مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (1) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (1) 2017

تقدير طويلات المشتقات في بعض فضاءات التوابع المتباينة

د. حسن بدور *
جنان حمادي **

(تاريخ الإيداع 27 / 11 / 2016. قُبِل للنشر في 20 / 2 /2017)

□ ملخّص □

ليكن S فضاء التوابع f التحليلية والمتباينة في قرص الواحدة $(D:|z|<1)$ من المستوي العقدي التي تحقق الشرط

$$f(0)=0\,,\ f'(0)=1$$

باستخدام نظرية دو برانج تم البرهان ، من أجل توابع هذا الفضاء، على صحة التقديرات الآتية:

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le n!\ \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}\ \ ,z\in D\ ,\ \ n=2,3,\ldots,$$

ومن أجل توابع الفضاء S° (أسرة التوابع التحليلية المحدبة والمتباينة في قرص الواحدة) تم البرهان على صحة التقديرات الآتية:

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}\ \ ,z\in D,\ \ f\in S^{\circ}\quad n=2,3,\ldots,$$

الكلمات المفتاحية:

التابع الحدودي
التابع المتباين
التابع المحدب
التابع النجمي

---

*أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** طالبة ماجستير – قسم الرياضيات– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (1) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (1) 2017

The Estimations of Modulus of Derivatives in some Classes of Univalent Functions

Dr. Hassan Baddour*
Genan Hamadi**

(Received 30 / 8 / 2016. Accepted 8 / 11 /2017)

☐ ABSTRACT ☐

Let S denote the class of functions f that are analytic and univalent in the unit disk $(D:|z|<1)$ such that:

$$f(0)=0\,,\; f'(0)=1$$

Using De Brange Theorem it has been shown for the functinos of this class that the the following estimations are true:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le n!\;\frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}\quad ,z\in D,\quad n=2,3,\ldots,$$

For the Subclass S° (e.i. The Class of Convex functionswhdch in analytic and univalent in unit disk) the following estimations are true

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}\quad ,z\in D,\;\; f\in S^{\circ}\quad n=2,3,\ldots,$$

Key Words:
Extremal function
Univalent function
Starlike function
Convex function

* **Professor, Department of Mathematics at University of Tishreen , Lattakia - Syria**
** **Postgraduate Student, Department of Mathematics at University of Tishreen, Lattakia - Syria**

مقدمة

لنرمز بالرمز S لفضاء التوابع $f(z)$ التحليلية والمتباينة، في قرص الواحدة $(D:|z|<1)$ من المستوي العقدي التي تحقق الشرط $f(0)=0\ ,\ f'(0)=1$: أي التوابع التي تقبل النشر في سلسلة القوى:

$$f(z)=z+a_2z^2+...+a_nz^n+...,\ |z|<1\ . \qquad (1)$$

في عام 1916 وضع بيبرباخ (*Biebrbach*) فرضيته الشهيرة ، المتعلقة بأمثال منشور التابع $f(z)$ في سلسلة تايلور (1)، التي تنص على:

$$f\in S\Rightarrow |a_n|\le n,\ n=2,3,... \qquad (2)$$

وبرهن على صحتها من أجل $n=2$. كما برهن هو نفسه على صحة التقديرين الآتيين لطويلتي التابع $f(z)$ ومشتقه [3]:

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le |f(z)|\le \frac{r}{(1-r)^2},\ |z|=r,\ z\in D \qquad (3)$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le |f'(z)|\le \frac{1+r}{(1-r)^3},\ |z|=r,\ z\in D \qquad (4)$$

وقد بين كيبي [4] أن التقديرين (3) و (4)دقيقان ، بمعنى أنه يوجد تابع $f\in S$ تتحقق المساواة من أجله في بعض نقاط قرص الواحدة . وهذا التابع هو تابع كيبي (*Koebe*) الشهير :

