مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (5) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (5) 2017

دراسة الإيزومورفيزم بين شبكات الزمر والزمر الضبابية

جميل محمد*

(تاريخ الإيداع 9 / 7 / 2017. قُبِل للنشر في 3 / 10 /2017)

□ ملخّص □

تهدف هذه الدراسة إلى الإجابة عن السؤال الآتي : بفرض أن G', G زمرتان (ضبابيتان) و أن $L(G)$ و $L(G')$ الشبكتان المبينتان عليهما على الترتيب فإذا كان $L(G) \cong L(G')$ فهل تكون $G \cong G'$؟ .

لقد بينا أن هذا الاقتضاء ليس صحيحاً في الحالة العامة و لكن بوضع بعض الشروط المحددة على هذه الزمر يكون الاقتضاء صحيحاً و قد أعطينا هذه الشروط و استطعنا البرهان على بعض المبرهنات الهامة.

الكلمات المفتاحية: الإيزومورفيزم ، شبكات الزمر ، الزمر الضبابية، الأوتومورفيزم.

* مشرف على الأعمال–قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (5) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (5) 2017

Study of Isomorphism Between Lattice Groups And Fuzzy Groups

Jameel Mohammad*

(Received 9 / 7 / 2017. Accepted 3 / 10 /2017)

□ ABSTRACT □

The objective of this studying is the important answer on the following open question in [5]: Let G and G' be two fuzzy groups and L(G), L(G') be lattices for them, respectively, if $L(G) \cong L(G')$ is satisfied then do $G \cong G'$ is satisfied ?.

We have shown that this statement don't true in the case general, and we suppose some certain conditions on the purposed groups to be the statement holds. Moreover, some important theorems are proved.

Key Words : Isomorphism, Lattice Groups , Fuzzy Groups, Automorphism.

* **Academic Assistant, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

قبل البدء بالإجابة على التساؤل المطروح نقدم بعض المفاهيم و التعاريف والمبرهنات الأساسية؟

تعريف(1−1) :[4]: لتكن G زمرة، و ليكن $f: G \to G$ تشاكلاً زمرياً متبايناً و غامراً عندئذٍ يقال إن f أوتومورفيزم أو تماثل (**Automorphism**) فوق G.

يرْمزْ بالرمز $Aut(G)$ لمجموعة جميع الأوتومورفيزمات فوق G.

مبرهنة(1−1) :[4]: لتكن G زمرة، عندئذٍ إن $Aut(G)$ تشكل زمرة بالنسبة لتركيب التطبيقات.

تعريف(2−1) : [5]: ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاًعندئذٍ نعرف المجموعة V بالشكل:

$$V_m = \{m \in N^*, m < n, \gcd(m,n) = 1\}$$

مبرهنة(2−1) : [5]: إن المجموعة V_m تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n.

من الواضح أن $ord(V_m)$ يساوي عدد الأعداد الطبيعية الأصغر من n و الأولية مع n ومنه فإن $ord(V_m) = \varphi(n)$ ، حيث φ دالة أولر .

مبرهنة(3−1) :[6]: ليكن p عدداً أولياً عندئذٍ فإن $\varphi(p) = p - 1$ و بالتالي يكون $ord(\ \ _m) = p - 1$.

مبرهنة (4−1) :[8]: (i): $\forall n \in \mathbb{Z}^+; Aut(\mathbb{Z}_n) \cong V_n$.

(ii) : الزمرة V_n دورانية إذا وفقط إذا كان $n = 2,4,\ p^k, 2p^k$ حيث p عدد أولي فردي و $\in \mathbb{Z}^+$.

(iii): إذا كانت $m = n_1.n_2.\dots..n_k$ بحيث $gcd(n_i, n_j) = 1$ مهما تكن $i \neq j$ فإن
$V_m = V_{n_1} \times V_{n_2} \times \dots . \times V_{n_k}$

(Iv): لتكن G زمرة منتهية بحيث أن جميع زمر سيلوف الجزئية من G ناظمية، عندئذٍ تكون G هي الجداء المباشر لزمر سيلوف الجزئية من G.

