مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (3) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (3) 2017

الصفوف العدّية المعرّفة وفق مجموعة الأعداد الأولية

د. ناصر علي ناصر*

(تاريخ الإيداع 21 / 2 / 2017. قُبِل للنشر في 18 / 5 /2017)

□ ملخّص □

تعتبر مسألة P–NP أهم مسألة في نظرية الحوسبة والتعقيد الحسابي ومن خلال دراستها تم تعريف ودراسة صفوف تعقيد أخرى مثل coNP، PP، $\oplus P$.. .في هذا البحث تمّ تعريف صفوف تعقيد جديدة لحاسبة تورينك اللاحتمية بزمن كثيرة حدود، اعتمادا على مجموعة الأعداد الأولية والأعداد المركبة لـ k–عدد أولي والتي نرمز لها بـ $Cmpst_k P$ وبرهنا على أنّ الصف $coNP$ صف جزئي منها وأن الصف $Cmpst_k P$ هو صف جزئي من الصف $Cmpst_{k+1}P$

الكلمات المفتاحية: صفوف التعقيد، الصفوف العدّية، قبول، حاسبة تورينك اللاحتمية

* مدرس – قسم البرمجيات ونظم المعلومات – كلية الهندسة المعلوماتية – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (3) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (3) 2017

Counting Classes Definedby Prime Numbers

Dr. Nasser A. Nasser*

(Received 21 / 2 / 2017. Accepted 18 / 5 /2017)

□ ABSTRACT □

P-NP-problem is the most important issue in computing theory and computational complexity,Through her study has been defined and studied the ranks of other complexity such ascoNP, PP, $\oplus P$ ..

In this paper we have defined new complexity classes forpolynomial time nondeterministic Turing Machine using prime and composite numbersfor k-prime numbers $Cmpst_k P$ and we have proven that $coNP$ is a subclass of it and the class $Cmpst_k P$ is a subclass of $Cmpst_{k+1} P$

Keywords: Complexity Classes, Counting Classes, Accept, Nondeterministic Turing Machine

*Assistant Professor- Department of Software and Information Systems – Faculty of information engineering Tishreen University- Lattakia- Syria.

مقدمة:

الصفوف العدّية(Counting Classes)هي صفوف تعقيد لحاسبة تورينك اللاحتمية يتبع القبول فيها لعدد الطرق الناجحة في شجرة الحساب لحاسبة توريك لاحتمية تعمل بزمن كثيرة حدود : [1]

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $A \subseteq IN$ ، نسمي A نظام قبول ونرمز بـ AP لصف التعقيد الذي تحدده A ونعرفه بالعلاقة:

$$L \in AP \leftrightarrow \bigvee_{M} L = \{w : accept(M, w) \in A\}$$

حيث M حاسبة تورينك لاحتمية و $accept(M, w)$ ترمز لعدد الطرق الناجحة في شجرة حساب الحاسبة M على كلمة الدخل w

أوّل وأشهر صفوف التعقيد هو الصف NP حيث يتم القبول هنا إذا وجدت طريق ناجحة واحدة على الأقل في شجرة الحساب، والتي تمت دراستها بدايةً من قبل العالم Cook 1971 [2]وهي العامل المشترك لغالبية الابحاث في نظرية التعقيد كما في [12][11][10][9][8][7][6][5][4][3][1] على سبيل المثال،بالمقابل فيتم القبول وفق الصف $coNP = \{A : \overline{A} \in NP\}$[3][12] (صف متممات مجموعات NP) عكس القبول وفق الصف NP والتي تمت دراستها في [15][14][13][12][11][10][9][8].

بعدئذ ظهرت صفوف تعقيد مثل: *PP (probabilistic polynomial time)* والتي تم تعريفها من قبل Gill[16] باستخدام ما أسماه بالحاسبة الاحتمالية probabilistic Turing machineالتي يتم القبول فيهاإذا كان عدد الطرق الناجحة أكبر من عدد الطرق الفاشلة في شجرة الحساب ودرست في مقالات عديدة مثل [18][17][15][7][6][2]،

أما في الصف $\oplus P$ *(parity polynomial time)* [19] فيكون القبول إذاكان عدد الطرق الناجحة فردياً، وكذلك الصفوف $Mod_k P$ [21][20]التي يتم القبول وفقها فقط إذا كان عدد الطرق الناجحة من مضاعفات العدد الصحيح k

ومن الصفوف العدّية الشهيرة الصف $1NP$ [22][21][1]حيث يتم القبول هنا فقط إذا وجدت طريق ناجحة وحيدة في شجرة الحساب.

