مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (1) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (1) 2017

حد أدنى وحد أعلى لعدد السيطرة من المرتبة 2 لـ $P_m \times P_n$ من أجل $m = 6,7$ و n عدد كيفي.

الدكتور رامي شاهين*[1]
الدكتور سهيل محفوض
خميس عماش المانع ***

(تاريخ الإيداع 1 / 8 / 2016. قُبِل للنشر في 16 / 1 /2017)

□ ملخّص □

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ من المرتبة n مع مجموعة الرؤوس $V(G)$ ومجموعة الأضلاع $E(G)$. ولتكن D مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس البيان $V(G)$، تدعى D بأنها 2 − مجموعة سيطرة للبيان G إذا كان لأجل كل رأس $v \in D - V$ يوجد مجاورين له على الأقل من رؤوس المجموعة D.

كما و يرمز لعدد السيطرة من المرتبة 2 بالرمز $\gamma_2(G)$ و هو عدد عناصر أصغر $2-$ مجموعة سيطرة.

في هذا البحث سوف سيتم إيجاد حد أدنى وحد أعلى لعدد السيطرة من المرتبة الثانية للجداء الديكارتي لمسارين P_m, P_n في حالة $m = 6,7$ و n عدد كيفي.

الكلمات المفتاحية: مسار، الجداء الديكارتي ، 2−مجموعة السيطرة ، عدد السيطرة من الدرجة 2.

*أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
***طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (1) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (1) 2017

Lower and upper bounds of 2- domination number of the $P_m \times P_n$ for m=6,7and arbitrary n.

Dr. Ramy Shaheen *[2]
Dr. Suhail Mahfud**
Khames amash Almanea***

(Received 1 / 8 / 2016. Accepted 16 / 1 /2017)

□ ABSTRACT □

Let $G(V,E)$ be a graph of order n. with vertices $V(G)$ and edges $E(G)$.

A set D of vertices of a graph $G=(V,E)$ is called 2- dominating if every vertex $v \in D-V$ has at least two neighbors in D. let $\gamma_2(G)$ denotes The 2- domination number of a graph G, , is the order of a smallest 2- dominating set of G. In this paper, we found lower and upper bounds of 2- domination number of the cartesian product of two paths P_m *and* P_n for m=6,7 and arbitrary n.

Keywords: Path, Cartesian product graphs, 2-Dominating set, 2-Domination number.

[2]***Associate Professor , Department of Mathematics , Faculty of science , Tishreen University , Lattakia , Syria.**
****Assistant Professor , Department of Mathematics , Faculty of science , Tishreen University , Lattakia , Syria.**
*****Postgraduate Student, Department of Mathematics , Faculty of science , Tishreen University , Lattakia , Syria.**

مقدمة:

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ من المرتبة n مع مجموعة الرؤوس $V(G)$ ومجموعة الأضلاع $E(G)$. ولتكن D مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس البيان $V(G)$، تسمى D 2− مجموعة سيطرة للبيان G إذا كان لأجل كل رأس $v \in D-V$ يوجد مجاورين له على الأقل من رؤوس المجموعة D . وتسمى D مجموعة سيطرة للبيان G إذا كان لأجل كل رأس $v \in D-V$ يوجد مجاور له على الأقل من رؤوس المجموعة D .

يرمز لعدد السيطرة من المرتبة 2 بالرمز $\gamma_2(G)$ والذي هو عدد عناصر أصغر 2− مجموعة سيطرة.

و $\gamma(G)$ عدد السيطرة من المرتبة الأولى والذي هو عدد عناصر أصغر مجموعة سيطرة.

المسار P_n هو متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع $u = v_1 , e_1 , v_2 , e_2 , \ldots , v_{n-1} , e_{n-1} , v_n = v$ بحيث $v_i \neq v_j$, $e_i \neq e_j$ وذلك لكل $i \neq j$.

إنّ الجداء الديكارتي للبيانين G_2 , G_1 : هو البيان $G = G_1 \times G_2$ والمؤلف من مجموعة الرؤوس $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع

$$E(G) = \{(u_1 , u_2)\ (v_1 , v_2) : v_1 = u_1 \ and \ v_2 u_2 \in E(G_2) \ or \ v_2 = u_2 \ and \ v_1 u_1 \in E(G_1)\}$$

نعرف العمود زمن الجداء $\mathrm{P}_m \times \mathrm{P}_n$ بالشكل الآتي $K_j = \{(i, j) : i = 1, \ldots, m\}$. ونضع $s_j = |k_j \cap D|$ ، عندئذ نسمي $(s_1, \ldots , s_n)$ سلسلة السيطرة لمجموعة السيطرة D .

أوجد الباحثين(Cockayne, Gamble and Shepherd) في [1] حد أعلى لعدد السيطرة للبيان من المرتبة k حيث البيان يملك أصغر درجة k للرؤوس كما في المبرهنة التالية :

مبرهنة (1)[1]: ليكن لدينا البيان G و k أصغر درجة عندئذ: $\gamma_k(G) \leq \dfrac{k|v|}{(k+1)}$.

كما توصل كل من (Hansberg and Volkmann) في [2] إلى النتيجة الآتية :

مبرهنة (2) [2]: ليكن لدينا البيان G من المرتبة n و δ أصغر درجة وبأخذ $k \in N$ إذا كان $\dfrac{\delta+1}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ عندئذ فان : $\gamma_k \leq \dfrac{|v|}{\delta+1}\left(k\ln(\delta+1) + \sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{\delta^i}{i!(\delta+1)^{k-1}}\right)$.

وعمل كل من الباحثين (Blidia , Chellali and Volkmann) في [3] على دراسة السيطرة من المرتبة k وتوصلوا إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة (3) [3]: ليكن لدينا G بيان ثنائي التجزئة و S مجموعة من كل الرؤوس التي درجة كل منها على الأكثر k−1 عندئذ: $\gamma_K(G) \leq \dfrac{|v|+|s|}{2}$.

وقد توصل (Volkmann) في [4] إلى الآتي :

مبرهنة(4) [4]: ليكن لدينا البيان G وأصغر درجة $\delta \geq K+1$ عندئذ :

$$\gamma_{K+1}(G) \leq \frac{|v| + \gamma_K(G)}{2} .$$

واوجد الباحثين (Favaron , Hasberg and Volkmann) في [5] دراسة جديدة للحد الأعلى لعدد السيطرة لبيان من المرتبة k.

