مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (1) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (1) 2017

# دراسة تأثير كمون تفاعل ثلاثة أجسام في متكثف بوز اينشتاين

**د. محمود احمد***

**علي ملحم****

**(تاريخ الإيداع 13 / 6 / 2016. قُبِل للنشر في 30 / 1 /2017)**

## □ ملخّص □

تم في هذا البحث استنتاج معادلة غروس –بيتاإيفسكي أخذين بالحسبان كمون تفاعل ثنائي وثلاثي الأجسام معا، ومقارنة النتائج مع الحالة التي نكتفي بها بكمون تفاعل ثنائي الأجسام فقط. ومن ثم قمنا بحساب تواترات الاثارة الأولية لمتكثف بوز اينشتاين بوجود كمون تفاعل ثلاثة أجسام.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة غروس بيتاإيفسكي– تكاثف بوز اينشتاين–الاثارات الأولية لمتكثف بوز اينشتاين.

*أستاذ مساعد – قسم الفيزياء– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية

**طالب دراسات عليا (ماجستير)–اختصاص فيزياء نظرية–قسم الفيزياء– كلية العلوم–جامعة تشرين– اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (1) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (1) 2017

# Study the effect ofthree-body interaction in Bose Einstein condensation

**Dr. Mahmoud Ahmed***
**Ali Mulhem****

**(Received 13 / 6 / 2016. Accepted 30 / 1 /2017)**

## □ ABSTRACT □

In this researchthe Gross - Pitaevskii equationhas been concluded taking in to consideration tow and three body interaction potential. The results were compared to thesta-te in which the twobody interaction has been accepted. Thenelementary excitementfrequencies have been calculated of Bose Einstein condensation in the presence of threebody interaction.

**Kay Words:** Gross -Pitaevskii equation - Bose EinsteinCondensation - Elementary excitations of Bose Einstein Condensation.

***Associate Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**
**** Postgraduate Student, theoretical Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**

## مقدمة:

عمم اينشتاين إحصاء بوز على الفوتونات (ذات سبين صفر) ليشمل الذرات ذات السبين الصحيح .وكانأول من تنبأ بأنه عندما تبرد الذرات إلى ما دون درجة حرارة حرجة معينة فأنها تشغل جميعها السوية الأدنى طاقة، ودعيت هذه الظاهرة فيما بعد "بتكاثف بوز اينشتاين". ومع ظهور تقانة التبريد الليزري أواخر الثمانينيات والتي حاز مكتشفوها(شو&كوين تانوجي&فيليبس (Phillips& Chu & Cohen-Tannoudji))على جائزة نوبل للفيزياء [1] عام 1997. تم التوصل إلى ظاهرة متكثف بوز – اينشتاين عام 1995 . هذه الظاهرة التي بقيت عصية عن التحقيق التجريبي لها طيلة سبعين عام ، وحازت المجموعة (مجموعة JILA والمؤلفة من:إريك كورنيل E.Cornellوكارل ويمان C.Wiemen وولفغانغ كتيريل W.Ketterel ) التي تمكنت من تحقيق متكثف بوز اينشتاين تجريبيا جائزة نوبل للفيزياء عام 2001 .

توصف جملة البوزونات المتكثفة بواسطة معادلة [2,3]غروس- بيتاإيفسكي(EquationGross-Pitaevskii)والتي تأخذ بالحسبان الطاقة الحركية للذرات وكمون الحصر المطبق عليها والتفاعلات فيما بينها والناتجة عن عملية تصادم ذرة– ذرة، حيث سنعيد استنتاج هذه المعادلة اخذين بالحسبان كمون تفاعل ثلاثة أجسام (تفاعل ثلاثة ذرات فيما بينها)

## أهمية البحث وأهدافه:

استنتاج معادلة غروس-بيتاإيفسكي اخذين كمون تفاعل ثلاثة ذرات بالاعتبار.1-

2-حل هذه المعادلة وفق طريقة التغاير-نظرية الاضطراب، ومن ثم ابراز أهمية اخذ كمون تفاعل ثلاثة ذرات بالاعتبار ومن ثم مقارنة النتائج التي نحصل عليها (اخذين كمون تفاعل ثنائي وثلاثي الأجسام بالاعتبار) مع النتائج التي يكتفى فيها بكمون تفاعل ثنائي الأجسام.

3-استنتاج تواترات الإثارة الأولية لتكاثف بوز اينشتاين بوجود كمون تفاعل ثلاثة.

## طرائق البحث ومواردە.

**-معادلة غروس-بيتاإيفسكي.**

قدمت هذه المعادلة لأول مرة من قبل [2-5] يوجينغروس (Eugene.P.Gross)وليف بيتاإيفسكي(Lev.P.Piteavskii)، واستخدمت لدراسة التفاعلات للجمل البوزونية المتفاعلة بتفاعلات ضعيفة عند درجات الحرارة منخفضة، والتي تشغل جميعها السوية الأدنى طاقة، ويتطلب تطبيق هذا النموذج أن يكون طول موجة التبعثر صغير بالمقارنة مع متوسط المسافة ما بين الذرات،علما أن تكاثف بوز-اينشتاينيتم الحصول عليه عندما تكون المسافة ما بين الذرات صغيرة بالمقارنة مع طول موجة دوبروي الحراري [6] . وتقبل هذه المعادلة التطبيق من أجل عدد كبير من البوزونات عند درجات الحرارة المنخفضة حيث يمكن معالجة البوزونات كجسيمات متفاعلة فيما بينها عن طريق عمليات التبعثر ويكتب التابع الموجي للتكاثف بشكل جداءتابع بوزون واحد بعدد هذه البوزونات $N_0$ .يمكن وصف جملة من البوزونات عند درجات الحرارة المنخفضة والخاضعة لتفاعلات ضعيفة بواسطة الهملتوني [5,7].

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\hat{P}^2}{2m}+\hat{V}(r)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}U_2(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)+\frac{1}{3}\sum_{i}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{k\neq i,j}^{N}U_3(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k). \quad (1)$$

حيث الحد الأول فيه: $(\hat{P}^2/2m=-\hbar^2\nabla^2/2m)$ تمثل الطاقة الحركية للذرة، بينما $V(r)$ تمثل الطاقة الكامنة للمصيدة الحاصرة للذرات وتكون عادة عبارة عن الطاقة الكامنة لهزاز توافقي [5,8] ويعطى بالعلاقة.

$$V=\frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2). \quad (2)$$

يمثل الحد الثاني:طاقة تفاعل ثنائي–الأجسام ويعبر هنا عن كمون تفاعل ذرتين بوزونيتين [3,5,7,8] ويعطى بالعلاقة.

$$U_2(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)=g_2\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)=\frac{4\pi\hbar^2a_s}{m}\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j). \quad (3)$$

تمثل $m$: هنا كتلة الذرة .و $a_s$ طول موجة التبعثر، بينما يمثل $\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)$ تابع دلتا لديراك، وضرب هذا الكمون بالمعامل $(1/2)$ كي لا نأخذ كمون التفاعل للذرة الواحدة مرتين، و $\hbar$ : ثابتة بلانك. فيما يمثل الحد الأخير في المعادلة $(1)$ كمون تفاعل ثلاثة –أجسام ويعبر هنا عن تفاعل ثلاثة ذرات من النوع البوزوني حيث يمكن اعتبار هذا الكمون ناشئ عن كمون تفاعل ثنائي الأجسام [7]والذي يكتب بالشكل:

$$U_3(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)=g_3\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\delta(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_k). \quad (4)$$

حيث إن المعامل $g_3$ يعطى بالعلاقة[7].

$$g_3=39\pi(4\pi-2\sqrt{3})\frac{\hbar^2a_s^4}{m}. \quad (5)$$

حيث ضرب $g_3$ بالمعامل $(1/3)$ لكي لا نأخذ كمون التفاعل للذرة الواحدة ثلاث مرات،ويجب الإشارة إلى أنه إذا كان $a_s$ موجب فالتفاعلات الحاصلة بين الذرات هي تفاعلات تنافريه وإذا كان سالب فهي تجاذبيه [5,7,9].