مبرهنة (5−1):[5] لتكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث أن $\mathrm{ord}(G) = n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots . p_r^{\alpha_r}$ فإن G هي جداء مباشر لزمرها السيلوفية أي أن $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots .. \times G(p_r)$ حيث $(G(p_i); 1) = p_i^{\alpha_i}$ و $i = 1,2, \dots . r$.

مبرهنة (6−1):[7] بفرض G زمرة منتهية و p عدداً أولياً قاسماً لمرتبتها عندئذٍ كل $p-$ زمرة من تكون محتواة في $p-$ زمرة سيلوف من G .

مبرهنة (7−1) :[5]:(i)− لتكن G زمرة منتهية و p عدداً أولياً قاسماً لمرتبتها و لتكن A عبارة عن $p-$ زمرة جزئية لسيلوف من G، عندئذٍ القضايا الآتية متكافئة:

(i)−الزمرة A ناظمية.

(ii)−لا يوجد في G سوى $p-$ زمرة جزئية لسيلوف واحدة فقط هي A.

(iii) −إذا كانت مرتبة الزمرة G تقبل القسمة على العدد الأولي p،عندئذٍ G تحوي عنصراً مرتبته p .

(iv)−إذا كانت مرتبة الزمرة G تقبل القسمة على العدد ^{k} ، حيث p عدد أولي، عندئذٍ G تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها p^k.

(v)−إذا كانت مرتبة الزمرة G منتهية فان G زمرة دورانية.

(vi)– اذا كانت G عبارة عن p–زمرة منتهية بحيث أن $ord(G) = p^2$ فان G زمرة تبديلية.

تعريف (1−3):[8] لتكن G زمرة و لتكن A و B زمرتين جزئيتين منها، يقال عن G إنها جداء نصف مباشر داخلي للزمرة B على A و نكتب ذلك بالشكل $G = A \times B$ إذا كان $A \cap B = \{e\}$ و $G = A.B$ و $B \lhd G$ حيث $e = e_G$.

مبرهنة (1−8):[7] كل زمرة مرتبتها $p.q$، حيث p, q عددان أوليان تكون إما دورانية أو جداء شبه مباشر داخلي لزمرة دورانية من المرتبة p بزمرة دورانية من المرتبة q من الشكل $\langle a\rangle_p \times \langle b\rangle_q$ حيث $a^{-1}ba = b^r$ و $r - 1$ لا يقبل القسمة على q: $r^p \equiv 1(mod\ q)$ و p تقسم $q - 1$.

مبرهنة (1−9) : [2]:لتكن G زمرة دورانية مرتبتها $n = p_1^{c_1}.p_2^{c_2}\ldots.p_r^{c_r}$ و لتكن G' زمرة ما، عندئذٍ فإن $L(G) \cong L(G')$ إذا وفقط إذا كانت G' زمرة دورانية مرتبتها $m = q_1^{c_1}.q_2^{c_2}\ldots.q_r^{c_r}$.

مبرهنة (1−10):[2]:كل زمرة منتهية و تبديلية و p – زمرة حيث p عدد أولي تتحدد من خلال تماثل شبكي مع زمرة من صف الزمر التبديلية من نوع p – زمرة .

تعريف(1−4):[3]:

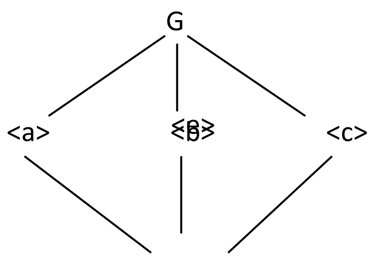
لتكن G زمرة و لتكن $S(G)$ مجموعة جميع الزمر الجزئية من G عندئذٍ فإن $(S(G), \leq)$ تشكل شبكة حيث $(\leq)$ هي علاقة ترتيب جزئي معرفة بعلاقة الاحتواء ، بمعنى أن

$S(G) = \{A_1, A_2 \in S(G), A_1 \subseteq A_2\}$ تدعى $S(G)$ شبكة الزمر الجزئية من G و يرمز لها بالرمز $L(G)$.