مبرهنة (5) [5]: ليكن لدينا البيان G من المرتبة n و δ أصغر درجة ، إذا كان $k \le \delta$ عدد صحيح عندئذ:

$$\gamma_k(G) \le \frac{\delta}{2\delta + 1 - k}|V|.$$

وأوجد الباحث (Shaheen) في [6] عدد السيطرة من المرتبة 2 للجداء الديكارتي $C_m \times C_n$ في حالة $m = 1,2,3,4,5$ و n كيفي، وكانت النتائج بالشكل الآتي :

مبرهنة (6) [6]:

$$(1)\quad \gamma_2(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$(2)\quad \gamma_2(C_3 \times C_n) = n : n \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\gamma_2(C_3 \times C_n) = n + 1 : n \equiv 1,2 \pmod 3,$$

$$(3)\quad \gamma_2(C_4 \times C_n) = n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil : n \equiv 0,3,5 \pmod 8,$$
$$\gamma_2(C_4 \times C_n) = n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 : n \equiv 1,2,4,6,7 \pmod 8),$$

$$(4)\quad \gamma_2(C_5 \times C_n) = 2n\,,$$

$$(5)\quad \gamma_2(C_6 \times C_n) = 2n : n \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\gamma_2(C_6 \times C_n) = 2n + 2 : n \equiv 1,2 \pmod 3,$$

$$(6)\quad \gamma_2(C_7 \times C_n) = \left\lceil \frac{5n}{2} \right\rceil : n \equiv 0,3,11 \pmod{14},$$
$$\gamma_2(C_7 \times C_n) = \left\lceil \frac{5n}{2} \right\rceil + 1 : n \equiv 5,6,7,8,9,10 \pmod{14},$$
$$\gamma_2(C_7 \times C_n) = \left\lceil \frac{5n}{2} \right\rceil + 2 : n \equiv 1,2,4,12,13 \pmod{14}.$$

وفي [7] أوجد (Shaheen) حد أدنى وحد أعلى لعدد السيطرة من المرتبة 2 للجداء الديكارتي $C_m \times C_n$ في الحالة العامة وكانت النتائج بالشكل الآتي:

مبرهنة (7) [7]:

1 - لأجل n, m كيفي:

$$\gamma_2(C_m \times C_n) \ge \begin{cases} \frac{mn}{3} : m \equiv 0 \pmod 3, \\ \frac{mn}{3} + \frac{n}{6} : m \equiv 1 \pmod 3, \\ \frac{mn}{3} + \frac{n}{3} : m \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

2 - لأجل $m \equiv 0 \pmod 3$ يكون:

$$\gamma_2(C_m \times C_n) \le \begin{cases} \dfrac{mn}{3} : n \equiv 0 \pmod 3, \\ \dfrac{mn}{3} + \dfrac{m}{3} : n \equiv 1,2 \pmod 3. \end{cases}$$

3 - لأجل $m \equiv 1 \pmod 3$ يكون:

$$\gamma_2(C_m \times C_n) \le \begin{cases} \dfrac{mn}{3} + \dfrac{n}{3} : n \equiv 0 \pmod 3, \\ \left\lceil \dfrac{mn}{3} \right\rceil + \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{m}{3} \right\rfloor : n \equiv 1,2 \pmod 3. \end{cases}$$

4 - لأجل $m \equiv 2 \pmod 3$ يكون:

$$\gamma_2(C_m \times C_n) \le \begin{cases} \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil n : n \equiv 0,3 \pmod m, \\ \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil n + \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil : 0 \le j \le \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil \ \ and\ \ n \equiv (3j+1) \pmod m, \\ \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil n + \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil - j : 1 \le j \le \dfrac{m}{3} \ \ and\ \ n \equiv (3j-1) \pmod m, \\ \left\lceil \dfrac{m}{3} \right\rceil n + j - 1 : 2 \le j \le \dfrac{m}{3} \ \ and\ \ n \equiv 3j \pmod m. \end{cases}$$

5 -

$$\gamma_2(C_m \times C_n) = \begin{cases} \dfrac{mn}{3} : m, n \equiv 0 \pmod 3, \\ \dfrac{mn}{3} + \dfrac{n}{3} : m \equiv 2 \pmod 3 \ \ and\ \ n \equiv 0,3 \pmod m. \end{cases}$$

كذلك أوجد الباحثون في [8] عدد السيطرة من المرتبة 2 للجداء الديكارتي لمسارين $\mathrm{P}_m, \mathrm{P}_n$ في حالة $m = 1, 2, 3, 4, 5$ و n عدد كيفي، وكانت النتائج بالشكل الآتي:

مبرهنة (8) [8]:

$$(1)\quad \gamma_2(\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil,$$

$$(2)\quad \gamma_2(\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_n) = n,$$

$$(3)\quad \gamma_2(\mathrm{P}_3 \times \mathrm{P}_n) = n + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil,$$

$$(4)\quad \gamma_2(\mathrm{P}_4 \times \mathrm{P}_n) = \begin{cases} 2n - \left\lceil \dfrac{n}{4} \right\rceil & : n \equiv 3,7 \pmod 8, \\ 2n + \left\lceil \dfrac{n}{7} \right\rceil + 1 & : n \equiv 0,1,2,4,5,6 \pmod 8, \end{cases}$$

$$(5)\quad \gamma_2(\mathrm{P}_5 \times \mathrm{P}_n) = \begin{cases} 2n + \left\lceil \dfrac{n}{7} \right\rceil & : n \equiv 1,2,3,5 \pmod 7, \\ 2n + \left\lceil \dfrac{n}{7} \right\rceil + 1 & : n \equiv 0,4,6 \pmod 7. \end{cases}$$

في هذا البحث سوف نوجد حد أدنى وحد أعلى لعدد السيطرة من المرتبة 2 للجداء الديكارتي لمسارين $\mathrm{P}_m , \mathrm{P}_n$ في حالة $m = 6,7$ و n عدد كيفي.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث من الناحية العلمية بأنه يعالج مشكلة إيجاد العدد الأقل من الرؤوس للسيطرة على بيان وبشكل خاص الجداء الديكارتي لمسارين وهو الأكثر تطبيقا في الحياة العملية أما من الناحية التطبيقية فتقليص عدد المراكز اللازمة لخدمة قطاع معين يقلل التكلفة ويوفر الوقت حيث هناك مواقع هامة تحتاج اكتر من مخدم.

ويهدف هذا البحث لإيجاد حد أدنى وحد أعلى لعدد السيطرة من المرتبة الثانية للجداء الديكارتي لمسارين $\mathrm{P}_m \times \mathrm{P}_n$ في حالة $m = 6,7$ و n عدد كيفي.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهوم 2− مجموعة السيطرة وعدد السيطرة من الدرجة الثانية على البيانات غير الموجهة والاعتماد على المعلومات الموجودة في المقالات 8,7,6 بشكل أساسي.

النتائج والمناقشة:

ملاحظة (1): لتكن D هي 2− مجموعة السيطرة لـ $\mathrm{P}_m \times \mathrm{P}_n$ (حيث $m , n \geq 4$) و ($s_1, s_2, \ldots, s_n$) هي2− متتالية السيطرة للمجموعة D عندئذ:

1 − $s_1 , s_2 \geq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

2 − إذا كان $s_j=0$ عندئذ $s_{j-1} + s_{j+1} = 2m$ أي أن $s_{j-1} = s_{j+1} = m$.

3 − $s_{j-1} + 4s_j + s_{j+1} \geq 2m$.

4 − إن دراسة سلسلة السيطرة ($S_1,S_2,S_3,\ldots ,S_n$) تعني نفس دراسة سلسلة السيطرة ($S_n,S_{n-1},\ldots,S_2, S_1$).

