفي الشكل (6) نرسم الخطأ في الحل بطريقة Modified Trapezoidal Rule في [14] وبالمقارنة نجد الفارق الكبير في الدقة العددية وأفضلية طريقتنا .



الشكل (4): الحل الشرائحي التقريبي ●●● والحل الدقيق — للمثال (3) بخطوة $h=0.2$ وتأخير $\tau = 15$.



الشكل (5): الخطأ في الحل الشرائحي للمثال (3).



الشكل (6): الخطأ في الحل بطريقة Modified Trapezoidal Rule للمثال (3) في [14].

الجدول(5): الحل الشرائحي والخطأ المطلق للطريقة مطبقة على المثال 3.

t	الحل الشرائحي	الخطأ المطلق في الحل الشرائحي
20	1.29483620416047750040	1.0689956370 E -17
40	0.64218392547901106413	1.0334003680 E -17
100	1.15733802716144605001	1.9118548157 E -17
160	1.11024994925732718746	8.3830710458 E -17
180	0.79447530456234506997	1.56753529746 E -16
200	1.42092339183236054853	2.3740176323 E -16
240	1.27387435942753705233	5.8082175923 E -17
300	0.52097107498502597798	2.3203585776 E -16
360	1.05972207795343899450	2.3854081617 E -16
400	0.87582297783172198388	2.8150070765 E -16
460	1.50280451378229789890	2.674554581 E -17
500	1.05801927805221504397	7.707849824 E -17

مثال(4): نأخذ المسألة التفاضلية المتأخرة القاسية [9]Stiffness:

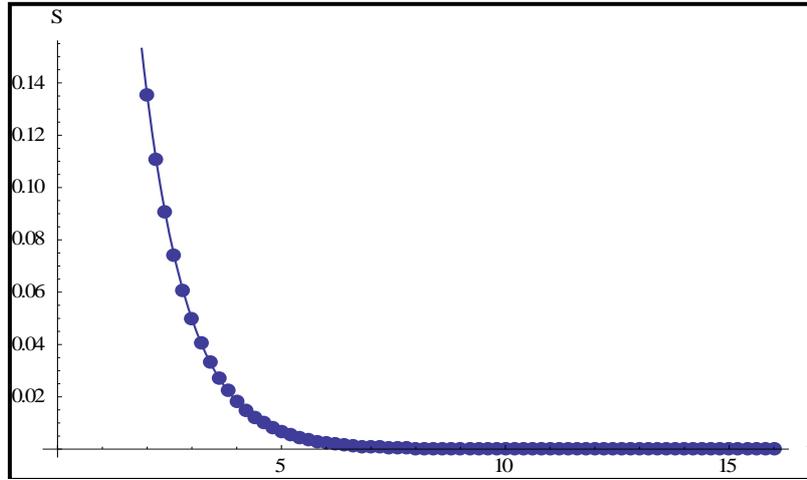
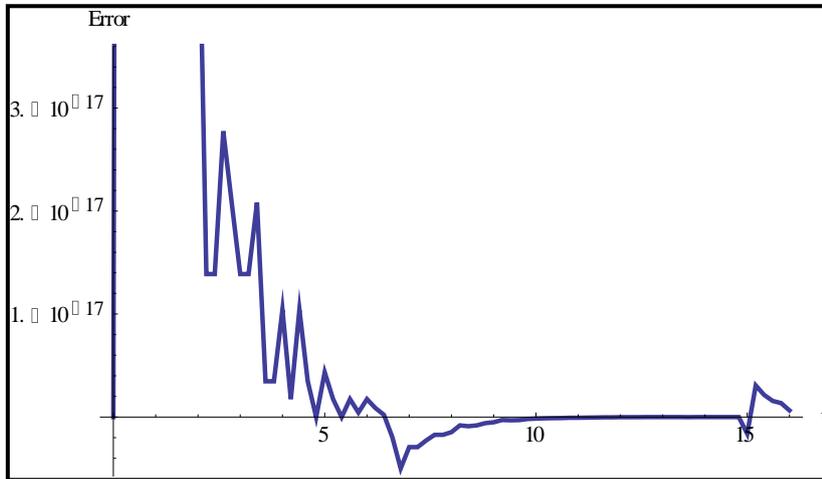
$$y'(t) = -1000y(t) - y(t - \tau), \quad t > 0,$$

$$t \leq 0 \quad \phi(t) = \exp(-t) \quad \text{بدالة التأخير الابتدائية} :$$

مع وسيط تأخير $\tau = \ln(1000 - 1)$ ، نطبق الطريقة الشرائحية بخطوة $h=0.2$ وندرج في الجدول(6)نتائج مقارنات الحل الشرائحي للطريقة المقترحة مع الطريقة الشرائحية التجميعية في [9]. ونرسم في الشكل(7)الحل الشرائحي مع الحل الدقيق، ونرسم في الشكل (8) الخطأ في الحل الشرائحية للطريقة المقترحة بخطوة $h=0.2$ ومقارنة النتائج تتضح دقة الطريقة المقترحة، حيث لا يظهر فارق يذكر بين الحل الشرائحي والحل الدقيق وهذا يؤكد الاستقرار والتقارب للطريقة وتطابق الدراسة النظرية مع التطبيقية.