مثال(1−1): لنأخذ الزمرة $G = \{e, a, b, c\}$ و لنعرف عليها العملية الداخلية * بالجدول الآتي:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

إن G زمرة تبديلية و ليست دورية و زمرتها الجزئية هي $\langle e\rangle, \langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle$ و مخطط الشبكة لها هو:



مبرهنة (1−15)[3]:لتكن G زمرة عندئذٍ تكون G منتهية إذا و فقط إذا كانت $L(G)$ منتهية.

أهمية البحث وأهدافه:

إن الهدف من هذه الدراسة هي الإجابة عن السؤال الآتي: إذا كانت G', G زمرتين ضبابيتين و كانت $L(G)$ و $L(G')$ الشبكتين المبنيتين عليهما على الترتيب و كان $L(G) \cong L(G')$ فهل تكون $G \cong G'$.

وجل اهتمامنا وما نتمناه أن نكون موفقين في تقديم بعض العون للباحثين في هذا المجال وخدمة لهذا الوطن الحبيب.

طرائق البحث ومواده :

تعتمد طرائق البحث على بعض المفاهيم و التعاريف والمبرهنات الأساسية في الجبر ونظرية الزمر والشبكات، وكذلك تم الاطلاع على بعض المراجع العلمية المتنوعة [1-9] التي تتطرق إلى نظرية الزمر والشبكات ونظرية المجموعات وذلك بغية الاستفادة و إغناء هذه الدراسة واكتساب الخبرة من المناقشات البراهين والتقاط المزايا الايجابية وتجنب الثغرات والمزايا السلبية.

النتائج والمناقشة:

من المعلوم أن كون $L(G) \cong L(G')$ حيث G', G زمرتان لا يؤدي إلى كون أن $G \cong G'$ في الحالة العامة وقد دعمنا رؤيتنا بإعطاء المثال الآتي:

مثال (2-1): لتكن G', G زمرتين تبديليتين و ليكن $\mathrm{Aut}(G) \cong Aut(G')$ و $L(G) \cong L(G')$ ولنبين فيما إذا كان $G \cong G'$.

لنأخذ $G = \mathbb{Z}_{35}$ و $G' = \mathbb{Z}_{39}$ استناداً للمبرهنة (1-4) نجد أن:

$Aut(G) \cong V_{35} = V_{5.7} \cong V_5 \times V_7$ و $Aut(G') \cong V_{39} = V_{3.13} \cong V_3 \times V_{13}$

و استناداً للمبرهنة (1-4) و المبرهنة (1-3) نجد أن:

$V_3 \cong \mathbb{Z}_2$ و $V_{13} \cong \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ و $V_7 \cong \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ و $V_5 \cong \mathbb{Z}_4$

و بالتالي فإن:

$\mathrm{Aut}(G') \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ و $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ومنه ينتج لدينا أن

$$Aut(G) \cong Z_4 \times Z_2 \times Z_3 \cong Aut(G')$$

و هذا يعني أن $L(G) \cong L(G')$ بحسب المبرهنة (1-9) ولكن $G = \mathbb{Z}_{35} \ncong G' = \mathbb{Z}_{39}$.

تعريف (2-1): لتكن G', G زمرتين اختياريتين و ليكن $\varphi: L(G) \to L(G')$ تماثلاً شبكياً، نقول عن التماثل φ إنه A – تماثل شبكي إذا حقق $Aut(M) \cong Aut(\varphi(M));\ \forall M \lhd G$.