يفترض بنا في التكميم الأول متابعة كل جسيم على حده، ولذلك كان من عدم المفيد إبقاء الهملتوني $(1)$ في صيغته السابقة،وكان من المفيد والعملي أيضا نقله إلى صيغة التكميم الثاني [7,9,10,11]، حيث يعبر عن الملحوظات الفيزيائية (مثل الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة للمصيدة الحاصرة للذراتوكمونات التفاعل بين الذرات) وفق التكميم الثاني بالاعتماد على مؤثرات الحقل. عموما يصاغ مؤثر الحقل بالشكل $\hat{\psi}(\boldsymbol{r})=\sum_i\psi_i(\boldsymbol{r})\hat{a}_i$، حيث $\psi_i(\boldsymbol{r})$ الدالة الموجية للجسيم الواحد و $\hat{a}_i$ مؤثر الخفض (الهدم)،و يدعى $\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ اختصارا بمؤثر الهدم،اما الجمععلى $(i)$ تم أخذه ليشمل جميع الحالات التي تشغلها الجسيمات ،وبالنسبة لمؤثر الرفع (البناء) في نظرية الحقل الكمومية الخاصه بالبوزونات فيصاغ بالشكل $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})=\sum_i\psi_i^*(\boldsymbol{r})\hat{a}_i^\dagger$ حيث $\hat{a}_i^\dagger$ مؤثر الرفع[4]، وتعرف مؤثرات الحقل عن طريق مؤثري الخفض $\hat{a}_i$ والرفع $\hat{a}_i^\dagger$ واللذان يعرفان في فراغ فوك (Fock space) من خلال العلاقتين:

$$\hat{a}_i|n_1,n_2,\ldots,n_i,\ldots\rangle=\sqrt{n_i}|n_1,n_2,\ldots,n_i-1,\ldots\rangle.$$

$$\hat{a}_i^\dagger|n_1,n_2,\ldots,n_i,\ldots\rangle=\sqrt{n_i+1}|n_1,n_2,\ldots,n_i+1,\ldots\rangle.$$

حيث يؤدي مؤثر الخفض $\hat{a}_i$ الى خفض عدد الجسيماتالتي تشغل الحالة $(i)$ بمقدار جسيم واحد عندما يؤثر لمرة واحدة فقط، ومؤثر الرفع $\hat{a}_i^\dagger$ يؤدي إلى زيادة عدد الجسيمات التي تشغل الحالة $(i)$ بمقدار جسيم واحد ولذلك فان نتيجة تأثير مؤثري الحقل $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\&\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ هي نفسها نتيجة تأثير المؤثرين $\hat{a}_i^\dagger\&\hat{a}_i$.وبما أن عدد الجسيمات (الذرات) في الجملة المدروسة كبير جدا لذلك يعاد صياغة الهملتوني في العلاقة $(1)$ وفق التكميم الثاني بالشكل[7]:

$$\hat{H}=\int d\boldsymbol{r}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r},t)H_0(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)+\frac{g_2}{2}\int d\boldsymbol{r}_i\int d\boldsymbol{r}_j\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}_i,t)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}_j,t)\delta(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}_j,t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}_i,t)$$

$$+\frac{g_3}{3}\int dr_i\int dr_j\int dr_k\hat{\psi}^{\dagger}(r_i,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r_j,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r_k,t)\delta(r_j-r_k)\delta(r_i-r_j)\hat{\psi}(r_k,t)\hat{\psi}(r_j,t)\hat{\psi}(r_i,t). \quad (6)$$

حيث$\left[H_0(r)=\frac{p^2}{2m}+V(r)\right]$. وتم اعتماد تمثيل هاينزبرغ مؤثرات الحقل [4]في العلاقة السابقة. بسبب وجود

تابع دلتالديراك في العلاقة السابقة وبالاستفادة من خواصه يمكن مكاملة الحد الثاني عند $(r_i=r_j=r)$، والحد الثالث أيضا يكامل مرتين عندما$(r_j=r_k)$ومن ثم عندما$(r_i=r_j=r)$لنحصل على.

$$\hat{H}=\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)+\frac{g_2}{2}\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\,\psi(r,t)\hat{\psi}(r,t)$$
$$+\frac{g_3}{3}\int dr.\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t). \quad (7)$$

بالانتقال من صيغة شرودينغر إلى صيغة هاينزبرغ نجد[9,10] .

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}(r',t)}{\partial t}=[\hat{\psi}(r',t),\hat{H}]$$
$$=\int dr\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)+\frac{g_2}{2}\int dr\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\,\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)$$
$$+\frac{g_3}{3}\int dr\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)$$
$$-\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r',t)-\frac{g_2}{2}\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\,\psi(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r',t)$$
$$-\frac{g_3}{3}\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r',t). \quad (8)$$

بالاستفادة من علاقات التبادل بين مؤثرات الخفض والرفع (الهدم والبناء) والمعرفة بالعلاقات [9,10] .

$$\left\{\left[\hat{\psi}(r',t),\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\right]=\delta(r'-r)\&[\hat{\psi}(r,t),\hat{\psi}(r,t)]=\left[\hat{\psi}^{\dagger}(r,t),\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\right]=0\right\}$$

نعيد كتابة الحد الأول والرابع من المعادلة(8)والمتعلقين بالطاقة الحركية وكمون الحصر بالشكل التالي:

$$\mathrm{I}=\int dr\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)-\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r',t)$$
$$=\int dr.\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)-\int dr.\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}(r',t)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)$$
$$=\int dr\left[\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)-\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}(r',t)\right]H_0(r)\hat{\psi}(r,t)$$
$$=\int dr\left[\hat{\psi}(r',t),\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\right]H_0(r)\hat{\psi}(r,t)=\int dr\,\delta(r'-r)H_0(r)\hat{\psi}(r,t)=H_0(r')\hat{\psi}(r',t).$$

أما الحدين الثاني والخامس من المعادلة (8) والمتعلقين بكمون تفاعل ثنائي الأجسام نعيد كتابتهما بالاستفادة من علاقات التبادل بالشكل التالي:

$$\mathrm{II}=\int dr\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\,\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)-\int dr\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\,\psi(r,t)\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r',t)$$
$$=\int dr\left[\hat{\psi}(r',t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)-\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}^{\dagger}(r,t)\hat{\psi}(r',t)\right]\hat{\psi}(r,t)\hat{\psi}(r,t)$$

$$= \int d\boldsymbol{r}\left\{\left[\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})+\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\right]\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t) - \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)-\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\right]\right\}\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

$$= 2\int d\boldsymbol{r}\,\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t) = 2\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)$$

أما بالنسبة إلى الحدين الثالث والسادس من المعادلة (8)والمتعلقين بكمون تفاعل ثلاثة اجسام نجد.

$$\mathrm{III} = \int d\boldsymbol{r}\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t) - \int d\boldsymbol{r}\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)$$

$$= \int d\boldsymbol{r}\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t) - \hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\right]\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

$$= \int d\boldsymbol{r}\left\{\left[\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})+\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\right]\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t) - \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)-\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\right]\right\}\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

$$= \int d\boldsymbol{r}\left\{2\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t) + \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t) - \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\right\}\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

$$= \int d\boldsymbol{r}\left\{2\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t) + \hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\left[\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})+\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\right]\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t) - \hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\right\}\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

$$= 3\int d\boldsymbol{r}\,\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)$$

$$= 3\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)$$

بتعويض$(\mathrm{I}\ \&\ \mathrm{II}\ \&\ \mathrm{III})$في المعادلة (8) واسقاط$((\,'\,))$نجد.