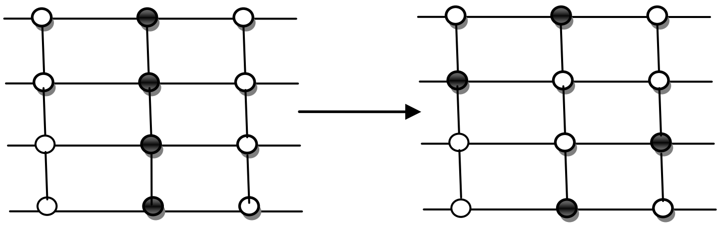
5 − إذا كانت السلسلة الجزئية ($S_J,S_{J+1},\ldots,S_{J+k}$) غير ممكنة فإن عكسها ($S_{J+K},\ldots,S_J$) غير ممكن.

6 − إذا كانت السلسلة الجزئية ($S_J,S_{J+1},\ldots,S_{J+k}$) غير ممكنة فإن السلسلة الجزئية ($S_J,S_{J+1},\ldots,S_{J+k}-1$) غير ممكنة.

تمهيدية (1): لتكن D هي 2− مجموعة السيطرة لـ $\mathrm{P}_m \times \mathrm{P}_n$ (حيث $m , n \geq 4$) و S هي 2− متتالية السيطرة للمجموعة D إذا كان لأجل بعض قيم j لدينا $K_j \cap D = \{ (i , j) , (i+1, j) , (i+2 , j) , (i+3 , j) \}$ عندئذ توجد D' أقل 2− مجموعة سيطرة للبيان $\mathrm{P}_m \times \mathrm{P}_n$ بحيث أن أي عمود K_j لا يحتوي أربعة رؤوس متتالية من مجموعة السيطرة.

البرهان: يأتي مباشرة من ملاحظة الشكل (1) الآتي :

S_{j-1} S_j S_{j+1} S_{j-1} S_j S_{j+1}



الشكل (1) يمثل تعديل توزع رؤوس السيطرة

ملاحظة (2):

من التمهيدية (1) يمكن أن نلغي دراسة جميع الحالات التي يوجد فيها أربعة رؤوس متتالية من D في عمود واحد.

تمهيدية (2):

ليكن لدينا أصغر 2 – مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي $P_m \times P_n$ مع 2 – سلسلة السيطرة $(s_1, s_2, ..., s_n)$ لأجل $j = 1, 2, 3, ..., n-1, n$ عندئذ يتحقق لدينا: $\left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor \le s_j \le \left\lceil \frac{3m}{4} \right\rceil$ لأجل $j = 1, 2, 3, ..., n-1, n$.

البرهان:

لنفرض D أصغر 2 – مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي $P_m \times P_n$ مع 2 – سلسلة السيطرة $(s_1, s_2, ..., s_n)$ وذلك لأجل بعض قيم j ، إذا كان s_j كبيرة عندئذ نعدل D بحيث نحرك راسين من العمود j وذلك بتحريك رأس إلى العمود $j-1$ ورأس آخر إلى العمود $j+1$ مع الحفاظ على 2– مجموعة السيطرة للجداء الديكارتي $P_m \times P_n$ الآن من أجل كل $1 \le i \le m$ و$1 \le j \le n$ نضع:

$$W = D \cap \{ (i, j), (i+1, j), (i+2, j), (i+3, j) \}$$

إذا كان $|W| = 4$ ، عندئذ

نعرف $D_1 = (D - w) \cup \{ (i, j), (i+1, j-1), (i+2, j+1), (i+3, j) \}$

كما في الشكل (1). نكرر هذا الإجراء إذا كان ذلك ضروريا وبالنتيجة نحصل على 2– مجموعة السيطرة مع جميع الاحتمالات . أيضا يمكننا أن نفرض D_1 على أنها 2– مجموعة سيطرة للبيان $P_m \times P_n$ بحيث $|D| = |D_1|$ وبالتالي نستطيع أن نفرض بأن كل أربعة رؤوس متتالية من العمود j تتضمن على الأكثر ثلاثة رؤوس من المجموعة D وبهذا يكون $s_j \le \left\lceil \frac{3m}{4} \right\rceil$ ، لأجل كل $1 \le j \le n$.

الآن لبرهان الحد الأدنى، نفرض أن $|K_j \cap D|$ اكبر ما يمكن، أي أن $s_j = \left\lceil \frac{3m}{4} \right\rceil$. عندئذ لأجل كل $(i, j) \notin D$ ، يكون لدينا $|\{(i-1, j+1), (i, j+1), (i+1, j+1)\} \cap D| \ge 1$.عندئذ

لأجل $s_j = \left\lceil \frac{3m}{4} \right\rceil$ هناك على الأكثر $m - \left\lceil \frac{3m}{4} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor$ من الرؤوس لا تنتمي إلى $K_j \cap D$ وبالتالي فإن $s_{j+1} \geq \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor$ وبشكل مشابه $s_{j-1} \geq \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor$.

تمهيدية (3):

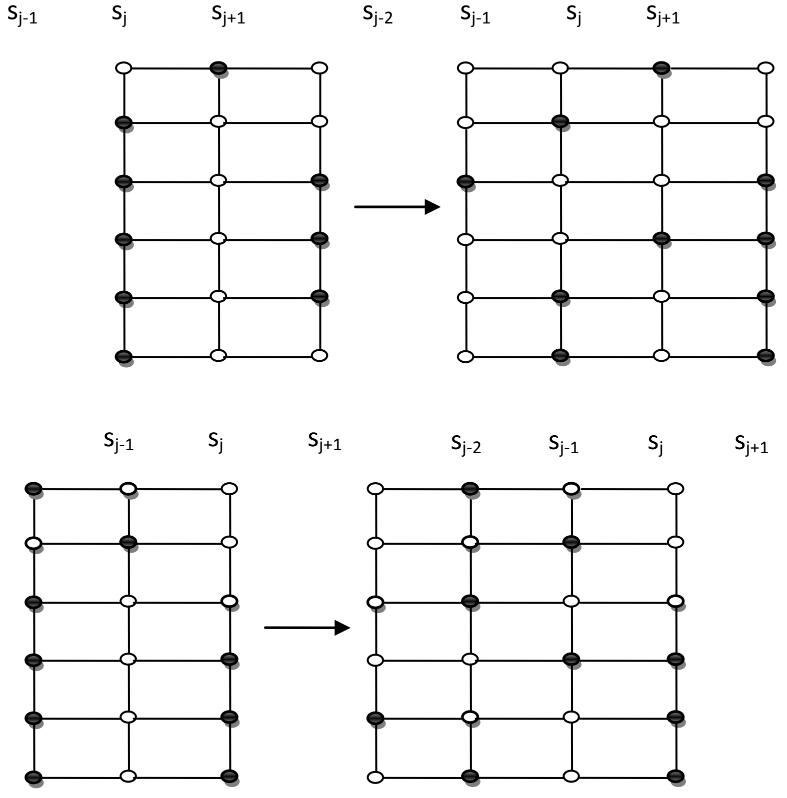
ليكن لدينا S أصغر 2− مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي $P_m \times P_n$ لأجل $m = 6$ و n عدد كيفي.

وليكن S_J عدد رؤوس السيطرة في العمود K_J عندئذ:

1. إذا كان $S_J=1$ وكان $K_j \cap S = \{(1, j)\}$ or $K_j \cap S = \{(2, j)\}$ فإن $S_J=1$ تؤول إلى حالة $S_J=2$.
2. إذا كان $S_J=2$ وكان $K_j \cap S = \{(1, j), (2, j)\}$ فإن $S_J=2$ تؤول إلى حالة $S_J=3$.