تمهيدية (2-1): لتكن G', G زمرتين اختياريتين و ليكن A $\varphi: L(G) \to L(G')$ – تماثلاً شبكياً عندئذٍ مهما تكن الزمرة الجزئية B من G فإن $\varphi_{|B}: L(B) \to L(\varphi(B))$ يكون A – تماثلاً شبكياً.

البرهان: من الواضح أن $\varphi_{|B}: L(B) \to L(\varphi(B));\ \forall B \lhd G$ هو تماثل شبكي، لنبين أن A – تماثل شبكي

$$\forall A_1 \lhd B \Rightarrow A_1 \lhd G \Rightarrow Aut(A_1) \cong Aut(\varphi(A_1))$$

لكن $_{|B}(A_1) = \varphi(A_1)$ ومنه $Aut(A_1) \cong Aut(\varphi(A_1))$ و هذا يبرهن أن $\varphi_{|B}$ هو A – تماثل شبكي.

لنرمز لجميع A–التماثلات شبكية بالرمز $R_M: Aut(M) \tilde{\to} Aut(\varphi(M))$
و هنا يمكننا أن نضع التعريف الآتي:

تعريف (2−2): لتكن G, B زمرتين بحيث أن $\varphi: L(G) \to L(B)$ هو A–تماثل شبكي، نقول عن φ إنه H–تماثل شبكي إذا تحقق الشرط الآتي و ذلك من أجل كل f من $Aut(G)$:

$$\forall x \in G;\ f_{|\langle x\rangle} : \langle x\rangle \to \langle x\rangle \quad \Leftrightarrow \quad g_{|\varphi(\langle x\rangle)} : \varphi(\langle x\rangle) \to \varphi(\langle x\rangle)$$

حيث: $R_{\langle x\rangle}(f_{|\langle x\rangle}) = g_{|\varphi(\langle x\rangle)}$ و $g = R_G(f)$

تعريف (2−3): لتكن G, B زمرتين اختياريتين و ليكن $\varphi: L(G) \to L(B)$ تماثلاً شبكياً و $K \lhd G$، نقول عن φ إنه H–تماثل شبكي فوق K إذا كان $\varphi_{|K}: L(K) \to L(\varphi(K))$ يشكل H–تماثل شبكي.

مبرهنة (2−1): بفرض G, K زمرتين اختياريتين بحيث $ord(G) = p_1.p_2 \dots .p_r$ و $ord(K) = q_1.q_2 \dots .q_r$ و ليكن $\varphi: L(G) \to L(K)$ هو A–تماثل شبكي، عندئذٍ φ يكون H–تماثل شبكي فوق كل زمرة جزئية لسيلوف من G.

البرهان: من المعلوم أن كل زمرة جزئية لسيلوف من G هي زمرة مرتبتها عدد أولي و بالتالي هي زمرة دوراتية، لهذا نفرض أن M زمرة سيلوف من G و لنبرهن أن $\varphi_{|M}: L(M) \to L(\varphi(M))$ هو H–تماثل شبكي. حسب التمهيدية(2−1) يكون $\varphi_{|M}$ عبارة عن A–تماثل شبكي كما أنه لدينا $\forall x \in M; x \neq e: M = \langle x\rangle$ ، ومنه من أجل كل f من $Aut(M)$ لدينا

$$\forall x \in M;\ f_{|\langle x\rangle} = f : \langle x\rangle \rightarrowtail \langle x\rangle \ \Leftrightarrow \ g_{|\varphi(\langle x\rangle)} = g : \varphi(\langle x\rangle) \to \varphi(\langle x\rangle)$$

حيث $g = R_M(\ \ )$ و $R_{\langle x\rangle}(f_{|\langle x\rangle}) = g_{|\varphi(\langle x\rangle)}$ و هذا يثبت أن $\varphi_{|M}$ عبارة عن H–تماثل شبكي فوق M .