الجدول(6): مقارنة الطريقة المقترحة مع طريقة موجات ليجندر في المرجع [9].

t	Spline Collocation Method [9]; h=0.05	الطريقة الشرائحية المقترحة خطوة h=0.2	
	الأخطاء المطلقة	الحل الشرائحي	الأخطاء المطلقة
2	8.326672684688674 E-15	0.1353352832366127457	5.3882191721 E-17
4	8.187894806610530 E-16	0.0183156388887341875	7.29085124777 E-18
6	1.413799632921098 E-16	0.0024787521766663594	9.86834329026E-19
8	1.675092356490104 E-17	0.0003354626279025104	1.34365167193E-18
10	4.241940999849536 E-18	0.000045399929762484	1.7484116260E-19
16	-----	1.125351747199E-07	6.47607219671E-19

الشكل (7): الحل الشرائحي ●●● والحل الدقيق — للمثال (4) بخطوة $h=0.2$.الشكل (8): الخطأ في الحل بالطريقة الشرائحية للمثال (4) بخطوة $h=0.2$.

الخاتمة :

تم تطوير تقنية شرائحية بخمس نقاط تجميع تعتمد على التقريب بكثيرات حدود هرميت في الفضاء C^4 . و تم إثبات أن الطريقة مستقرة من النوع- p وتحدد منطقة الاستقرار مساحات لانهائية من المستوي العقدي، كما تم تعيين الحد الأعلى للخطأ و تحديد التقارب بالرتبة التاسعة.

ولتأكيد النتائج النظرية تم جراء اختبارات عددية للطريقة بحل أربع اختبار محلولة في مراجع مختلفة، أشارت المقارنات والنتائج المدرجة في الجداول (3)-(6) إلى أن طريقتنا تفوقت على: طريقة C^2 -spline collocation في [4] طريقة C^1 -spline collocation في [9] طريقة C^3 -spline collocation في [10]، طريقة موجبات ليجندر في [11] و طريقة قاعدة شبه المنحرف المعدلة [14]. وكذلك وتبين الأشكال (2)-(8) أن التقنية الشرائحية قدمت حل شرائحي يتطابق إلى حد كبير مع الحل الدقيق وهذا ما يؤكد الاستقرار والتقارب.

الاستنتاجات والتوصيات:

نظراً للفعالية والدقة العالية التي قدمتها التقنية الشرائحية فإيجاد الحل العددي لمسألة المعادلات التفاضلية المتأخرة الخطية وغير الخطية، نوصي بتطوير التقنية الشرائحية لإيجاد الحل العددي لمسألة المعادلات التفاضلية المتأخرة الديناميكية من النوع المحايد، وكذلك لإيجاد الحل العددي لمسألة المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة.

المراجع:

1. HONG-JIONG, T. and JIAO-XUN, K., The Numerical Stability of Linear Multistep Methods for Delay Differential Equations with Many Delays, Siam, J. Numer. Anal., Vol. 33, 1996. pp. 883-889.
2. HU, GUANG-DA, Stability of Runge-Kutta Methods for Delay Differential Systems with Multiple Delays, IMA J. Numer. Anal., Vol. 19, 1999. pp. 349-359.
3. TORELLI, L., Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations, J. Comput. Appl. Math. Vol. 25, 1989. pp. 15-26.
4. MAHMOUD S. M., A Class of Three-Point Spline Collocation Methods for Solving Delay-Differential Equations, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 84, No. 10, 2007, 1495–1508.
5. MACKEY M.C. and L. GLASS. Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems. Science, 197(4300):287–289, 1977.
6. ZIVARIPIRAN H., Efficient Simulation, Accurate Sensitivity Analysis and Reliable Parameter Estimation for Delay Differential Equations, PhD thesis, Department of Computer Science, University of Toronto, Toronto, Canada, **2009**.
7. ISMAIL F., R. A. AL-KHASAWNEH and M. SULEIMAN, Comparison of Interpolations Used In Solving Delay Differential Equations By Runge–Kutta Method, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 80, No. 7, **2003**, pp. 921–930.
8. RAMADAN M. A., A. E. SHERBEINY and M. N. SHERIF, Numerical solution of system of first-order delay differential equations using polynomial spline functions, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 83, No. 12, **2006**, 925–937.
9. El-Hawary H.M. and K.A. El-SHAMI, Sextic C^1 -spline collocation methods for solving delay differential equations, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 89, No. 5, March **2012**, 679–690.
10. El-HAWARY H.M., S.M. MAHMOUD (**2003**), Spline Collocation Methods for Solving Delay-Differential Equations, Applied Mathematics And Computation, 146/2-No.3, pp.359-372.
11. HAFSHEJANI M. S., S. K. VANANI and J. S. HAFSHEJANI, Numerical Solution of Delay Differential Equations Using Legendre Wavelet Method, World Applied Sciences Journal 13, 27-33, **2011**.
12. OGUNLARAN O. M., A. S. Olagunju, Solution of Delay Differential Equations Using a Modified Power Series Method, Applied Mathematics, **2015**, 6, 670-674.
13. GHORBANI A., Approximate solution of delay differential equations via variational iteration method, Nonlinear Sci. Lett. A, Vol.8, No.2, pp.236-239, June **2017**.
14. SUKALE Y. · V. Daftardar-Gejji, New Numerical Methods for Solving Differential Equations, Int. J. Appl. Comput. Math, Springer India Pvt. Ltd. **2016**.
15. BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, Numerical Analysis, BROOKS/COLE ,Japan, UK, United States, (**2011**), 863 page.