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+...+nz^n+... \qquad (5)$$

فمن أجل تابع كيبي تتحول المتراجحتان السابقتان (3) و (4) إلى مساواة في بعض النقاط كما تتحقق المساواة في (2) من أجل كل n وبالتالي تكون صحيحة من أجله فرضية بيبرباخ . لذلك يعرف تابع كيبي بالتابع الحدودي (أو التابع الأقصى) بالنسبة لتقدير الأمثال في الفضاء S .وقد ظهرت فيما بعد طرائق كثيرة لمعالجة فرضية بيبرباخ وتم التوصل إلى نتائج كثيرة متعلقة بتقدير الأمثال وبتحديد مناطق تغير الداليات في الفضاء S أو في الفضاءات الجزئية المرتبطة معه .

وفي عام 1972 برهن بيدرسون(*Pederson*) وشيفير (*Schiffer*) ، باستخدام متراجحة غارابيديان – شيفير (*Garabedian – Schiffer Inequality*)،على أن [8]:

$$|a_n|\le n,\ n=2,3,4,5.$$

واعتماداً على هذه التقديرات تم التوصل إلى تقدير مشتقات التوابع حتى المرتبة الخامسة في S [2] وهي]:

$$|f^{(n)}(z)|\le n!\ \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}\ ,|z|<1\quad n=2,3,4,5, \qquad (6)$$

وأخيراً وفي العام 1985 استطاع الفرنسي لويس دي برانج (*De Brange*) [6] البرهان على صحة فرضية بيبرباخ (2) من أجل كل n . ومن هنا ظهرت إمكانية تقدير طويلات مشتقات توابع الفضاء S من مراتب عليا وبالتالي الحصول على المتراجحات (6) من أجل أي n. ونحن في هذا البحث توصلنا إلى هذه التقديرات وغيرها بطريقة بسيطة وفعالة لا نحتاج فيها إلى مفاهيم متقدمة في التوبولوجيا أو التحليل.

أهمية البحث وأهدافه

لهذا البحث أهمية خاصة لكونه متابعة لدراسات سابقة متعلقة بالمسائل القصوى، عالجها الكثير من الباحثين في مختلف الجامعات ومؤسسات البحث العلمي. ومما زاد في هذه الأهمية هي الفرضية التي وضعها بيبرباخ في عام 1916 والتي لم تحل إيجاباً إلا في عام 1985 من قبل الباحث الفرنسي لويس دو برانج [6]. وعلى هامش هذه الفرضية ظهرت طرائق كثيرة للبحث وتم التوصل على إثر ذلك إلى نتائج كثيرة متعلقة بتقدير الأمثال وبتحديد مناطق تغير الداليات في الفضاء S أو في الفضاءات الجزئية المرتبطة معه . يمكن إيجاد الكثير من هذه النتائج في المراجع ([1], [4], [5], [7]) . ونحن في بحثنا هذا سوف نقوم بدراسة بعض التقديرات لطويلات مشتقات التوابع في الفضاء S أو غيرها اعتمادا نتائج سابقة من بينها نظرية دو برانج.

طرائق البحث ومواده:

طريقة البحث المتبعة هي استخدام النظريات الأساسية المتعلقة بالتوابع التحليلية والمتباينة مع الاستفادة من خواص التحويلات المحافظة إضافة إلى استخدام نتائج طريقة المساحة التي استفاد منها كل من كيبي وبيبرباخ للوصول إلى نتائجهما الأولى المتعلقة بتقدير طويلة المشتقات والأمثال.

النتائج والمناقشة:

سوف نعرف تابعاً جديداً $h(\varsigma)$ من خلال استخدام التحويل المحافظ $w(\varsigma)$ الذي ينقل قرص الواحدة إلى نفسه حيث يمكن نقل مركز القرص الأول إلى النقطة z المختارة كيفياً من القرص الثاني وذلك بأخذ أح د عناصر الفضاء S وليكن f كتابع لهذا التحويل ثم القيام ببعض الإجراءات التي تجعل التابع الجديد $h(\varsigma)$ ضمن الفضاء S . من شأن هذه العملية أن تفيد في معرفة مشتق التابع f في النقطة z من خلال معرفة مشتق التابع المركب $h(\varsigma)$ في الصفر. ومن خلال ذلك نتوصل إلى علاقات تفاضلية بين التحويلين $f(z)$ و $h(\varsigma)$ تؤدي بدورها إلى الحصول على التقديرات المناسبة كما سنرى.