مبرهنة (2−2):

لتكن G, G' زمرتين اختياريتين و ليكن $\varphi: L(G) \to L(G')$ هو A–تماثلاً شبكياً و لتكن G هي P− زمرة منتهية عندئذٍ تكون G' عبارة عن P− زمرة منتهية و $ord(G) = ord(G')$.

البرهان: إن G' زمرة منتهية، ولنفرض جدلاً أن G' ليست P− زمرة ، بالتالي هناك قاسم أولي لمرتبتها مثل r حيث $r \neq p$ و منه استناداً للمبرهنة (1−6) يوجد $y \in H$ بحيث يكون $O(y) = r$، من جهة ثانية توجد M بحيث أن $M \lhd G$ و $\varphi(M) = \langle y\rangle$ و منه استناداً للمبرهنة (1−9) و من كون G هي P− زمرة يوجد $x \in G$ بحيث يكون $M = \langle x\rangle_p$ و منه فإن $\varphi(\langle x\rangle_p) = \langle y\rangle$ و بما أن φ هو A–تماثل شبكي فإن $Aut(\langle x\rangle_p) \cong Aut(\langle y\rangle_r)$ أي أن $p - 1 = r - 1$ ومنه $p = r$ و هذا يناقض كون $r \neq p$ إذن G' هي P− زمرة.

الآن، ليكن $ord(G') = p^m$ و $ord(G) = p^n$ و لنفرض أن $n \geq m$ و لنبرهن بالاستقراء على n. إن $n = m$ من أجل $n = 1$ و كون $n \geq m$ يكون $n = m$.

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $k < n$ و لنبرهن على صحتها من أجل .

لنفرض مؤقتاً أن $m < n$ ومنه $^n \ \ \lneqq \ \ p$ كما أن $p^m | p^n$ أي أن $p^m | ord(G)$ و بالتالي بحسب المبرهنة (1−7) يوجد $T \lhd G$ بحيث يكون $ord(T) = p^m$ و بما أن $p^m \lneqq p^n$ فإن $T \lneqq G$. وليكن $\varphi(T) = B \lhd$

H فيصبح لدينا $\varphi_{|T}: L(T) \rightrightarrows L(B)$ و حيث $\varphi_{|T}$ هو A–تماثل شبكي فاستناداً إلى التمهيدية (1−2) و أن $ord(T) = p^m$ حيث $m < n$ فإنه بحسب الفرض الاستقرائي نجد أن:

$ord(T) = ord(B) = p^m$ و عليه يكون $ord(B) = ord(H)$ حيث $B \lhd H$ و بالتالي $H = B$

أي أن $\varphi(T) = B = H = \varphi(G)$ ومنه G=T وهذا يناقض الفرض $H \lneqq G$ إذن $m = n$. وعندما $n \leq m$ يتم برهانه بالطريقة بنفسها، و منه نتوصل إلى أن $ord(G) = ord(H)$.

<u>مبرهنة (3−2):</u> لتكن G زمرة تبديلية منتهية و $p-$ زمرة حيث p عدد أولي فردي و ليكن $\varphi: L(G) \to L(G')$ هو H–تماثل شبكي عندئذٍ فإن $G \cong G'$.

<u>البرهان:</u> بحسب المبرهنة(2−2) يكون $ord(G) = ord(G')$ بالتالي G' عبارة عن $P-$ زمرة وهو المطلوب.

<u>مبرهنة(4−2):</u> بفرض G', G زمرتين بحيث $\varphi: L(G) \to L(G')$ هو H–تماثل شبكي عندئذٍ إذا كانت G هي $P-$ زمرة منتهية تبديلية حيث p عدد أولي فردي فإن G' هي $P-$ زمرة منتهية تبديلية.

<u>البرهان:</u> من الواضح أن G' زمرة منتهية وإن φ هو H–تماثل شبكي و حسب المبرهنة (2−2) يكون $ord(G) = ord(G')$ و بالتالي G' تكون $P-$ زمرة، و لنبرهن أنها تبديلية.