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})+g_2\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)+g_3\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^{+}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\right]\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t). \quad (9)$$

مع انخفاض درجة الحرارة لتصل إلى درجة حرارة حرجة معينة تبدأ الذرات عندها عملية شغل السوية الأدنى طاقة(الأرضية)أي تبدأ حالة تكاثف بوز اينشتاين بالظهور والتي تعرف بكونها احتلال عياني (جهري) للسوية الأرضية. وعندئذ يقسم مؤثر الحقل إلى شقين حيث يشير الشق الأول فيه إلى الذرات التي تشغل الحالة الأرضية ويشير الشق الثاني إلى الذرات في الحالات المثارة وذلك وفق العلاقة:

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t) = \psi_0\,(\boldsymbol{r},t)\hat{a}_0 + \sum_i \psi_i\,(\boldsymbol{r},t)\hat{a}_i = \psi(\boldsymbol{r},t)+\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t). \qquad (10)$$

وكلما انخفضت درجة الحرارة أكثر فأكثر ومع ازدياد الاقتراب من درجة حرارة الصفر المطلق يزداد وبشكل كبير عدد الذرات التي تشغل حالة تكاثف بوز اينشتاين$1 \gg N_0$حيث$N_0$ عدد الذرات التي تشغل الحالة الأرضية، نتيجة لذلك فان المؤثرات $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_0^{\dagger}$تعالج كثوابت عددية أي$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{\dagger} = \sqrt{N_0}$، وذلك لأن إضافة أو نزع أي ذرة من حالة تكاثف بوز اينشتاين $N_0 \approx N_0 \pm 1$والناتج عن تأثير هذه المؤثرات لا يضفي أي تأثير على الخواص الفيزيائية لتكاثف بوز اينشتاين عند دراستها، وعمليا تكون معظم الذرات قد شغلت الحالة الأرضية (حالة تكاثف بوز اينشتاين). ونتيجة لذلك يمكن إهمال الشق الثاني $\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ في العلاقة ( 10) والذي يمثل القيمة الاضطرابية لمؤثر الحقل، وأخذ الشق الأول الذي يمثل القيمة المتوسطة لمؤثر الحقل ويدعى بالدالة الموجية للمتكثف $[\psi(\boldsymbol{r},t) = \langle\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t)\rangle]$وهذه الدالة عقدية تستنظم لتعطي عدد الذرات المتكثفة تكاثف بوز اينشتاين وذلك وفق العلاقة التالية:

$$n(\boldsymbol{r},t) = |\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 = \psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t) \& \int d\boldsymbol{r}.\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t) = N \equiv N_0 (11)$$

تدعى المعالجة السابقة لمؤثرات الحقل بنظرية الحقل المتوسط للغازات الذرية المخففة [4] والتي صيغت من قبل بكالوبوف (Bogoliubov) عام1947.وعند أخذ هذه المعالجة بالحسبان وتعويضها في المعادلة (9) نحصل على.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) + g_2|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2 + g_3|\psi(\boldsymbol{r},t)|^4\right]\psi(\boldsymbol{r},t). \qquad (12)$$

تدعى هذه المعادلة بمعادلة غروس–بيتاإيفسكي $GPE$ . التي صاغها وبشكل منفصل [4] كل من غروس (1961–1963) وبيتاإيفسكي ( 1961) وتستخدم لدراسة تكاثف بوز اينشتاين.وتصلح فقط للجمل البوزونية عند درجات الحرارة المنخفضة وعندما يكون طول موجة التبعثر صغير جدا بالمقارنة مع متوسط المسافة بين الذرات[4].

## النتائج والمناقشة:

**–حل معادلة غروس–بيتاإيفسكي اعتمادا على مبدأ التغاير لإيجاد طاقة السوية الأرضية والكمون الكيمائي:**

اعتمادا على المرجع [5,8] يعطى حل للمعادلة السابقة (12)بالصيغة.

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})e^{-i\mu t/\hbar}. \qquad (13)$$

حيث$\mu$ الكمون الكيمائي ويعرف بأنه الطاقة اللازمة لإضافة أوإزالة ذرة واحدة من تكاثف بوز – اينشتاين.

و $\psi(\boldsymbol{r})$ دالة حقيقية تستنظم لتعطي عدد الذرات المتكثفة تكاثف بوز اينشتاين، وبتعويض المعادلة (13) في معادلة غروس–بيتاإيفسكي(12)نجد.

$$\mu\psi(\boldsymbol{r}) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) + g_2|\psi(\boldsymbol{r})|^2 + g_3|\psi(\boldsymbol{r})|^4\right]\psi(\boldsymbol{r}). \qquad (14)$$

وبالتالي فان طاقة السوية الأرضية لجملة متكثف بوز اينشتاين هي.

$$E(N) = \int \psi^*(\boldsymbol{r})\mu\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \int d\boldsymbol{r}\left[\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi(\boldsymbol{r})|^2 + V(\boldsymbol{r})|\psi(\boldsymbol{r})|^2 + \frac{g_2}{2}|\psi(\boldsymbol{r})|^4 + \frac{g_3}{3}|\psi(\boldsymbol{r})|^6\right]. \quad (15)$$

عند غياب التفاعلات بين الذرات $g_2 = g_3 = 0$ تأخذ معادلة غروس–بيتاإيفسكي الشكل الرياضي لمعادلة الهزاز التوافقي، حيث يعطى حل معادلة شرودينغر للهزاز التوافقي وفي حالة السوية الأرضية بالدالة الموجية التالية [5]

.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(a_x a_y a_z)^{1/2}} e^{-x^2/2a_x^2}.e^{-y^2/2a_y^2}.e^{z^2/2a_z^2}. \qquad (16)$$

حيث $(a_i^2 = \hbar/m\omega_i \ ; i = x,y,z)$.

يحصل تكاثف بوز اينشتاين عندما تشغل مجموعة من الذرات الحالة الأرضية (أي حالة تكاثف بوز اينشتاين).ولذلك يمكن صياغة الدالة الموجية لتكاثف بوز اينشتاين من خلال جداء الدالة الموجية لذرة واحدة تشغل الحالة الأرضية بعدد هذه الذرات. وطبقا لمبدأ التغاير يمكن أخذ دالة موجية تكون حلا لمعادلة غروس–بيتاإيفسكي لها نفس صيغة المعادلة السابقة (وذلك لكون معادلة شرودينغر للهزاز التوافقي المعروفة الحل هي الأقرب لمعادلة غروس–بيتاإيفسكي من اجل كمن الحصر التوافقي وعند الحد $g_2 = g_3 = 0$) وذلك بعد ضربها بعدد ذرات المتكثفة وإضافة بارامتر تغاير

يجعل قيمة طاقة السوية الأرضية التي نحصل عليها أقل ما يمكن، ووفقا للمرجع [5]تعطى هذه الدالة بالعلاقة.

$$\psi(r) = \frac{(N)^{1/2}}{\pi^{3/4}\left(b_x b_y b_z\right)^{1/2}} e^{-x^2/2b_x^2} . e^{-y^2/2b_y^2} . e^{z^2/2b_z^2} . \qquad (17)$$

حيث ندعو $b_i ; i = x, y, z$ بارامتر التغاير . بتعويض (17) في (15) وإجراء عمليات المكاملة نجد (انظر الملحق).

$$E\left(b_x, b_y, b_z\right) = N \sum_i \hbar\omega_i \left[\frac{a_i^2}{4\, b_i^2} + \frac{b_i^2}{4\, a_i^2}\right] + \frac{g_2 N^2}{2(2\pi)^{3/2} b_x b_y b_z} + \frac{g_3 N^3}{3\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(b_x b_y b_z\right)^2} . \qquad (18)$$