لتكن z نقطة مثبتة ولكن مختارة كيفياً من قرص الواحدة . من المعلوم [4] أن التحويل :

$$w(\varsigma)=\frac{\varsigma+z}{1+\bar{z}\varsigma} \qquad (7)$$

ينقل قرص الواحدة إلى نفسه بحيث ينتقل مركز القرص $\varsigma=0$ إلى النقطة z . وبما أن:

$$w^{(n)}(\varsigma)=n!(-1)^{n-1}\frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\varsigma)^{n+1}}\bar{z}^{n-1} \quad , n=1,2,3,... \qquad (8)$$

فإن:

$$w(0)=z,\ w'(0)=1-|z|^2,...,\ w^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}n!\left(1-|z|^2\right)\bar{z}^{n-1} \qquad (9)$$

فإذا كان الآن $f\in S$ و z نقطة كيفية من D فإن التابع:

$$f(w(\varsigma))=f\left(\frac{\varsigma+z}{1+\bar{z}\varsigma}\right)$$

سيكون تحليلياً ومتبايناً في القرص D وبما أن :

$$f(w(0))=f(z),\ [f(w(0))]'=\left(1-|z_0|^2\right)f'(z)$$

فإن لمنشوره في سلسلة تايلور الشكل:

$$f(w(\varsigma))=f(z)+\left(1-|z_0|^2\right)f'(z)\varsigma+...$$

$$h''(0)=\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-|\bar{z}|^2\right)-2\bar{z}$$

بإجراء التحويل :

$$h(\varsigma)=\frac{f(w(\varsigma))-f(z)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z)}=\varsigma+a'_2\varsigma^2+...+a'_n\varsigma^n+...... \qquad (10)$$

يصبح التابع الجديد $h(\varsigma)$ متبايناً وبالتالي منتمياً للفضاء S ويكون بحسب نظرية تايلور في النشر:

$$a'_n=\frac{h^n(0)}{n!},\ n=2,3,....\,.$$

وعندئذ بحسب نظرية دي برانج [7] يكون:

$$\left|h^n(0)\right|=\left|n!\,a'_n\right|\le n\,n!\,,\quad n=2,3,.... \qquad (11)$$

باستخدام التابع $h(\varsigma)$ سوف نبرهن على صحة التمهيدية الآتية:

تمهيدية1: إذا كان $f\in S$ و $r=|z|<1$ فإن:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)=h''(0)+2\bar{z} \qquad (12)$$

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2=h'''(0)+6h''(0)\bar{z}+6\bar{z}^2 \qquad (12')$$

$$\frac{f^{(4)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^3=h^{(4)}(0)+12h'''(0)\bar{z}+36h''(0)\bar{z}^2+24\bar{z}^3 \qquad (12'')$$

البرهان: بوضع $A=\frac{1}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z)}$ ثم اشتقاق التابع $f(w(\zeta))$ بالنسبة للمتحول ς يكون:

$$h'(\varsigma)=A[f(w(\varsigma))-f(z)]'=A\,f'(w)w'(\varsigma). \qquad (13)$$

$$h''(\varsigma)=A\{f''(w)[w'(\varsigma)]^2+f'(w)w''(\varsigma)\}. \qquad (14)$$

$$h'''(\varsigma)=A\{f'''(w)[w'(\varsigma)]^3+3f''(w)w'(\varsigma)w''(\varsigma)+f'(w)w'''(\varsigma)\}. \qquad (15)$$

وهكذا ... .