البرهان:

1. إذا كان $S_J=1$ وكان $K_j \cap S = \{(1, j)\}$ or $K_j \cap S = \{(2, j)\}$ فإن $s_{j-1} + s_{j+1} \geq 8$ عندئذ العمود K_{j+1} أو العمود K_{j-1} يحوي 4 رؤوس متتالية وحسب التمهيدية (1) يمكن تعديل رؤوس $K_j \cap S$ بنقل رأس من العمود K_{j+1} و العمود K_{j-1} كما بالشكل (2) حيث لدينا بالرسم الحالات $(s_{j-1},s_j,s_{j+1})=(5,1,3)$ أو $(s_{j-1},s_j,s_{j+1})=(5,1,4)$ والحالات الأخرى المناظرة لها .

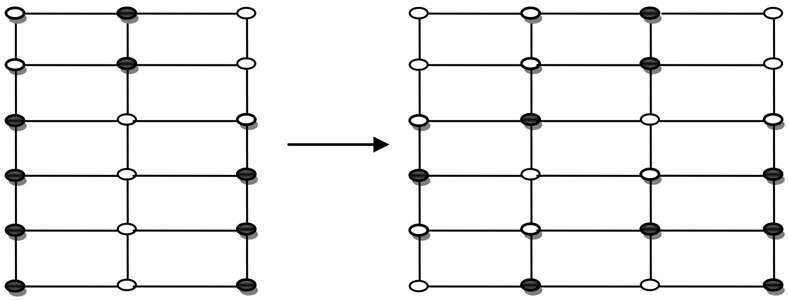


الشكل (2) يمثل تعديل رؤوس السيطرة

2. إذا كان $S_J=2$ وكان $K_j \cap S = \{(1, j), (2, j)\}$ فإن $s_{j-1} + s_{j+1} \geq 7$ عندئذ العمود K_{j+1} أو العمود K_{j-1} يحوي 4 رؤوس متتالية وحسب التمهيدية (1) يمكن تعديل رؤوس $K_j \cap S$ بنقل رأس من العمود

s_{j-1} s_j s_{j+1} s_{j-2} s_{j-1} s_j s_{j+1}

K_{j+1} أو العمود K_{j-1} كما بالشكل (3) حيث لدينا بالرسم الحالات $(s_{j-1},s_j,s_{j+1})=(4,2,3)$ أو $(s_{j-1},s_j,s_{j+1})=(3,2,4)$ والحالات الأخرى المناظرة لها .



الشكل (3) يمثل تعديل رؤوس السيطرة

ملاحظة (3):

1 - إن دراسة حالة $K_j \cap S = \{(5,j),(6,j)\}$ مشابهة لدراسة $K_j \cap S = \{(1,j),(2,j)\}$.

2 - إن دراسة حالة $K_j \cap S = \{(6,j)\}$ أو $K_j \cap S = \{(5,j)\}$ مشابهة لدراسة $K_j \cap S = \{(1,j)\}$ أو $K_j \cap S = \{(2,j)\}$ على الترتيب.

تمهيدية (4):

لتكن D -2 مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي $P_m \times P_n$ مع 2 – سلسلة السيطرة $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ وذلك لأجل $j=1,2,3,\dots,n-1,n$ عندئذ:

1 - إذا كان $s_j=1$ فإن $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 8$.

2 - إذا كان $s_j=2$ فإن $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 5$.

البرهان:

1 - إذا كان $s_j=1$ فإنه من العلاقة $s_{j-1}+4s_j+s_{j+1} \geq 2m$ نستنتج مباشرة أن $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 8$.

2 - نناقش من أجل $s_j=2$ الحالات الآتية:

a - إذا كان $K_j \cap S = \{(1,j),(2,j)\}$ عندئذ هذه الحالة تؤول إلى $s_j=3$ كما في التمهيدية (3)

b - إذا كان $K_j \cap S = \{(1,j),(3,j)\}$ نجد أن $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 7$ حيث لدينا الحالة $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(4, 2, 3)$ كما في الشكل (4-b).

c - إذا كان $K_j \cap S = \{(1,j),(4,j)\}$ نجد أن $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 5$ حيث لدينا الحالة $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(3, 2, 2)$ كما في الشكل (4-c).

d - إذا كان $K_j \cap S = \{(1,j),(5,j)\}$ نجد أن $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 6$ حيث لدينا الحالة $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(4,2,2)$ أما الحالة $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(2, 2, 2)$ فهي غير ممكنة كما يبين الشكل (4-d).

e - إذا كان $K_j \cap S = \{(1,j),(6,j)\}$ نجد $s_{j-1}+s_{j+1} \geq 6$ حيث تنتج لدينا الحالات $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(3, 2, 3)$ or$(4,2,2)$ or$(2,2,4)$ كما في الشكل (4-e).

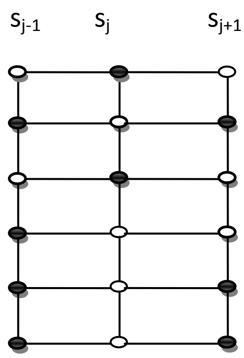
f – إذا كان $K_j \cap S = \{(2, j), (3, j)\}$ نجد $s_{j-1} + s_{j+1} \geq 7$ حيث تنتج لدينا الحالات $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(4, 2, 3)$ كما في الشكل (4–f).

g – إذا كان $K_j \cap S = \{(2, j), (4, j)\}$ نجد $s_{j-1} + s_{j+1} \geq 6$ حيث تنتج لدينا الحالات $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(3, 2, 3)$ or$(4,2,2)$ or$(2,2,4)$ كما في الشكل (4–g).

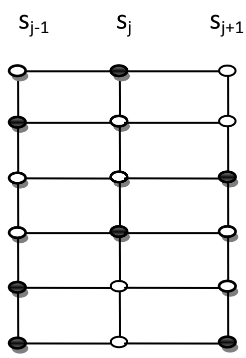
h – إذا كان $K_j \cap S = \{(2, j), (5, j)\}$ نجد $s_{j-1} + s_{j+1} \geq 6$ حيث تنتج لدينا الحالات $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(3, 2, 3)$ or$(4,2,2)$ or$(2,2,4)$ كما في الشكل (4–h).

i – إذا كان $K_j \cap S = \{(3, j), (4, j)\}$ نجد $s_{j-1} + s_{j+1} \geq 6$ حيث تنتج لدينا الحالات $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(3, 2, 3)$ or$(4,2,2)$ or$(2,2,4)$ كما في الشكل (4–i).

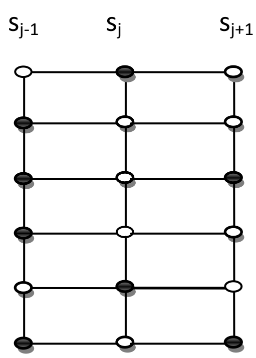
مع ملاحظة أن الحالات الأخرى تنتج بالتناظر ويمكن تمثيل كل سلسلة بأكثر من شكل .