هذه الصفوف تظهر لدينا على أنها صفوف عديّة فمثلا:

$$NP = \{x : x > 0\}P$$

$$coNP = \{0\}P$$

$$\oplus P = \{x : x \bmod 2 = 0\}P$$

$$Mod_k P = \{x : x \bmod k = 0\}P$$

في عام 1977 تم البرهان على أنّ $NP \subseteq PP$[8] وفي عام 1985 تم البرهان على انّ $coNP \subseteq 1NP$ [23]

هناك صفوف أخرى يعتمد تعريفها على علاقات الترتيب $\leq, =, \neq$ تمت دراستها في [1]

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمّية البحث من علاقة الصفوف المعرّفة مع الصف $coNP$ وبالتالي مع الصف NP

طرائق البحث

نعرّف هنا صفوف تعقيد جديدة يعتمد تعريفها على مجموعة الأعداد الأولية ونبرهن على العلاقة بينها وبين الصف NP $(coNP)$وذلك باستخدام علاقة الاختصار $\leq_{pol}$[1]

صفوف التعقيد المعرّفة وفق مجموعة الأعداد الأولية

1- تعاريف:

لتكن M_1 ، M_2 حاسبتي توريك لاحتميتين نعرّف بدايةً جمع حاسبتين M_1+M_2 ومضروب حاسبتين $M_1 \times M_2$كما يلي:

الحاسبة M_1+M_2 تعمل لاحتميا مثل M_1 أو M_2 أما الحاسبة $M_1 \times M_2$ تعمل في البداية مثل M_1 فإذا وصلت إلى حالة قبول (نهائية) تعمل من جديد مثل M_2 على نفس الدخل

ومن أجل ثابت $b \in IN$ نعرف الحاسبة $[b]$حيث أن هذه الحاسبة تعطي لاحتميا b من طرق القبول عند أي كلمة دخل.

وبذلك أصبح بإمكاننا الآن تعريف كثيرة حدود لحاسبة تورينك كما يوضح المثال التالي:

من أجل حاسبة لاحتمية Mوكثيرة حدود $p(x)=ax^3+b$ مثلا، نكوّن الحاسبة $p(M)$ كما يلي:

$$p(M)=[a]\times M\times M\times M+[b]$$

2- علاقة الاختصار $\leq_{pol}$:

لتكن $A,B\subseteq IN$ ، نقول عن A أنها قابلة للاختصار على B ونكتب $A\leq_{Pol} B$ إذا وجدت كثيرة حدود $p\in IN[x]$ بحيث يكون $x\in A \leftrightarrow p(x)\in B$

3- مبرهنة:

إذا كان $A\leq_{Pol} B$ عندئذ يكون [1] $AP\subseteq BP$

البرهان:

من أجل الحاسبة M_A نكوّن الحاسبة $M_B=p(M_A)$ عندها يكون:

$$AP\subseteq BP \quad accept(M_A,w)\in A \leftrightarrow accept(M_B,w)\in B \leftrightarrow$$

4-الصفوف: $Cmpst_k P$ و $PrimeP$

لتكن $Prime\subset IN$ مجموعة الأعداد الأولية و

$$Cmpst_k=\{x:\bigvee_{x_1,..,x_k\in prime} x=x_1x_2..x_k\};\ k=1,2,..$$

عندئذ ينتج لدينا صف التعقيد $PrimeP$ والصفوف $Cmpst_k P;\ k=1,2,3,..$

في الحالة الخاصة عندما $k=1$ نحصل على $Cmpst_1 P\equiv PrimeP$

سوف نبرهن من خلال النظرية التالية أنّ الصف $coNP$ هو صف جزئي من الصفوف المعرفة أعلاه علاوة على كون الصف $Cmpst_i P$ هو صف جزئي من الصف $Cmpst_{i+1}P$

5-مبرهنة:

1 - $coNP\subseteq PrimeP$

2 - $Cmpst_i P \subseteq Cmpst_{i+1} P$

البرهان:

سوف نبرهن أولا أنّ $\{0\} \leq_{pol} Prime$ و $Cmpst_i \leq_{pol} Cmpst_{i+1}$

1 - نحتاج هنا إلى عدد أولي p يحق $p = Z^2 - 1$ حيث z عدد صحيح موجب عندئذ تكون قيمة كثيرة الحدود $p(x) = x^2 + 2zx + z^2 - 1$ هي العدد p فقط عندما x=0 وفيما عدا ذلك تكون عبارة عن جداء عددين لأنّ $p(x) = (x+z)^2 - 1 = (x+z+1)(x+z-1)$ مثال ذلك كثيرة الحدود:

$p(x) = x^2 + 4x + 3$ عندئذ يكون: $x = 0 \leftrightarrow P(x) \in Prime$

وذلك لأنّ: $x^2 + 4x + 3$ يكون أولياً فقط من أجل x=0أي:

$\{0\} \leq_{pol} Prime$

وحسب النظرية (2−3) نجد $coNP \subseteq PrimeP$ لكون الحاسبة الناتجة عن كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 3$ تحصل على عدد أولي من الطرق الناجحة فقط عندما لا تملك الحاسبة الأساسية أيا من هذه الطرق في شجرة حسابها

2 - نأخذ كثيرة الحدود $p(x) = ax$ حيث a عدد أولي عندها يكون:

$x \in Cmpst_k \leftrightarrow P(x) \in Cmpst_{k+1}$ وبالتالي $Cmpst_k \leq_{pol} Cmpst_{k+1}$ لأن axيكون مؤلفاً من جداء $k+1$عدد أولي فقط عندما يكون x مكونا من جداء k عدد أولي وحسب المبرهنة (3−4) يكون:

$Cmpst_i P \subseteq Cmpst_{i+1} P$

الاستنتاجات والتوصيات

من النظرية السابقة نستنتج أنّ:

$$coNP \subseteq PrimeP = Cmpst_1 P \subseteq Cmpst_2 P \subseteq Cmpst_3 P \subseteq .. \subseteq Cmpst_k P..$$

وبالتالي:

$$NP \subseteq coPrimeP \text{ و } NP \subseteq coCmpst_k P;\ k = 2,3..$$

حيث أنّ نظام قبول $coCmpst_k P$ هو $IN \setminus Cmpst_k$ ونظام قبول NP هو IN^+ أما نظام قبول $coPrimeP$ فهو $IN \setminus Prime$

وتأتي أهمية هذه النتائج من خلال علاقتها بالصف NP وندرة العلاقات المعروفة بين صفوف التعقيد الشهيرة.

نوصيبدراسة العلاقات بين الصفوف $PrimeP\ Cmpst_k P;\ k = 2,3..$ وبينها وبين الصفوف المعروفة مثل NP,1NP,PP, $\oplus P$ باستخدام Oracle

المراجع:

[1] GUNDERMANN T.; NASSER N. A., WECHSUNG G.; "*A survey on counting classes*"; In Proceedings, Fifth Annual Structure in Complexity Theory Conference, pages 140-153, Barcelona, Spain, 8-11 July 1990. IEEE Computer Society Press

[2] COOK S. A. "*The complexity of theorem-proving procedures*", in Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, STOC '71, ACM, New York, NY, USA, 1971, pp. 151–158.

[3] BERMAN L., HARTMANIS J., "*On isomorphism and density of NP and other complete sets*", SIAMJC6(1977), 305-322

[4] WAGNER K.; WECHSUNG G., "*Computational Complexity*", DeutsherVerlag der Wissenshaften Berlin 1986

[5] ARVIND V.; PIYUSH P. KURUR,"*On the Complexity of Computing Units in a Number Field*", Algorithmic Number Theory Volume 3076 (2004) pp 72-86

[6] DURAND A.; HERMANN M.; KOLAITIS,P. G. "*Subtractive reductions and complete problems for counting complexity classes*", Theoretical Computer Science Volume 340, Issue 3, 31 August 2005, pp 496-513

[7] ETESSAMI K.; LOCHBIHLER A.,"*The computational complexity of evolutionarily stable strategies*"; International Journal of Game Theory , **2008**, Volume 37, Issue1, pp 93–113