وباعتبار أن التوترات الزاوية لكمون الحصر متساوية $\left(\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_0\right)$، أي إن الفخ الحاصر للذرات كروي الشكل وبالتالي فإن $\left(a = a_x = a_y = a_z\right)$ وكذلك $\left(b = b_x = b_y = b_z\right)$ وبفرض أن $(\beta = b / a)$ نجد.

$$E = \frac{3}{4} N\hbar\omega_0\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{g_2 N^2}{2(2\pi)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{3/2}\beta^3} + \frac{g_3 N^3}{3\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\beta^6} . \qquad (19)$$

يمكننا إجراء حل عددي للمعادلة السابقة وحساب النهاية الحدية الصغرى، ويتم ذلك بأخذ قيمة محددة لعدد الذرات وإعطاء قيم مختلفة لبارامتر التغاير $\beta$ يتم من أجلها وفي كل مرة حساب قيمة طاقة السوية الأرضية $E$ حيث تكونقيمة طاقة السوية الأرضية المتوقعة لتكاثف بوز اينشتاين هي أصغر قيمة من بين هذه القيم التي نحصل عليها $E_{min}$ وتكون قيمة بارامتر التغاير $\beta$ الموافقة ل $E_{min}$ هي التي تحقق شرط مبدأ التغاير (اختيار قيمة $\beta$ بحيث تكون قيمة $E$ اصغر ما يمكن)

وبأخذ عنصر الروبيديوم $^{87}Rb$ حيث $\left[g_2 = 5\hbar \times 10^{-11} cm^3 S^{-1} \& g_3 = \hbar \times 10^{-27} cm^6 S^{-1}\right]$ وكذلك $(\omega_0 = 674.2\, Hz)$ $\left(m = 144.42 \times 10^{-27} kg\right)$ وذلك وفقا للمراجع [3,7] وبالتعويض في (19)، وبعدإجراء القسمة على $N\hbar\omega_0$ لسهولة الحساب نجد.

$$\frac{E}{N\hbar\omega_0} = \frac{3}{4}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) + 0.00235\frac{N}{\beta^3} + 0.287 \times 10^{-8}\frac{N^2}{\beta^6} . \qquad (20)$$

وبأخذ قيمة معينة لعدد الذرات $N$ وإعطاء $\beta$ قيم مختلفة، حيث نختار منها القيمة التي تحقق شرط كون $E/N\hbar\omega_0$ اصغر ما يمكن كقيمة متوقعة لطاقة السوية الأرضية لتكاثف بوز اينشتاين،فنحصل على الجدول ( 1) وذلك من اجل قيم مختلفة لعدد الذرات $N$.

**الجدول (1):**

| $N: atom/cm^3$ | $N = 10^8$ | $N = 10^9$ | $N = 10^{10}$ | $N = 10^{11}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\beta_2$ كمون تفاعل ثنائي الاجسامفقط | 13.5 | 21.6 | 35 | 54.3 |
| $\beta_{2\,\&\,3}$ ثنائي وثلاثي الاجسام معا | 14 | 22.4 | 37 | 62.4 |
| $E/N\hbar\omega_0$ كمون تفاعل ثنائي الاجسامفقط | 232.1465 | 583.1099 | 1464 | 3679.173 |
| $E/N\hbar\omega_0$ ثنائي وثلاثي الاجسام معا | 236.4616 | 608.1544 | 1602.689 | 4374.27 |

يوضح الجدول ( 1) النتائج العددية التي نحصل عليها لأجل $^{87}Rb$ والتي تحقق مبدأ التغاير وتوضح المنحنيات البيانية في الاشكال ( 4−1) المجال الذي تم أخذة ل $\beta$ وقيم $E/N\hbar\omega_0$ المقابلة، والنهايات الصغرى الحدية التي تحقق مبدأ التغاير، وذلك من أجل حالتين مختلفتين، **الأولى:** حيث يكتفى بها بكمون تفاعل ثنائي الاجسام والتي نحصل بوضع $g_3 = 0$ في المعادلات السابقة (وهو الحد المعبر عن كمون تفاعل ثلاثة الأجسام)، أما الحالة **الثانية:** نأخذ فيها كمون تفاعل ثنائي وثلاثي الأجسام معا. حيث نلحظ من خلال هذه القيم والمنحنيات انه في حال كون عدد الذرات المتكثفة قليلا فلا أهمية لكمون تفاعل ثلاثة أجسام حيث يأخذ الحد المعبر عن هذا الكمون قيم صغيرة جدا، وتنطبق المنحنيات المعبرة عن الحالتين السابقتين على بعضهما البعض، ومع ازدياد عدد الذرات المتكثفة تزداد أهمية كمون تفاعل ثلاثة أجسام، حيث يساهم بقيمة مؤثرة في طاقة السوية الأرضية ولا يمكن إهماله، وهذا يمكن تفسيره بازدياد احتمالية حدوث تفاعل ثلاثة أجسام بين الذرات المتكثفة بازدياد عددها.

من أجل حساب النهاية الحدية الصغرى تحليليا نقوم باشتقاق المعادلة ( 19) بالنسبة بارامتر التغاير ومساواته بالصفر لنحصل على.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta} = \frac{3}{2}\left(\beta - \frac{1}{\beta^3}\right) - \frac{3\,g_2 N}{2(2\pi)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{3/2}\hbar\omega_0\beta^4} - \frac{2g_3N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\hbar\omega_0\beta^7} = 0\,. \quad (20)$$

حيث رمزنا ب $(\mathcal{E} = E/N\hbar\omega_0)$. بما أن النهاية الحدية الصغرى تشكل أيضا نقطة انعطاف للتابع $E = f(\beta)$ (يمكن ملاحظة ذلك من الاشكال 1,2,3,4) فيمكن أخذ المشتق الثاني للعلاقة ( 19) ومساواته بالصفر أيضا فنجد.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{\beta^4}\right) + \frac{6g_2N}{(2\pi)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{3/2}\hbar\omega_0\beta^5} + \frac{14\,g_3N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\hbar\omega_0\beta^8} = 0\,. \quad (21)$$

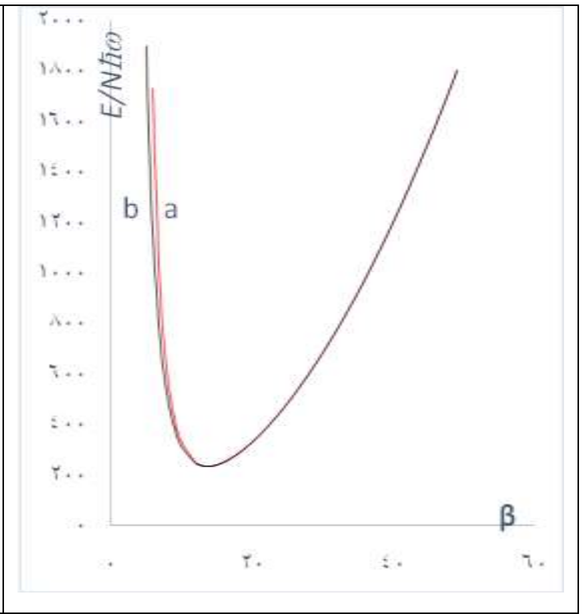
وبالتالي يمكننا الحصول على قيمة بارامتر التغاير بحل جملة المعادلتين ( 20,21) فنضرب المعادلة ( 20) بالعدد $\frac{2}{3}\beta^7$ والمعادلة (21) بالعدد $\frac{2}{3}\beta^8$ لنحصل على.

$$\beta^8 - \beta^4 - \frac{g_2N\beta^3}{(2\pi)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{3/2}\hbar\omega_0} - \frac{4g_3N^2}{3\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\hbar\omega_0} = 0\,. \quad (22)$$