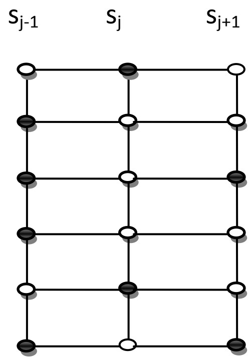
4-b



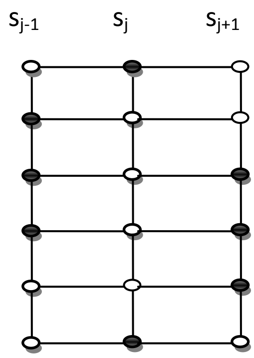
4-c



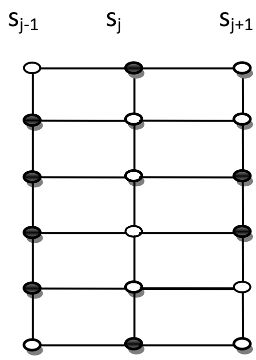
4-d



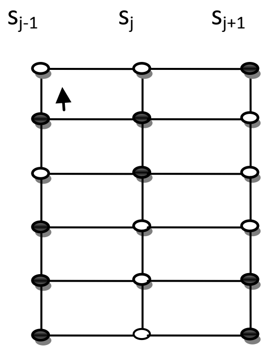
4-d



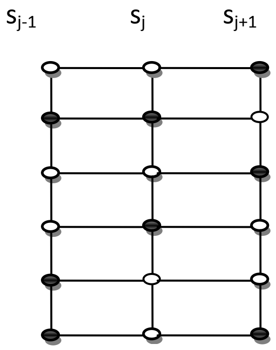
4-e



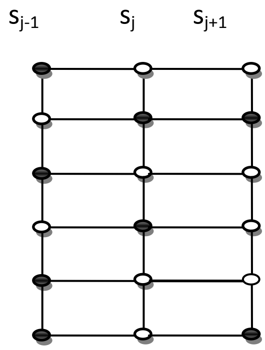
4-e



4-f

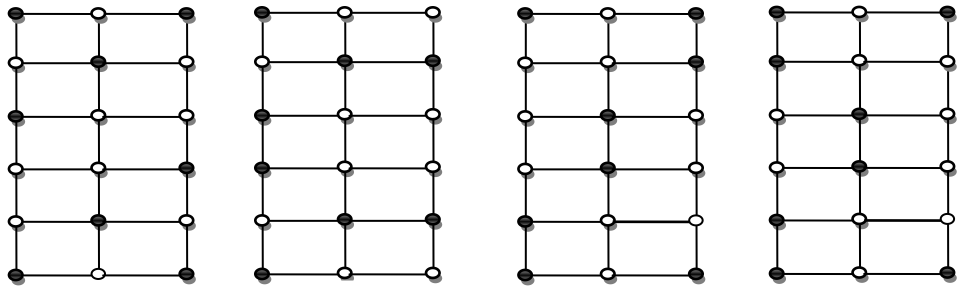


4-g



4-g

sj-1 sj sj+1 j-1 sj sj+1 sj-1 sj sj+1 sj-1 sj sj+1



4-h 4-h 4-i 4-i

الشكل (4) يمثل حالات توزع رؤوس السيطرة

نتيجة (1):

من التمهيدية (4) يمكننا استنتاج أن الحالة $(s_{j-1}, s_j, s_{j+1})=(2, 2, 2)$ غير ممكنة.

تمهيدية (5):

لتكن لدينا $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_j)$ هي 2− سلسلة السيطرة للجداء $P_6 \times P_n$ عندئذ فإن :

$s_1+s_2+s_3\ge 8$ وكذلك $s_{n-2}+s_{n-1}+s_n\ge 8$.

البرهان:

لدينا $s_1\ge 2$ و $5\ge s_j\ge 1$ حيث $2\le j\le n-1$ عندئذ لندرس الحالات الآتية :

1 − إذا كان $s_2=1$ عندئذ بحسب التمهيدية (4) يكون $s_1+s_3\ge 8$ ومنه $s_1+s_2+s_3\ge 9$.

2 − إذا كان $s_3=1$ عندئذ بالرسم يكون $s_1+s_2\ge 7$ ومنه $s_1+s_2+s_3\ge 8$.

3 − إذا كان $s_2, s_3\ge 2$ فإن:

a − إذا كان $s_3=2$ عندئذ بالرسم يكون $s_1+s_2\ge 6$ ومنه $s_1+s_2+s_3\ge 8$.

b − إذا كان $s_2=2$ عندئذ بالرسم يكون $s_1+s_3\ge 6$ ومنه $s_1+s_2+s_3\ge 8$.

4 − إذا كان $s_2, s_3\ge 3$ عندئذ لدينا $s_1\ge 2$ ومنه $s_1+s_2+s_3\ge 8$.

وبشكل مشابه يمكننا برهان $s_{n-2}+s_{n-1}+s_n\ge 8$.

تمهيدية(6):

ليكن لدينا $(s_j, s_{j+1}, \dots, s_n)$ هي 2− سلسلة السيطرة للجداء $P_6 \times P_n$ عندئذ الحالات الآتية غير ممكنة:

1 − $(s_j, s_{j+1})=(1,1) or (1,2)$.

2 − $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2})=(3,1,3),(3,1,4),(2,2,2),(1,3,2),(2,3,1) or (1,2,3)$.

3 − $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3})=(1,3,3,1),(1,4,1,3) or (2,2,3,1)$.

4 − $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4})=(2,2,3,2,2) or (1,3,3,2,2)$.

البرهان: ينتج بالرسم مباشرة.

نتيجة (2):

1 – إذا كانت السلسلة (p ,q) غير ممكنة فان السلسلة (s_j, s_{j+1}, …, p ,q)غير ممكنة .

2 – إذا كانت السلسلة (p ,q, r) غير ممكنة فان السلسلة (s_j, s_{j+1}, …, p ,q, r)غير ممكنة .

تمهيدية (7):

1 – $1 \le s_j \le 5$

2 – $\sum_{j}^{j+1} s_j \ge 4$

3 – $\sum_{j}^{j+2} s_j \ge 6$

4 – $\sum_{j}^{j+3} s_j \ge 9$

5 – $\sum_{j}^{j+4} s_j \ge 11$

6 – $\sum_{j}^{j+5} s_j \ge 14$

7 – إذا كان $s_j \ge 3$ فإن $\sum_{j}^{j+5} s_j \ge 15$.

8 – إذا كان $s_j \ge 4$ فإن $\sum_{j}^{j+5} s_j \ge 16$.

البرهان:

1 – من التمهيدية (2) لدينا $\left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor \le s_j \le \left\lceil \frac{3m}{4} \right\rceil$ عندئذ $1 \le s_j \le 5$.

2 – لدينا من التمهيدية (6) أن الحالتين $\{(1,1),(1,2)\} = (s_j, s_{j+1})$ غير ممكنتين ومنه نجد :
$\sum_{j}^{j+1} s_j \ge 4$.

3 – لدينا من الخطوة (2) في التمهيدية (7) أن $\sum_{j}^{j+1} s_j \ge 4$ عندئذ:

- إذا كان $\sum_{j}^{j+1} s_j = 4$ فإنه لدينا الحالات $(s_j, s_{j+1}) = \{(1,3),(3,1)(2,2)\}$ والتوافق مع هذه الحالات وحسب الحالات غير الممكنة من التمهيدية (6) يكون $s_{j+2} \ge 3$ عندئذ $\sum_{j}^{j+2} s_j \ge 6$.
- إذا كان $\sum_{j}^{j+1} s_j \ge 5$ يكون $s_{j+2} \ge 1$ عندئذ $\sum_{j}^{j+2} s_j \ge 6$.