بتعويض النقطة $\varsigma=0$ في (14) سيكون بحسب (9):

$$h''(0)=A\left[f''(z)\left(1-|z|^2\right)^2+f'(z)(-2)\left(1-|z|^2\right)\bar{z}\right]$$

وبتعويض A بقيمتها يكون بعد الاختصار:

$$h''(0)=\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-|\bar{z}|^2\right)-2\bar{z}$$

ومنه:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)=h''(0)+2\bar{z}\ ,\ r=|z|$$

وهي العلاقة (12) .

للحصول على العلاقة $(12')$ نعوض $\varsigma=0$ في (15) ثم نعوض A بقيمتها فيكون :

$$h'''(0)=A\left[f'''(z)\left(1-r^2\right)^3-6f''(z)\left(1-r^2\right)^2\bar{z}+6f'(z)\left(1-r^2\right)\bar{z}^2\right]$$

$$=\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2-6\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)\bar{z}+6\bar{z}^2\ .$$

ومنه

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2=h'''(0)+6\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)\bar{z}-6\bar{z}\ .$$

وبالإستفادة من (12)نجد أن:

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2=h'''(0)+6\left(h''(0)+2\bar{z}\right)\bar{z}-6\bar{z}^2$$

$$=h'''(0)+6h''(0)\bar{z}+6\bar{z}^2\ .$$

وهي العلاقة $(12')$.

وبشكل مشابه في حالة $n=4$ سيكون بعد حساب المشتقات ثم التعويض بـ $\varsigma=0$:

$$h^{(4)}(0)=\frac{f^{(4)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^3-12\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2\bar{z}+36\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)\bar{z}^2-24\bar{z}^3$$

وبالتالي:

$$\frac{f^{(4)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^3=h^{(4)}(0)=12\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2\bar{z}-36\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)\bar{z}^2+24\bar{z}^3$$

والآن بتعويض المقدارين:

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^2\ ,\quad \frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)$$

بما يناسبهما في(12)و $(12')$ ثم الاختصار والترتيب سنحصل على العلاقة:

$$\frac{f^{(4)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^3=h^{(4)}(0)+12h'''(0)\bar{z}+36h''(0)\bar{z}^2+24\bar{z}^3$$

وهي العلاقة المطلوبة$(12'')$.

سوف نعمم النتيجة السابقة من أجل كل n من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية2: إذا كان $f\in S$ و $r=|z|<1$ فإن:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{n-1}=h^{(n)}(0)+\sum_{k=1}^{n-2}A_k\,h^{(n-k)}(0)\,\bar{z}^k+n!\,\bar{z}^{n-1}\qquad(16)$$

علماً أن A_k تعطى بالعلاقات:

$$A_k=\frac{n!}{(n-k)(n-k)!}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right],\ \ k=1,2,\dots,n-2 \qquad (17)$$

البرهان: بمتابعة الإشتقاق في (15) ثم تعويض المقادير:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{k-1}\ ,\ k=2,3,\dots,n-1$$

بما يقابلها من المشتقات $h^{(k)}(0)$ بشكل مشابه للحالتين $n=3$ و $n=4$ فإننا نحصل على العلاقة:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{n-1}=h^{(n)}(0)+A_1h^{(n-1)}(0)\bar{z}+\dots+A_kh^{(n-k)}(0)\bar{z}^k+\dots+n!\,\bar{z}^{n-1}$$

ولكي نتوصل إلى التعبير المناسب بواسطة التوافيق عن الأمثال A_k نلاحظ أولاً أن A_1 في العلاقة $(12')$ (أي عندما $n=3$) تقبل التوزيع المناسب الأتي:

$$A_1=6=\frac{3!}{2\cdot 2!}\left[3\binom{1}{1}+\binom{1}{0}\right]$$

حيث نقبل أن : $A_0=1\ ,\ A_2=6$. وفي حالة $n=4$ يمكن التحقق بسهولة أن الأمثال العددية في العلاقة $(12'')$ تقبل التوزيع الآتي:

$$A_1=12=\frac{4!}{3\cdot 3!}\left[4\binom{2}{1}+\binom{2}{0}\right]$$

$$A_2=36=\frac{4!}{2\cdot 2!}\left[4\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\right]$$