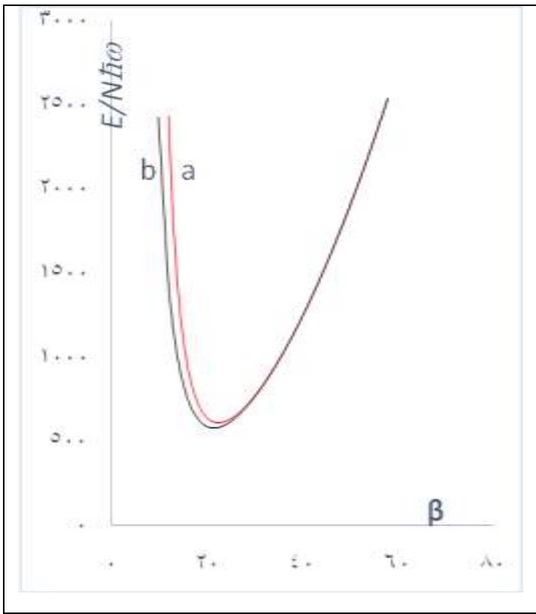
$$\beta^8 + 3\beta^4 + \frac{4g_2N\beta^3}{(2\pi)^{3/2}\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{3/2}\hbar\omega_0} + \frac{28g_3N^2}{3\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\hbar\omega_0} = 0\,. \quad (23)$$

بضرب المعادلة (22) بالعدد 4 ومن ثم جمعها إلى المعادلة (23) نجد.

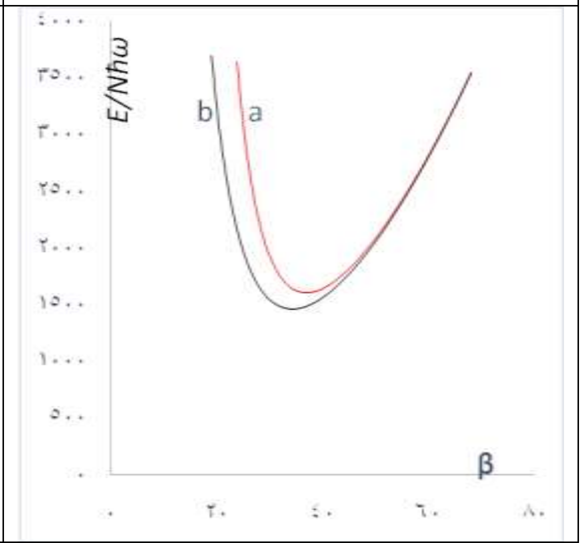
$$5\,\beta^8 - \beta^4 + \frac{4g_3N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\hbar\omega_0} = 0 \quad (24)$$



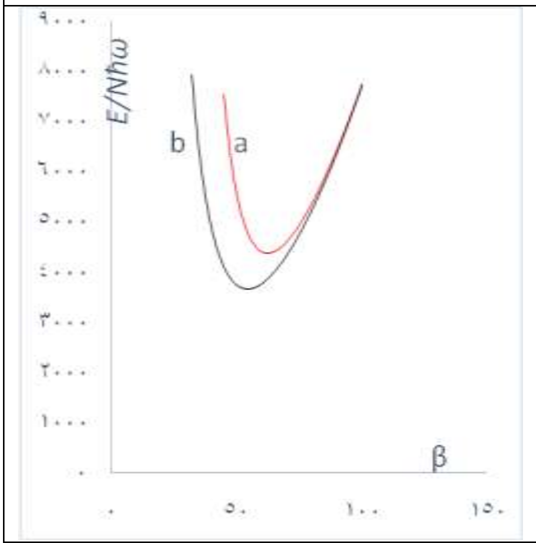

**الشكل[1]:** $^{87}Rb\!: N = 10^{8}$




**الشكل[2]:** $^{87}Rb\!: N = 10^{9}$




**الشكل[3]:** $^{87}Rb\!: N = 10^{10}$




**الشكل[4]:** $^{87}Rb\!: N = 10^{11}$

**الإشكال[1,2,3,4]: توضح تغيرات $(E/N\hbar\omega_0)$ بدلالة بارامتر التغاير $(\beta)$ من اجل قيم مختلفة لعدد الذرات للعلاقة ( 20). دائما المنحنيات المشار إليها بالرمز (a) تأخذ بعين الاعتبار كمونات تفاعل تنائي وثلاثي الاجسام معا، المنحنيات المشار إليها بالرمز (b) تأخذ بعين الاعتبار كمون تفاعل تنائي الاجسام فقط.**

بفرض إن$(x = \beta^4)$ نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية لها الحل التالي.

$$x = \frac{1}{10}\left[1 + \sqrt{1 - 80\frac{g_3 N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\hbar\omega_0}}\right] = 0.1 + 0.1\sqrt{1 - 80\frac{g_3 m^3\omega_0^2 N^2}{\hbar^4\sqrt[2]{3^3}\pi^3}} \quad (25)$$

وبالتعويض من العلاقة (25) في العلاقة ( 19) نجد أن طاقة السوية الأرضية لمتكثف بوز اينشتاين تعطى بالعلاقة.

$$\boldsymbol{E}=\frac{3}{4}N\hbar\omega_0\left[\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\hbar^4\sqrt[2]{3^3}\pi^3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\hbar^4\sqrt[2]{3^3}\pi^3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (26)$$

$$+\frac{g_2N^2}{2\left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\hbar^4}}\right)^{\frac{3}{4}}}+\frac{g_3N^3}{3\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\hbar^4}}\right)^{\frac{6}{4}}}$$

ويعطى الكمون الكيمائي بالعلاقة $(\mu=\partial E/\partial N)$ فنجد بالاستفادة من (19) بعد الاشتقاق والتعويض من (25).

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{\partial E}{\partial N}=\frac{3}{4}\hbar\omega_0\left[\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\hbar^4\sqrt[2]{3^3}\pi^3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\hbar^4\sqrt[2]{3^3}\pi^3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (27)$$

$$+\frac{g_2N}{\left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\hbar^4}}\right)^{\frac{3}{4}}}+\frac{g_3N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^3\left(0.1+0.1\sqrt{1-80\frac{g_3m^3\omega_0^2N^2}{\sqrt[2]{3^3}\pi^3\hbar^4}}\right)^{\frac{6}{4}}}$$

لأجل متكثف بوز اينشتاين حاصل لذرات الروبيديوم $({}^{87}Rb)$ وبتعويض كل من $(g_3, g_2, m, \omega_0)$ المعطاة سابقا في المعادلة (25) نجد.

$$x=\beta^4\approx 0.1+0.1\sqrt{1-10^{-6}N^2} \quad (28)$$

ويمكن إن نلحظ أن $(x=\beta^4)$ تأخذ مقدار عقدي عندما.

$$10^{-6}N^2>1 \;\Longrightarrow\; N>10^3 \quad \boldsymbol{atom/cm^3}$$

كما بين لنا الحل التحليلي أن الفرق بين المنحني المعبر عن الحالة التي نكتفي بها بكمون تفاعل ثنائي الأجسام فقط والمنحني المعبر عن الحالة التي نأخذ فيها بالحسبان كمون تفاعل ثنائي وثلاثي الأجسام معا يظهر عندما $N\geq 10^8\mathbf{atom/cm^3}$ (وعندما يكون عدد الذرات المتكثفة اقل من ذلك فأن المنحنيين المعبرين عن الحالتين السابقتين ينطبقان على بعضهما البعض) وبالتالي فأن جذر المعادلة (24) مقدار عقدي عند تلك القيم، ولذلك فأننا نقوم بحساب طويلته وذلك بضربة بمرافقة العقدي لنحصل على.

$$\boldsymbol{x^*x}=\beta^8=\left(0.1+0.1\sqrt{1-10^{-6}N^2}\right)\left(0.1-0.1\sqrt{1-10^{-6}N^2}\right)$$

$$\approx\left(0.1+0.1\sqrt{-10^{-6}N^2}\right)\left(0.1-0.1\sqrt{-10^{-6}N^2}\right)\approx\left(0.1+j0.1\sqrt{10^{-6}N^2}\right)\left(0.1-j0.1\sqrt{10^{-6}N^2}\right)$$

$$\approx 0.01\times10^{-6}N^2\Longrightarrow\quad \beta=\sqrt[8]{10^{-8}N^2}. \quad (29)$$

حيث تم أخذ التقريب التالي $\left(\sqrt{1-10^{-6}N^2}\approx\sqrt{-10^{-6}N^2}=j\times10^{-3}N\;;N\geq10^8\mathrm{atom}/cm^3\right)$.