4 - لدينا من الخطوة (3) في التمهيدية (7) أن $\sum_{j}^{j+2} s_j \geq 6$ عندئذ:

a - إذا كان $\sum_{j}^{j+2} s_j \geq 8$ يتم المطلوب لأن $1 \leq s_j \leq 5$ حسب البند (1)، عندئذ $\sum_{j}^{j+3} s_j \geq 9$.

b - إذا كان $\sum_{j}^{j+2} s_j = 7$ فإنه لدينا الحالات الممكنة حسب التمهيدية (6)

حيث أن $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) = (1,3,3), (3,3,1), (1,4,2), (1,5,1), (2,2,3), (2,4,1) or\ (3,2,2).$

الحالة $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) = \{(3,1,3)\}$ غير ممكنة وللتوافق مع هذه الحالات يجب أن يكون $s_{j+3} \geq 2$ أو $s_{j-1} \geq 2$

وبالتالي نجد $\sum_{j}^{j+3} s_j \geq 9$.

c - إذا كان $\sum_{j}^{j+2} s_j = 6$ فإنه لدينا الحالة الممكنة حسب التمهيدية (6) $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) = \{(1,4,1)\}$

عندها يكون $s_{j+3} \geq 4$ أو $s_{j-1} \geq 4$ حيث أن الحالات

$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) = (2,2,2), (1,3,2), (2,3,1) or\ (1,2,3)$ غير ممكنة والحالة

$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}) = (1,4,1,3)$ غير ممكنة وبالتالي نجد $\sum_{j}^{j+3} s_j \geq 9$.

5 - لدينا من الخطوة (4) في التمهيدية (7) أن $\sum_{j}^{j+3} s_j \geq 9$ عندئذ فانه:

a - إذا كان $\sum_{j}^{j+3} s_j \geq 10$ يتم المطلوب لأن $1 \leq s_j \leq 5$ حسب البند (1)، عندئذ $\sum_{j}^{j+4} s_j \geq 11$.

b - إذا كان $\sum_{j}^{j+3} s_j = 9$ فإنه لدينا الحالات الممكنة حسب التمهيدية (6)

$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}) = (1,3,3,2), (1,3,4,1)(1,4,2,2), (1,4,3,1), (2,2,3,2), (2,2,4,1), , (2,3,2,2) or\ (2,3,3,1)$ وفي جميع

هذه الحالات يكون $s_{j+4} \geq 2$ أو $s_{j-1} \geq 2$ وبالتالي نجد $\sum_{j}^{j+4} s_j \geq 11$.

6 - بما أن $\sum_{j}^{j+1} s_j \geq 4$ فإن $\sum_{j+4}^{j+5} s_j \geq 4$ عندئذ :

a إذا كان $\sum_{j+4}^{j+5} s_j = 4$ فإنه لدينا الحالات الممكنة حسب تمهيدية (6) فإنه لدينا الحالات

$(s_j, s_{j+1}) = (1,3), (3,1)\ or\ (2,2)$ وهذه الحالات لا تتوافق مع $\sum_{j}^{j+3} s_j = 9$ ومنه يجب أن يكون $\sum_{j}^{j+3} s_j \geq 10$

وبالتالي $\sum_{j}^{j+5} s_j \geq 14$.

b إذا كان $\sum_{j+4}^{j+5} s_j \geq 5$ نجد : $\sum_{j}^{j+5} s_j = \sum_{j}^{j+3} s_j + \sum_{j+4}^{j+5} s_j \geq 9 + 5 = 14$

~~8~~ 7 : لدينا من الخطوة (4) في التمهيدية (7) أن $\sum_{j}^{j+4} s_j \geq 11$ عندئذ:

a- إذا كان $\sum_{j}^{j+4} s_j \geq 12$ يتم المطلوب .

b- إذا كان $\sum_{j}^{j+4} s_j = 11$ عندئذ لدينا الحالات الممكنة :

$$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}) = (1,3,3,2,2), (2,2,3,3,1), (1,3,3,3,1)\ or\ (1,4,1,4,1)$$

عندها للتوافق مع هذه الحالات يجب أن يكون $s_{j-1} \geq 4$ أو $s_{j+5} \geq 4$ وبهذا فإذا كان $s_j \geq 3$ فإن $\sum_{j}^{j+5} s_j \geq 15$ وإذا كان $s_j \geq 4$ فان $\sum_{j}^{j+5} s_j \geq 16$.

تمهيدية (8):

إذا كان $\sum_{j}^{j+5} s_j = 14$ فإن $\sum_{j+6}^{j+11} s_j \geq 16$ أو $\sum_{j-6}^{j-1} s_j \geq 16$.

البرهان:

لتكن لدينا السلسلة $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}, s_{j+5})$ التي تحقق $\sum_{j}^{j+5} s_j = 14$ في متتالية من الحالات نوضحها كالأتي :

a- عندما $s_j=1$ نحصل على الحالات الآتية:

$$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}, s_{j+5}) = (1,3,3,2,2,3), (1,3,3,2,3,2), (1,3,3,2,4,1), (1,3,3,3,2,2), \\ , (1,3,4,1,4,1), (1,3,3,1,5,1)\ or\ (1,3,3,3,3,1)$$

نلاحظ أن $s_j=1$ و $s_{j+1}=3$ عندها يكون $s_{j-1}=5$ حيث $(4,1,3)$ حالة غير ممكنه بحسب التمهيدية (6)فيكون حسب الخطوة (8) من التمهيدية (7) أن $\sum_{j-1}^{j-6} s_j \geq 16$.

b- في الحالات الآتية:

$$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}, s_{j+5}) = (1,4,2,2,3,2), (1,4,2,3,2,2), (1,4,1,4,2,2)\ or\ (1,4,2,2,4,1)$$

نلاحظ أن $s_j=1$ و $s_{j+1}=4$ عندها يكون $s_{j-1}=4$ حيث $(4,1,3)$ حالة غير ممكنه من التمهيدية (6) فيكون حسب الخطوة (8) من تمهيدية (7) $\sum_{j-6}^{j-1} s_j \geq 16$.

c- إن الحالات الآتية تماثل في دراستها الحالات الموجودة في الخطوة (a)حيث:

$$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}, s_{j+5}) = (3,2,2,3,3,1), (2,3,2,3,3,1), (1,4,2,3,3,1), (2,2,3,3,3,1), \\ , (1,4,1,4,3,1)\ or\ (1,5,1,3,3,1)$$

نلاحظ أن $s_{j+5}=1$ و $s_{j+4}=3$ عندها يكون $s_{j+6}=5$ حيث $(3,1,4)$ حالة غير ممكنه من التمهيدية (6) فيكون حسب الخطوة (8) من تمهيدية (7) يكون $\sum_{j+6}^{j+11} s_j \geq 16$.

d- وكذلك الحالات

الآتية: $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}, s_{j+5}) = (2,3,2,2,4,1), (2,2,3,2,4,1) or (2,2,4,1,4,1)$

نلاحظ أن $s_{j+5}=1$ و $s_{j+4}=4$ عندها يكون $s_{j+6}=4$ حيث $(4,1,3)$ حالة غير ممكنه من التمهيدية (6) و حسب الخطوة (8) من التمهيدية (7) $\sum_{j+6}^{j+11} s_j \geq 16$.

e- من أجل $s_j=2$ و $s_{j+5}=2$ يكون لدينا الحالات:

$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, s_{j+3}, s_{j+4}, s_{j+5}) = (2,2,3,2,3,2), (2,3,2,2,3,2), (2,3,2,3,2,2) or (2,2,3,3,2,2)$ حيث انه برسم جميع الحالات والتوافقات معها بالتالي يجب أن يكون $s_{j-1} \geq 4$ أو $s_{j+6} \geq 4$ وبهذا يكون إما $\sum_{j+6}^{j+11} s_j \geq 16$ أو $\sum_{j-6}^{j-1} s_j \geq 16$.