بما أن G هي $P-$ زمرة تبديلية فإن التطبيق $f: G \to G; x \mapsto x^{-1}$ تماثل زمر من المرتبة 2. كما أنه من أجل $x \in G$ يكون $f_{|\langle x\rangle}: \langle x\rangle \to \langle x\rangle$ تماثل زمر من المرتبة 2. و بما أن φ هو H–تماثل شبكي و بفرض أن $g = R_G(f)$ يكون $g_{|\varphi(\langle x\rangle)}: \varphi(\langle x\rangle) \to \varphi(\langle x\rangle)$ تماثلاً زمرياً مرتبته 2.

ومن ناحية ثانية إن φ تماثل شبكي و بالتالي من أجل كل $y \in G'$ يوجد $x \in G$ بحيث أن $\langle y\rangle = \varphi(\langle x\rangle)$

و منه نجد من أجل كل $y \in G'$ يكون $g_{|\langle y\rangle}: \langle y\rangle \to \langle y\rangle; \quad y \to y^i$ تماثلاً زمرياً مرتبته 2.

لنحدد قيمة i، بفرض $o(y) = p^r$ بما أن G' عبارة عن $P-$ زمرة و كون $g_{|\langle y\rangle}$ مرتبته 2 فعليه يكون $y^{i^2} = y \to p^r | i^2 - 1 \Longrightarrow (i-1)(i+1) = a.p^r$ و بالتالي العدد p يقسم الجداء $(i-1)(i+1)$ أو يقسم كلاهما، لنبرهن أنه لا يمكن أن يقسم كلاهما

$(i-1) = n.p$ و $(i+1) = m.p; m \gneqq n$ و منه $i = 1 + n.p = m.p - 1$ و بالتالي

$(m-n)p = 2; m \gneqq n$ إذن $p|2$ و هذا يناقض الفرض بأن p عدد أولي فردي، و بالتالي العدد p يقسم $(i+1)$ أو $(i-1)$ و من المساواة $(i-1)(i+1) = a.p^r$ نجد أن p^r يقسم إما $(i+1)$ أو $(i-1)$ نستنتج أنه إذا كانت مرتبة $g_{|\langle y\rangle}$ مساوية للواحد و ليست 2 فإن ذلك يكافئ:

$$p^r \mid (i+1) \to y^{i+1} = e \to y^i = y$$

و هذا يناقض الفرض إذن لا بد أن يكون:

$$p^r \mid (i+1) \to y^{i+1} = e \to y^i = y^{-1} \Rightarrow g\,|_{\langle y\rangle}: \langle y\rangle \to \langle y\rangle : y \to y^{-1}$$

و ذلك من أجل كل $y \in G'$ و بذلك يمكن تمديد $g_{|\langle y\rangle}$ على G' بالشكل: $g = R_g(f) \to G'; y \to y^{-1}$ و كون $g = R_g(f)$ تماثلاً زمرياً فإن G' منتهية وحسب المبرهنة (2−2) تكون $ord(G) = ord(G')$ و بالتالي G' هي $P-$ زمرة و حسب المبرهنة (3−2) تكون G' زمرة تبديلية و استناداً إلى المبرهنة(1−1) [2] يتم المطلوب.

مبرهنة(5−2):

لتكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث أن $ord(G)$ لا يقبل القسمة على 2^k وأن $k \geq 3$ و لتكن G' زمرة بحيث $\varphi: L(G) \to L(G')$ هو A–تماثلاً شبكياً و H–تماثلاً شبكياً بالوقت نفسه فوق كل زمرة جزئية لسيلوف من G عندئذٍ فإن $G \cong G'$.