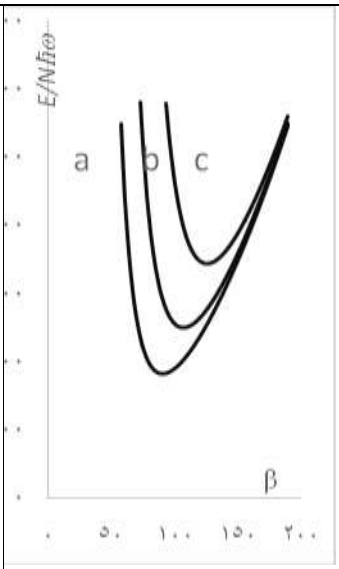
وألان بتعويض β في المعادلة (19) نجد أن الطاقة لكل ذرة ضمن المتكثف بواحدة $\hbar\omega_0$ هي.

$$\frac{E}{N\hbar\omega_0}=\frac{3}{4}\left(\sqrt[4]{10^{-8}N^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{10^{-8}N^2}}\right)+\frac{0.00235\times N}{(10^{-8}N^2)^{\frac{3}{8}}}+\frac{0.287\times10^{-8}\times N^2}{(10^{-8}N^2)^{\frac{6}{8}}}. \quad (30)$$

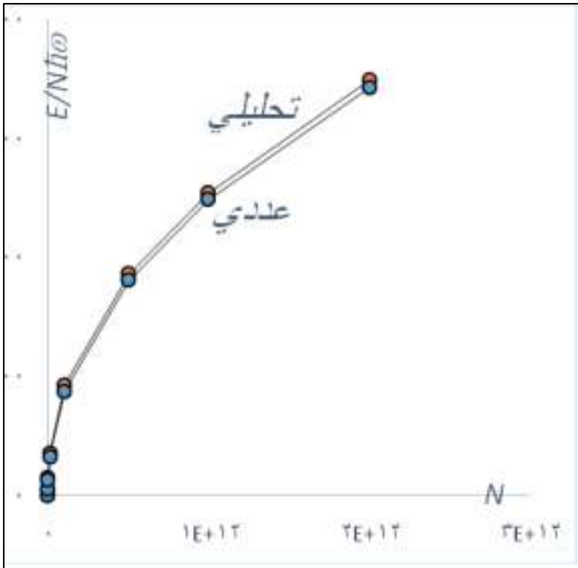
والجدول التالي (2) يوضح بعض القيم لكل من الحل التحليلي والعددي.

**الجدول (2):**

| $N$:atom/$cm^3$ | $10^8$ | $10^9$ | $10^{10}$ | $10^{11}$ | $5\times10^{11}$ | $10^{12}$ | $2\times10^{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| β عدديا | 14 | 22.5 | 37 | 62.5 | 90 | 107 | 126 |
| β تحليليا | 10 | 18 | 32 | 56 | 84.1 | 100 | 119 |
| $E/N\hbar\omega_0$ عدديا | 236.46 | 608.15 | 1602.69 | 4374.17 | 9038.5 | 12419.82 | 17129 |
| $E/N\hbar\omega_0$ تحليليا | 338 | 729.95 | 1752.3 | 4620 | 9303.72 | 12720 | 17448.4 |




**الشكل[5]**




**الشكل[6]**

**الشكل[5]:الحل التحليلي بوجود كمون تفاعل ثلاثة أجسام لأجل** $(a\equiv 5\times10^{11}, b\equiv 10^{12}, c\equiv 2\times10^{12}\text{atom}/Cm^3)$

**الشكل[6]:الطاقة لكل ذرة ضمن المتكثف بواحدة** $\hbar\omega_0$ **بدلالة عدد الذرات المتكثفة** $(\mathcal{E}\equiv E/N\hbar\omega_0=f(N))$ **متضمنا مقارنة بين الحل التحليلي والعددي (القيم مأخوذة من الجدول 2 ).**

لندرس الآن تأثير كمون تفاعل ثلاثة أجسام على الاثارات الأولية لتكاثف بوز–اينشتاين والتي تحسب مباشرة عن طريق معادلات بكالوبوف حيث نفرض إن التغير في قيمة $\psi(r,t)$ يعطى بواسطة $\delta\psi(r,t)$ لذلك يكتب $\psi(r,t)$ بالصيغة التالية.

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi_0(\boldsymbol{r},t)+\delta\psi(\boldsymbol{r},t). \qquad (31)$$

حيث $\psi_0(r,t)$ الدالة الموجية للمتكثف غير المضطرب (عند التوازن) وتعطى بالعلاقة.

حيث $\psi_0(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{n(\boldsymbol{r})}e^{-i\mu t/\hbar}$ $n(r)$ تمثل الكثافة عند التوازن. وتعرف $\delta\psi(r,t)$ بانها قيمه اضطرابيه عن وضع التوازن. وبتعويض (31) في معادلة غروس–بيتاإيفسكي (12) نجد.

$$i\hbar\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\right]=-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}(\psi_0+\delta\psi)+V(\boldsymbol{r})(\psi_0+\delta\psi)$$
$$+g_2\{\psi_0^*\psi_0\psi_0+\psi_0\psi_0^*\delta\psi+\psi_0\psi_0\delta\psi^*+\psi_0\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\delta\psi+\psi_0^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0\delta\psi^*\delta\psi+\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi\}$$
$$+g_3\{\psi_0^*\psi_0\psi_0^*\psi_0\psi_0+\psi_0^*\psi_0\psi_0^*\psi_0\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\psi_0\psi_0\delta\psi^*+\psi_0^*\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\psi_0^*\psi_0\delta\psi$$
$$+\psi_0^*\psi_0\psi_0^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0^*\psi_0\psi_0\delta\psi+\psi_0^*\psi_0^*\psi_0\delta\psi\delta\psi$$
$$+\psi_0^*\psi_0\psi_0\delta\psi\delta\psi^*+\psi_0^*\psi_0\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0^*\psi_0\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0^*\delta\psi\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\delta\psi\delta\psi^*\delta\psi$$

$$+\psi_0^*\delta\psi\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0\psi_0^*\psi_0\psi_0\delta\psi^*+\psi_0^*\psi_0\psi_0^*\psi_0\delta\psi^*\delta\psi+\psi_0\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi^*+\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi^*\delta\psi$$
$$+\psi_0\psi_0^*\psi_0\delta\psi^*\delta\psi+\psi_0\psi_0^*\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi^*\delta\psi+\psi_0\delta\psi^*\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi$$
$$+\psi_0^*\psi_0\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0\psi_0\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi^*+\psi_0\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi^*\delta\psi+\psi_0^*\psi_0\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\psi_0^*\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi\delta\psi$$
$$+\psi_0\delta\psi^*\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi+\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi^*\delta\psi\delta\psi\}. \quad (32)$$