نتيجة (3): من التمهيدية (8) نستنتج أنه إذا كان $\sum_{j}^{j+5} s_j = 14$ فان:

a- $s_j=1$ و $s_{j+5}=1$

b- $s_j=1$ و $s_{j+5}=2$

c- $s_j=2$ و $s_{j+5}=1$

d- $s_j=2$ و $s_{j+5}=2$

مبرهنة (9):

لأجل كل $n \geq 6$ فإن $\gamma_2(p_6 \times p_n) \geq \left\lceil \frac{15n}{6} \right\rceil = 2n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

البرهان: ينتج مباشرة من التمهيدية (8) التي تم الاعتماد فيها على الجانب التجريبي والأبحاث السابقة.

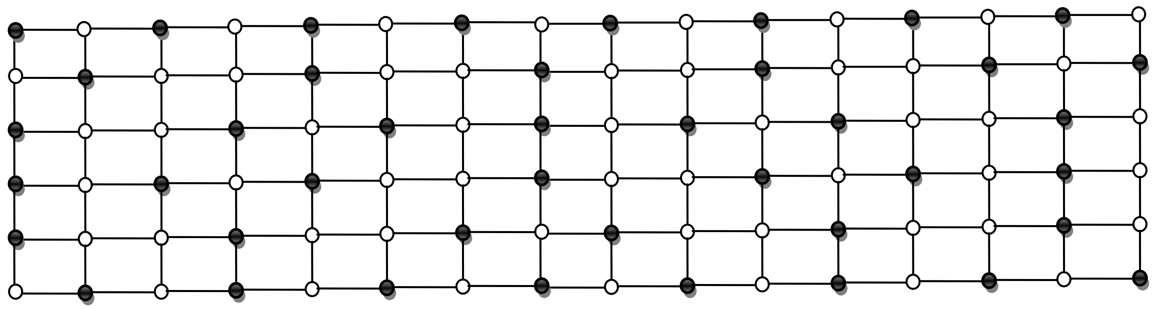
مبرهنة (10):

لأجل كل $n \geq 6$ فان:

$$\gamma_2(p_6 \times p_n) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil & ; n \equiv 1,8 (\text{mod} 14) \\ \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil + 1 & ; n \equiv 0,2,4,5,6,7,9,11,12,13 (\text{mod} 14) \\ \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil + 2 & ; n \equiv 3,10 (\text{mod} 14) \end{cases}$$

البرهان: لتكن D معرفه بالشكل الآتي:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \{ (1, j) ; j \equiv 1,3,5,7,9,11,13 \ (\text{mod} 14) \} \cup \{(2, j) : j \equiv 0,2,5,8,11 \ (\text{mod} 14) \} \\ \cup \{(3, j) : j \equiv 1,4,6,8,10,12 \ (\text{mod} 14) \} \cup \{(4, j) : j \equiv 1,3,5,8,11,13 \ (\text{mod} 14) \} \\ \cup \{(5, j) : j \equiv 1,4,7,9,12 \ (\text{mod} 14) \} \cup \{(6, j) : j \equiv 0,2,4,6,8,10,12, \ (\text{mod} 14) \} \end{array} \right\}$$



الشكل (5) يمثل الجداء الديكارتي للمسارين $P_6 \times P_{16}$

نلاحظ أن المجموعات الآتية هي 2 – مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للمسارين P_n , P_6

$$\{D-(4,n)\}\cup\{(3,n),(5,n)\} \quad : \quad n \equiv 13 \pmod{14},$$
$$D\cup\{(2,n)\} \quad : \quad n \equiv 4,12 \pmod{14},$$
$$D \quad : \quad n \equiv 1,8 \pmod{14},$$
$$D\cup\{(5,n)\} \quad : \quad n \equiv 5,11 \pmod{14},$$
$$D\cup\{(4,n)\} \quad : \quad n \equiv 0,2 \pmod{14},$$
$$D\cup\{(2,n),(5,n)\} \quad : n \equiv 3,10 \pmod{14}$$
$$D\cup\{(3,n)\} \quad : \quad n \equiv 7,9 \pmod{14},$$
$$\{D-(3,n)\}\cup\{(2,n),(4,n)\} \quad : \quad n \equiv 6 \pmod{14}.$$

ومنه نجد:

$$\gamma_2(p_6 \times p_n) \le \begin{cases} \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil & ; n \equiv 1,8 \pmod{14} \\ \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil + 1 & ; n \equiv 0,2,4,5,6,7,9,11,12,13 \pmod{14} \\ \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil + 2 & ; n \equiv 3,10 \pmod{14} \end{cases}$$

نتيجة(4): لأجل كل $n \ge 6$ فإن:

$$\left\lceil \frac{15n}{6} \right\rceil = 2n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \le \gamma_2(p_6 \times p_n) \le \begin{cases} \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil & ; n \equiv 1,8 \pmod{14} \\ \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil + 1 & ; n \equiv 0,2,4,5,6,7,9,11,12,13 \pmod{14} \\ \left\lceil \frac{18n}{7} \right\rceil + 2 & ; n \equiv 3,10 \pmod{14} \end{cases}$$

البرهان: البرهان ينتج من المبرهنة (9) والمبرهنة (10).