البرهان: بما أن G زمرة منتهية عندئذٍ $ord(G) = n = p_1^{b_1}.p_2^{b_2} \dots . p_r^{b_r}$ ومنه نجد أن $or(G') = ord(G) = n = p_1^{b_1}.p_2^{b_2} \dots . p_r^{b_r}$ و بما أن G تبديلية فاستناداً للمبرهنة (5−1) فهي جداء مباشر لزمرها السيلوفية أي:

$$G = G(p_1) \times G(p_2) \times \cdots G(p_r)\ ; \quad (G(p_i):1) = p_i^{b_i}$$

و كذلك تكون $G(p_i)$ زمرة ناظمية و سيلوفية حيث $1 \leq i \leq r$ و بالتالي حسب المبرهنة (7−1) فإن $G(p_i)$ هي الزمرة الوحيدة p_i– سيلوفية و منه إذا فرضنا أن $\varphi\big(G(p_i)\big) = G_i'$ حيث $G_i' \lhd G'$ و $1 \leq i \leq r$ فإن $\varphi_{|G(p_i)}: L\big(G(p_i)\big) \to L(G_i')$ هو A–تماثل شبكي و استناداً للتمهيدية (2−1) و حسب المبرهنة (2−2) تكون $(G_i':1) = p_i^{b_i}$ وبالتالي تكون G_i' زمرة سيلوف في G' و بما أن $G(p_i)$ هي الوحيدة p_i– سيلوف تكون G_i' الوحيدة p_i– سيلوف ومنه بحسب المبرهنة (7−1) فإن G_i' ناظمية و استناداً للمبرهنة (4−1) تكون:

$G' = G_1' \times G_2' \times \dots . \times G_r'$ ويكون أيضاً $\varphi_{|G(p_i)}$ هو H–تماثل شبكي و هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان p_i عدداً فردياً حيث $1 \leq i \leq r$ فتكون بحسب المبرهنة(4−2) $G(p_i) \cong G_i'$.

الحالة الثانية: إذا كان هناك i من المجموعة $\{1,2, \dots \dots , r\}$ بحيث أن p_i عدد زوجي فحسب الفرض يكون $b_i = 1$ أو $b_i = 2$، فإذا كان $b_i = 1$ فإن $G(p_i)$ مرتبتها 2 إذن حسب المبرهنة (7−1) فهي زمرة دورانية مرتبتها 2 و استناداً للمبرهنة (2−2) تكون G_i' مرتبتها 2 أيضاً، و بالتالي G_i' زمرة دورية مرتبتها 2 و بالتالي تكون $G(p_i) \cong G_i'$.

و إذا كان $b_i = 2$ تكون $G(p_i)$ مرتبتها4 و استناداً للمبرهنة (2−2) فإن G_i' مرتبتها 4 أيضاً، و حسب المبرهنة−1 (7) تكون G_i' زمرة تبديلية و بالتالي تكون $G(p_i) \cong G_i'$ و بذلك نستنتج أن

$G(p_i) \cong G_i' \lhd G'$ حيث $1 \leq i \leq r$ و بما أن

$G' = G_1' \times G_2' \times \dots . \times G_r'$ و كذلك $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots . \times G(p_r)$

فتكون $G \cong G'$ وهو المطلوب.

مبرهنة(6−2):

لتكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث أن $ord(G) = n = {p_1}^2.{p_2}^2 \dots . {p_r}^2$ حيث $p_1, p_2, \dots . , p_r$ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و لتكن $'$ زمرة اختيارية بحيث أن $\varphi: L(G) \to L(G')$ يشكل A–تماثل شبكي عندئذٍ تكون $G \cong G'$.