بإنجاز تحليل الاستجابة الخطية (أي أخذ الحدود الاضطرابية من المرتبة الأولى فقط) نجد.

$$i\hbar\frac{\partial\delta\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi(\boldsymbol{r},t)+g_2[2|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^2\delta\psi(\boldsymbol{r},t)+|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^2\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)]$$
$$+V(\boldsymbol{r})\delta\psi(\boldsymbol{r},t)+g_3[3|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^4\delta\psi(\boldsymbol{r},t)+2|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^4\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)] \quad (33)$$

$$-i\hbar\frac{\partial\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)+g_2[2|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^2\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)+|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^2\delta\psi(\boldsymbol{r},t)]$$
$$+V(\boldsymbol{r})\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)+g_3[3|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^4\delta\psi^*(\boldsymbol{r},t)+2|\psi_0(\boldsymbol{r},t)|^4\delta\psi(\boldsymbol{r},t)] \quad (34)$$

حيث تمثل المعادلة (34) المرافق العقدي للمعادلة (33)،تعطى القيمة الاضطرابية $\delta\psi(r,t)$ وفقا للمرجع [2] بالعلاقة.

$$\delta\psi(\boldsymbol{r},t)=e^{-i\mu t/\hbar}\left[u(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}-v^*(\boldsymbol{r})e^{+i\omega t}\right]. \quad (35)$$

حيث كل من $[u(\boldsymbol{r})\&v(\boldsymbol{r})]$دوال ستحدد قيمتها لاحقا. وتمثل $\omega$ تواترات الاثارة وهو مقدار حقيقي. ويمثل $e^{\frac{-i\mu t}{\hbar}}$ معامل الطور وهو مقدار ضروري لإلغاء تأثيرات كل من ( $\psi(\boldsymbol{r},t)^2\&\ \psi^*(\boldsymbol{r},t)^2$ )في المعادلتين (33 & 34) حيث يضمن لنا هذا بقاء المعادلات صحيحة بتغير الزمن. وبالتعويض في المعادلة (34) نجد.

$$\left[\mu e^{\frac{-i\mu t}{\hbar}}\left(ue^{-i\omega t}-v^*e^{i\omega t}\right)+e^{\frac{-i\mu t}{\hbar}}\hbar\omega\left(ue^{-i\omega t}-v^*e^{i\omega t}\right)\right]=$$
$$e^{\frac{-i\mu t}{\hbar}}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2ue^{-i\omega t}+\nabla^2v^*e^{-i\omega t}\right]+g_2n(\boldsymbol{r})\left[2\left(ue^{-i\omega t}-v^*e^{i\omega t}\right)+\left(u^*e^{i\omega t}-ve^{-i\omega t}\right)\right]\right\}$$
$$e^{\frac{-i\mu t}{\hbar}}\left\{V(\boldsymbol{r})\left(ue^{-i\omega t}-v^*e^{i\omega t}\right)+g_3n^2(\boldsymbol{r})\left[3\left(ue^{-i\omega t}-v^*e^{i\omega t}\right)+2\left(u^*e^{i\omega t}-ve^{-i\omega t}\right)\right]\right\} \quad (36)$$

وبمساواة أمثال كل من $(e^{-i\omega t}\&e^{i\omega t})$ بالصفر، نحصل على معادلتين مترافقتين تمثلان معادلتي بكالوبوف حيث قام باستنتاجهما قبل 76 سنة مضت لجملة غاز بوزوني لم تكن موجودة حتى.

$$\left[\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})+2g_2n+3g_3n^2-\mu-\hbar\omega\right]u(\boldsymbol{r})-[g_2n+2g_3n^2]v(\boldsymbol{r})=0 \quad (37)$$
$$\left[\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})+2g_2n+3g_3n^2-\mu+\hbar\omega\right]v(\boldsymbol{r})-[g_2n+2g_3n^2]u(\boldsymbol{r})=0 \quad (38)$$

من اجل حساب قيمة الكمون الكيميائي نفرض إننا نعالج جملة غاز متجانس حيث لا وجود لأي تأثيرات على هذه الجملة سوى التأثيرات التفاعلية ما بين الذرات أي أننا نقوم بإهمال تأثير الطاقة الحركية للذرات وطاقة المصيدة الحاصرة ومن ثم نعوض المعادلة (14) في معادلة غروس–بيتاإيفسكي(12) لنحصل على قيمة الكمون الكيميائي لجملة غازبوز المتجانس.

$$\mu=\boldsymbol{g_2}n+\boldsymbol{g_3}\boldsymbol{n^2}. \quad (39)$$

وبتعويض (29) في معادلات بكالوبوف نجد.

$$\left[\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(r)+g_2n+2g_3n^2-\hbar\omega\right]u(r)-[g_2n+2g_3n^2]v(r)=0 \qquad (40)$$
$$\left[\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(r)+g_2n+2g_3n^2+\hbar\omega\right]v(r)-[g_2n+2g_3n^2]u(r)=0 \qquad (41)$$

من اجل حساب الاثارات الأساسية لجملة غاز البوزونات نهمل كمون المصيدة الحاصرة للذرات وتختار قيمة كل

من$[\ u(r)\&\ \ v(r)]$ كما في المرجع [2] لتكون حلا للمعادلتين السابقتين بالعلاقتين التاليتين.

$$u(\boldsymbol{r})=u_q\frac{e^{iqr}}{\sqrt{V}} \qquad v(\boldsymbol{r})=v_q\frac{e^{iqr}}{\sqrt{V}}. \qquad (42)$$

حيث $V$ :حجم الجملة. $q$:العدد الموجي. وبالتعويض في (42&41) نحصل على المعادلتين.

$$\left[\frac{\hbar^2q^2}{2m}+g_2n+2g_3n^2-\hbar\omega\right]u_q-[g_2n+2g_3n^2]v_q=0 \qquad (43)$$
$$\left[\frac{\hbar^2q^2}{2m}+g_2n+2g_3n^2+\hbar\omega\right]v_q-[g_2n+2g_3n^2]u_q=0 \qquad (44)$$

وبما إن$(v_q\ ,u_q\neq 0\ )$ فان الحل المشترك لهاتين المعادلتين يؤدي بنا الى الشرط.

$$\left[\frac{\hbar^2q^2}{2m}+g_2n+2g_3n^2-\hbar\omega\right]\left[\frac{\hbar^2q^2}{2m}+g_2n+2g_3n^2+\hbar\omega\right]=(g_2n+2g_3n^2\,)^2. \quad (45)$$

وبالتالي نحصل على تواترات الإثارة الأولية لمتكثف بوز اينشتاين بالعلاقة.

$$\omega=\frac{1}{\hbar}\sqrt{\left(\frac{\hbar^2q^2}{2m}\right)^2+\frac{\hbar^2q^2}{2m}(2ng_2+4n^2g_3)}. \qquad (46)$$

والتي تمثل تواترات الإثارة لمتكثف بوز اينشتاين في حال اخذ كمون تفاعل ثلاثة أجسام بعين الاعتبار.