[8] BÜRGISSER P. ; CUCKER F. "*Counting complexity classes for numeric computations II: Algebraic and semialgebraic sets*", Volume 22, Issue 2, April **2006**, Pages 147–191

[9] BENNETT C.H., GILL J."*Relative to a random oracle A,* $P^A \neq NP^A \neq co\text{-}NP^A$ *with probability*"; 1SIAM J. Comput., 10 (1981), pp. 96-112

[10] HARTMANIS J., IMMERMAN N."*On complete problems for NP* $\Cap$ *co-NP*" Lecture Notes in Computer Science, Proceedings, 12th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, Vol. 194, Springer-Verlag, New York/Berlin (1985), pp. 250-259

[11] ABLAYEV F., KARPINSKI M., . MUBARAKZJANOVR."*On BPP versus NP*$\cup$*coNP for ordered read-once branching programs*"; Theoretical Computer Science Volume 264, Issue 1, 6 August **2001**, Pages 127-137

[12] PORRECA A. E., LEPORATI A., MAURI G., ZANDRON C.;"*P Systems with Elementary Active Membranes Beyond NP and coNP"* Membrane Computing Volume 6501 (2010) pp 338-347

[13] TODA S, "*On the computational power of PP and P*"; In Proceedings of the 30thSymposium on Foundations of Computer Science 1989, 514-519

[14] OQIWARA M."*On sparse hard sets for counting classes*",Theoretical Computer Science, Volume 112, Issue 2, 10 May 1993, Pages 255-275

[15] ARVIND V., VIJAYARAGHAVAN T. C. "*Classifying Problems on Linear Congruences and Abelian Permutation Groups Using Logspace Counting Classes*", computational complexity March **2010**, Volume 19, Issue 1, pp 57–98

[16] GILL J., "*Computational complexity of probabilistic Turing machines*". In SIAM Journal on Computing 6 (1977), 675-695.

[17] KOBLER J., SCHONING U., TORAN J.AND TODA S., "*Turing Machines with few accepting computations and low sets for PP*"; In Proceedings of the 4th Structure in Complexity Theory Conference 1989, 208-216.

[18] FORTNOW L.AND REINGOLD N., "*PP is closed under truth-table reductions*"; Proceedings of the 6th Annual Conference on Structure in Complexity Theory 1991,13-15.

[19] PAPADIMITRIOU C. AND ZACHOS S. "*Two remarks on the power of counting*" In Proceedings of the 6th GI-Conference on Theoretical Computer Science, volume 145 of

LNCS, pages 269–276. Springer, 1983

[20] BEIGEL R., REINGOLD N., SPIELMAN D., "*PP is closed under intersection*"; In Proceedings of the 23rd ACM Symposium on the Theory of Computation 1991, 1-11.

[21] PAPADIMITRIOU CZACHOS., S., "*Two remarks on the power of counting*",. In 6th GI Conference on Theoretical Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 145 (1983) 269-276.

[22] BEIGEL R., GILL J., Hertrampf U., "*Counting classes Thresholds, parity, mods, and fewness*". In Proceedings 7th Symposium on Theoretical Aspects of ComputerScience, Lecture Notes in Computer Science 415 (1990), 49-57.

[23] HERTRAMPF U. *"Relations among MOD-classes*". In Theoretical Computer Science74 (1990), 325-328.

[24] BLASS A., GUREVICH Y."*on the uniquesatisfyiability problem*", information and Control, 55,(1982),80-88

[25] GUNDERMANN T., WECHSUNG G."*Nondeterministic Turing machines with modified acceptance*"; Lecture Notes in Computer Science 233 (1985) pp 396-404

[26] CRONAUER K., HERTRAMPF UVOLLMER H. WAGNER. K. W. "*The Chain Method to Separate Counting Classes*", Theory of Computing Systems,February 1998, Volume 31, Issue1, pp 93–108

[27] ROTHE J."*Immunity and Simplicity for Exact Counting and Other Counting Classes*" ;Theoret. Informatics Appl. 33 (1999) 159-176

[28] HEMASPAANDRA L. A., OGITHARA M., WECHSUNG, G." *Reducing the Number of Solutions of NP Functions*". MFCS **2000**:349-404