البرهان: بما أن φ هـ و A–تماثل شبكي فإن: $ord(\ \ ') = ord(G) = n = {p_1}^2.{p_2}^2 \dots . {p_r}^2$ و بما أن G زمرة تبديلية واستناداً للمبرهنة (5−1) فإن G هي جداء مباشر لزمرها السيلوفية أي أن: $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots . \times G(p_r)$ حيث $(G(p_i):1) = p_i^2$، و استناداً للمبرهنة (7−1) فإن $G(p_i)$ هي

الوحيدة p_i- سيلوف و منه و بفرض أن $G' \lhd G'_i = \varphi(G(p_i))$ حيث $1 \le i \le r$ يكون $\varphi_{|G(p_i)}: L(G(p_i)) \to L(G'_i)$ هو A–تماثل شبكي و حسب التمهيدية (2−1) و المبرهنة (2−2) يكون $(G'_i:1) = p_i^2$ و بالتالي تكون G'_i زمرة سيلوف و بما أن $G(p_i)$ هي الوحيدة p_i- سيلوف تكون G'_i الوحيدة p_i- سيلوف و منه و بحسب المبرهنة (7−1) تكون G'_i ناظمية و حسب المبرهنة (4−1) تكون: $G' = G'_1 \times G'_2 \times \ldots\ldots \times G'_r$، من ناحية ثانية إن مرتبة G'_i هي p_i^2 و حسب المبرهنة (4−1) أيضاً تكون G'_i تبديلية و تكون حسب المبرهنة (10−1): $G(p_i) \cong G'_i$ و بذلك نستنتج أن $G(p_i) \cong G'_i \le G'$ حيث $1 \le i \le r$، و بما أن: $G' = G'_1 \times G'_2 \times \ldots\ldots \times G'_r$ و كذلك $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \ldots . \times G(p_r)$ فإن $G \cong G'$ وهو المطلوب.

الخاتمة :

نخلص في نهاية هذا المقال إلى الحقائق الهامة الآتية:

i–إذا كانت G زمرة تبديلية منتهية بحيث أن $ord(G)$ لا يقبل القسمة على 2^k وأن $k \ge 3$ و كانت G' زمرة بحيث أن $\varphi: L(G) \to L(G')$ هو A – تماثلاً شبكياً و H – تماثلاً شبكياًبالوقت نفسه فوق كل زمرة جزئية لسيلوف من G عندئذٍ يتحقق لدينا $G \cong G'$.

ii–إذا كانت G زمرة تبديلية منتهية بحيث أن $ord(G) = n = {p_1}^2.{p_2}^2 \ldots . {p_r}^2$ حيث $p_1, p_2, \ldots . , p_r$ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و كانت G' زمرة اختيارية بحيث أن $\varphi: L(G) \to L(G')$ يشكل A – تماثل شبكي عندئذٍ يتحقق لدينا $G \cong G'$.

الاستنتاجات والتوصيات:

نظراً للأهمية القصوى للزمر الضبابية في التطبيقات الحديثة نوصي بضرورة الاستمرار في هذا الموضوع للتوصل إلى حقائق جديدة في الزمر الضبابية ونقترح محاولة إثبات الحقيقتين II و Iالواردتين في فقرة الخاتمة في حال كانت الزمر التبديلية غير منتهية .

المراجع:

1. BEAR R., *The Signification of the System of Subgroups for the Structure of a Group*. Amer .Jor. Math. Vol. 71. (1974) pp.1-44.
2. BEAR S., *Groups Which are Determined by Subgroup Lattice*. Special Issue . (2009)pp.444-463.
3. SHCHMIDT R., *Subgroup Lattice of Group*. Springer-Verlage, Berlin, 446 pages ,1974.
4. SUZUKI M. , *Group Theory*, Springer-Verlage. Berlin, 446p., 1482.
5. HO W. K. and D. ZHAO., *Lattice of Sets*. Comm. Math. p. 297-32, (2016).
6. HILDEBRAND A. J., *Introduction to Analytic, Number Theory*, Department of Mathematics University of Illinois, Vesion (2013).
7. STERNBERG S., *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, (1994).

8. ALGHOUSSEIN A. and S. YACOUB, *On Lie Groups and P-two Norm Algebras*, Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. (32) No. (3), 123-130 (2010).

9. AKTAŞ H., *Some Resultson Isomorphic Fuzzy Subgroups*, Journal of Mathematics and Computer Science 12 (2014), 152-158