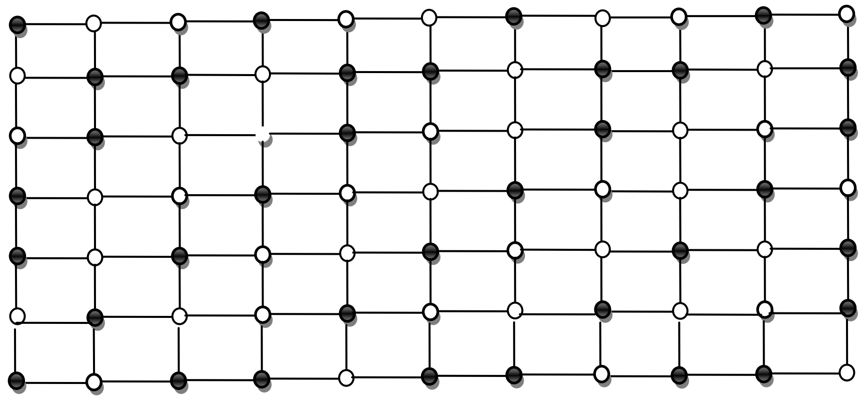
مبرهنة (11):

لأجل كل $n \ge 7$ فإن: $\gamma_2(p_7 \times p_n) \le 3n + 2$

البرهان:

لتكن D معرفه بالشكل الآتي:

$$D=\begin{cases}\{\,(1,1),(4,1),(5,1),(7,1)\}\cup\{(2,j),(5,j),(7,j):\ j\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)\ \} \\ \cup\{(1,j),(4,j),(7,j):\ j\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)\ \}\cup\{(2,j),(3,j),(6,j):\ j\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)\ \}\end{cases}$$



الشكل (6) يمثل الجداء الديكارتي للمسارين $P_7\times P_{11}$

نلاحظ أن المجموعات الآتية هي $2-$ مجموعة سيطرة للجداء الديكارتي للمسارين P_n, P_7

$$\{D-(2,n)\}\cup\{\,(1,n),(3,n)\}\quad :\quad n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3),$$
$$D\cup\{(5,n)\}\quad :\quad n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3),$$
$$\{D-(7,n)\}\cup\{(6,n),(3,n)\}\quad :\quad n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3).$$

ومنه نجد: $\gamma_2(p_7\times p_n)\le 3n+2$

تمهيدية (9):

ليكن لدينا ($s_j, s_{j+1}, s_{j+3}, \ldots, s_n$) هي $2-$ سلسلة السيطرة للجداء $P_7\times P_n$ عندئذ الحالات الآتية غير ممكنة:

1 - $(s_j, s_{j+1})=(1,1),(1,2)\,or\,(1,3)$

2 - $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2})=(2,2,2),(1,4,1),(1,4,2)\,or\,(4,1,5)$

البرهان: ينتج بالرسم مباشرة.

تمهيدية (10):

1 - $1\le s_j\le 6$

2 - $\sum_{j}^{j+1} s_j\ge 4$

3 - $\sum_{j}^{j+2} s_j\ge 7$

البرهان:

1 من تمهيدية (2) لدينا $\left\lfloor\frac{m}{4}\right\rfloor\le s_j\le\left\lceil\frac{3m}{4}\right\rceil$ عندئذ $1\le s_j\le 6$.

2 لدينا من التمهيدية (9) أن الحالتين $(s_j, s_{j+1}) = \{(1,1),(1,2)\}$ غير ممكنتين ومنه نجد : $\sum_j^{j+1} s_j \ge 4$.

3 لدينا من الخطوة (2) من التمهيدية (10) أن $\sum_j^{j+1} s_j \ge 4$ عندئذ:

- إذا كان $\sum_j^{j+1} s_j = 4$ فإنه لدينا الحالة $(s_j, s_{j+1}) = \{(2,2)\}$ والتوافق مع هذه الحالات وحسب تمهيدية (9) يكون $s_{j+2} \ge 3$ عندئذ $\sum_j^{j+2} s_j \ge 7$.
- إذا كان $\sum_j^{j+1} s_j \ge 5$ فإنه لدينا الحالات $(s_j, s_{j+1}) = \{(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}$ يكون $s_{j+2} \ge 2$ عندئذ $\sum_j^{j+2} s_j \ge 7$.

تمهيدية (11):

إذا كان $\sum_j^{j+2} s_j = 7$ فان $\sum_{j+3}^{j+5} s_j \ge 9$ أو $\sum_{j-3}^{j-1} s_j \ge 9$.

البرهان:

لتكن لدينا السلسلة (s_j,s_{j+1},s_{j+2}) التي تمثل $\sum_j^{j+2} s_j = 7$:

1 عندما $s_j=1$ كما في الحالة الآتية:

$(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) = \{(1, 5, 1)\}$

نلاحظ أن $s_j=1$ و $s_{j+1}=5$ عندها يكون $s_{j-1}=5$ حيث $(4,1,5)$ حالة غير ممكنه من التمهيدية (9) ونعلم أن $\sum_j^{j+1} s_j \ge 4$ حسب الخطوة (2) من التمهيدية (10) يكون $\sum_{j-3}^{j-1} s_j \ge 9$.

2 عندما $s_j=2$ كما في الحالة الآتية: $(s_j, s_{j+1}, s_{j+2}) = \{(2, 3, 2)\}$

نلاحظ أنه بالرسم المناسب لهذه الحالة نجد أن $s_{j+3} \ge 4$.

وإذا كان $s_{j+4}=1$ فان $s_{j+5} \ge 5$ أي أن $\sum_{j+3}^{j+5} s_j \ge 9$.

وإذا كان $s_{j+4} \ge 2$ فان $s_{j+5} \ge 3$ أي أن $\sum_{j+3}^{j+5} s_j \ge 9$.

مبرهنة (12): لأجل كل $n \ge 7$ فإن $\gamma_2(p_7 \times p_n) \ge \frac{8n}{3}$

البرهان: ينتج مباشرة من التمهيدية (11).

نتيجة(5): لأجل كل $n \ge 7$ فإن: $\frac{8n}{3} \le \gamma_2(p_7 \times p_n) \le 3n+2.$.

البرهان: ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة (11) والمبرهنة (12).

الاستنتاجات والتوصيات :

لقد تم التوصل إلى إيجاد حد أدنى وحد أعلى لعدد السيطرة من المرتبة 2 لـ $P_m \times P_n$ من أجل $m = 6,7$ و n عدد كيفي. كما ونوصي كأهداف مستقبلية بالمتابعة من أجل $m = 8,9,...$ و n عدد كيفي وكذلك إيجاد الحالة العامة وكتابة بعض الخوارزميات التي تعالج مشكلة 2− مجموعة السيطرة على بعض البيانات في حالات خاصة .

المراجع:

[1] COCKAYNE,E. J; GAMBLE,B; SHEPHERD,B. *An upper bound for the k-domination Number of a graph*. J. Graph Theory 9(1985), 533-534.

[2] HANSBERG, A; VOLKMANN, L. *Upper bounds on the k-domination number and the k-Roman domination number*. Discrete Appl. Math. 157 (2009), 1634-1639.

[3]BLIDIAA,M; CHELLALIA,M; VOLKMANNB,L. *Some bounds on the p-domination number in trees*. Discrete Mathematics, 306 (2006), 2031 – 2037.

[4] VOLKMANN, L.*A bound on the k- domination number of a graph*. Czechoslovak Math. J. 60(1) (2010),77-83.

[5] FAVARON, O; HANSBERG,A; VOLKMANN, L. *On k- domination and minimum degree in graphs*. J. Graph Theory 57(2008),33-40.

[6] SHAHEEN, R. On *the 2-domination number of Cartesian product of two Cycles*. Advances and applications in discrete mathematics, 12, No1(2013), 83-108.

[7] SHAHEEN, R. *Bounds for the 2-domination number of toroidalgrid graphs*. International Journal of Computer Mathematics, 86, No 4 (2009), 584-588.

[8] SHAHEEN.R;MAHFUD.S;ALMANEA.K. *Erratum to "Restrained 2-Domination number of complete grid graphs"[IJAMC. 4(4) 2012 352–358]*.submitted to International Journal of Applied Mathematics and Computation,ID:703,1-2-2016.