نحصل على أنماط الإثارة$(v_q\ ,u_q)$ لمتكثف بوز− ايينشتاين بالاستفادة من المعادلة التالية وفقا للمرجع [2] .

$$|u_q|^2-|v_q|^2=1 \qquad (47)$$

بتربيع طرفي المعادلة (43) والتعويض من المعادلة (47) نجد.

$$\left(\frac{\hbar^2q^2}{2m}+g_2n+2g_3n^2-\hbar\omega\right)^2u_q^2=\ (g_2n+2g_3n^2\,)^2(u_q^2-1). \qquad (48)$$

ونحصل على.

$$u_q^2=\frac{(g_2n+2g_3n^2\,)^2}{2(\hbar\omega)^2-2\frac{\hbar^2q^2}{2m}(\omega\hbar)-2[g_2n+2g_3n^2](\omega\hbar)}. \qquad (49)$$

بالاستفادة من المعادلة (46) نجد.

$$u_q^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\hbar^2q^2}{2m}+(ng_2+2n^2g_3)}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2q^2}{2m}\right)^2+2\frac{\hbar^2q^2}{2m}(ng_2+2n^2g_3)}}+1\right]\&v_q^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\hbar^2q^2}{2m}+(ng_2+2n^2g_3)}{\sqrt{\left(\frac{\hbar^2q^2}{2m}\right)^2+2\frac{\hbar^2q^2}{2m}(ng_2+2n^2g_3)}}-1\right].(50)$$

حيث استفدنا من المعادلة ( 46) لحساب $v_q^2$ بعد ان قمنا بحساب $u_q^2$. وبحذف الحدود المتناسبة مع كمون تفاعل ثلاثة أجسام $(g_3)$في العلاقات (50،46) فأننا نحصل على العلاقات نفسها في حالة اخذ كمون تفاعل ثنائي الأجسام فقط بالحسبان، حيث يزيد كمون تفاعل ثلاثة اجسام من قيمة تواترات الإثارة لمتكثف بوز اينشتاين وذلك يعزى إلى زيادة احتمالية تفاعل ثلاثة أجسام بازدياد عدد الذرات المتكثفة.

## الاستنتاجات والتوصيات:

أزداد عدد الذرات المتكثفة تكاثف بوز اينشتاين بمرور الوقت. ففي أول تجربة تم فيها الحصول على هذه الظاهرة قامت مجموعة JILA بإنجاز تكاثف بوز اينشتاين لحوالي 2000 ذرة من $^{87}Rb$وتم لاحقا إنجاز تكاثف بوز اينشتاين لأنواع أخرى من الذرات، وأرتفع أيضا عدد الذرات المتكثفة في التجارب اللاحقة لتصبح تجارب تكاثف بوز اينشتاين النموذجية[1,4,5] تحوي حوالي $10^{13}-10^{15}\ atom/cm^3$. وتطلبت هذه الزيادة أخذ كمون تفاعل ثلاثة أجسام بالحسبان، حيث انه في التجارب التي تحوي عدد قليل من الذرات تكون التصادمات الثنائية والمعبر عنها بكمون تفاعل ثنائي الأجسام هي المسيطرة، وتهمل إمكانية حصول التصادمات بين ثلاثة ذرات والمعبر عنها بكمون تفاعل ثلاثي الأجسام. لكن في التجارب التي تحوي عدد كبير من الذرات في حالة تكاثف بوز اينشتاين تزداد احتمالية حصول تفاعل ثلاثي الأجسام، ولذلك في هذه التجارب يجب اخذ هذه الاحتمالية بالحسبان، وما قمنا بحسابة هو مساهمة كمون تفاعل ثلاثة أجسام في قيمة طاقة السوية الأرضية في العلاقة ( 26) وكذلك في قيمة الكمون الكيمائيفي العلاقة ( 27) وقيمة تواترات الإثارة الأولية في العلاقة (46).

بأخذ عنصر الروبيديوم $^{87}Rb$وبعد أجراء الحسابات،تم المقارنة بالقيم العددية في الجدول ( 1)، والإيضاح بالمنحنيات البيانية في الإشكال ( 4−1) الفرق في طاقة السوية الأرضية عند أخذ كمون تفاعل ثنائي الأجسام فقط ممثلة بالمنحنيات التي تأخذ الرمز b في الاشكال السابقة **كحالة أولى** وعندأخذ كمون تفاعل ثنائي وثلاثي الأجسام معا ممثلة بالمنحنيات التي تأخذ الرمز a في الإشكال السابقة نفسها **كحالة ثانية**. حيث انطبقت المنحنيات الممثلة للحالتين السابقتين على بعضهما البعض لأجل $N<10^8\mathrm{atom}/cm^3$، وأعطى الحد المعبر عن كمون تفاعل ثلاثة أجسام مساهمة صغيرة جدا بالمقارنة مع بقية الحدود الأخرى، وبعبارة أخرى لا أهمية لكمون تفاعل ثلاثة أجسام في التجارب التي تحوي عدد قليل من الذرات المتكثفة. ولكن مع ازدياد عدد الذرات المتكثفة ليصبح أكبر من القيمة المذكورة $(10^8\mathrm{atom}/cm^3)$فإن مساهمة كمون تفاعل ثلاثة في طاقة السوية الأرضية تظهر بوضوح. وهذا منطقي طالما أن ازدياد عدد الذرات المتكثفة يزيد من احتمالية تفاعل ثلاثة أجسام. ويوضح الشكل (6) مقدار التطابق بين الحل العددي والتحليلي اللذين تم فيهما حساب قيمة طاقة السوية الأرضية.

وأخيرا أشارت الحسابات إلى النتيجة المتوقعة التالية: مع تزايد عدد الذرات المتكثفة تزداد احتمالية تفاعل ثلاثة ذرات فيما بينها لتعطي مساهمات جديرة بالاهتمام، وبالتالي يستوجب أخذها بالحسبان عند دراسة خواص تكاثف بوز اينشتاين، حيث تم حساب بعض الخواص في هذه الورقة، ويمكن لاحقا متابعة هذه الدراسة على أمواج السوليتون وتواترات الاثارة الجماعية في تكاثف بوز اينشتاين بوجود كمون تفاعل ثلاثة اجسام.

**المراجع:**

[1]- WOLFGANG KETTERLE.*Nobel lecture, When atoms behave as waves, Bose Einsteincondensation and the atom laser*. Reviews of Modern PhysicsUSA, vol74,2002,1131-1151.

[2]- KEITHBURNETT. MARK EDWARDS . CHARLES W. CLARK, *The Theory OfBose Einstein Condensation of Dilute Gases*. Physics Today USA,vol 52,1999, 37-42.

[3]- J. ROGEL-SALAZAR, *The Gross-Pitaevskii Equation and Bose-Einstein condensates*.Eur. J. Phys،vol 1,2013,1-13.

[4]- FRANCO DALFOVO, LEF P. PITAEVSKII, SANDRO STRINGARI,*Theory of Bose-EinsteinCondensations in trapped gases*. Reviews of Modern Physics,USA, vol 71, 1999, 463-512.

[5]- C. J. PETHICK, H. SMITH, *Boes–Einstein Coodensation in dilute Gases*. $2^{nd}$ ed,Cambridge,UK,2008, 585.

[6]- PH. W. COURTEILLE; V. S. BAGNATO; V. I. YUKALOV,*Bose–Einstein Condensation of Trapped Atomic Gases*. Laser Physics Russia,vol. 11, 2001, 659–800.

[7]- HAMID JABBER HAZIRAN Al-JIBBOURI, *Collective Excitations in Bose-Einstein Condensation*. PhDThesis, BerlinUniversity,2013, 129.

[8]- V.I. Yukalov, *Basics of Bose-Einstein Condensation.* Bogolubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia,2011,1-102.

[9] –د.فيازمينسكا،قيصر،*ميكانيك الكم (2)*. جامعة حلب،سورية، 2005، 450.

[10]- A. F.J. LEVI,*Applied Quantum Mechanics*. First Edition, Cambridge University Press,UK, 2003, 541.

[11]- PIERS COLEMAN, *Introduction to Many Body Physics*. First Edition,Cambridge UniversityPress,UK,2011, 564.

[12]-P.G.KEVREKIDIDIS, D.J.FRANTZESKAKIS, R.CARRETERO.GONZALEZ, *Basic Mean-Field Theory for Bose–Einstein Condensates*.Germany. 2008,1-20.

[13]– د. دريباتي، محمد،*الدوال الخاصة*. جامعة تشرين،سورية، 2006–2007.