حيث نقبل أن : $A_0=1\ ,\ A_3=24$. وهكذا بتكرار هذه العملية وب محاكمة مشابهة نحصل عن طريق الاستقرء الرياضي من أجل $k=1,2,\dots,n-2$ على أن:

$$A_k=\frac{n!}{(n-k)(n-k)!}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right],$$

حيث نقبل أن يكون: $A_0=1\ ,\ A_{n-1}=n!$. بذلك تكون المساواة (16)صحيحة ولها الشكل:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{n-1}=h^{(n)}(0)+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!\,h^{(n-k)}(0)}{(n-k)(n-k)!}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right]+n!\,\bar{z}^{n-1} \qquad (18)$$

وهو المطلوب.

3. تقدير طويلة المشتقات في الفضاء S

سوف نستفيد من المناقشة السابقة لتقدير طويلة المشتقات من المرتبة n في الفضاء $f\in S$.

نظرية1. إذا كان $f\in S$ فإن:

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \le n!\ \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}\ ,|z|<1\quad n=2,3,... \tag{19}$$

البرهان: بالاستفادة من (18) يكون:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{n-1} = h^{(n)}(0)+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!\,h^{(n-k)}(0)}{(n-k)(n-k)!}\left[n\binom{n-2}{k}\right]\bar{z}^k$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!\,h^{(n-k)}(0)}{(n-k)(n-k)!}\left[\binom{n-2}{k-1}\right]\bar{z}^k\ +n!\,\bar{z}^n$$

بوضع $|z|=r<1$ والأخذ بالحسبان أن $\left|h^{(n)}(0)\right| \le n\cdot n!$ و $\left|h^{(n-k)}(0)\right| \le (n-k)(n-k)!$ فإننا نحصل على:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{n-1}\right| \le \left|h^{(n)}(0)\right|+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!\left|h^{(n-k)}(0)\right|}{(n-k)(n-k)!}\left[n\binom{n-2}{k}\right]\left|\bar{z}\right|^k$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!\left|h^{(n-k)}(0)\right|}{(n-k)(n-k)!}\left[\binom{n-2}{k-1}\right]\left|\bar{z}\right|^k\ +n!\left|\bar{z}\right|^n$$
$$\le n\cdot n!+\sum_{k=1}^{n-2}n!\cdot n\binom{n-2}{k}r^k+\sum_{k=1}^{n-2}n!\binom{n-2}{k-1}r^k++n!\,r^{n-1}$$
$$=n!\left[n+\sum_{k=1}^{n-2}n\binom{n-2}{k}r^k+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2}{k-1}r^k+r^{n-1}\right]$$

بإضافة الحد الأول إلى المجموع الأول والحد الأخير إلى المجموع الثاني نستطيع بدء العد من الصفر في كلا المجموعين ويكون:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\left(1-r^2\right)^{n-1}\right| \le n!\left[n\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}r^k+r\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}r^k\right]$$
$$=n!\,(n+r)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}r^k=n!\,(n+r)(1+r)^{n-2}$$

ينتج من ذلك ومن (4) أن:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{|f'(z)|}{\left(1-r^2\right)^{n-1}}n!\,(n+r)(1+r)^{n-2}\ \le \frac{1+r}{(1-r)^3}\,\frac{n!\,(n+r)(1+r)^{n-2}}{(1-r)^{n-1}(1+r)^{n-1}}\ =n!\,\frac{n+r}{\left(1-r^2\right)^{n+2}}$$

وبالتالي:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le n!\,\frac{n+r}{\left(1-r^2\right)^{n+2}}\ ,\ |z|=r$$

وهو المطلوب.

نتيجة1. باشتقاق تابع كيبي (5) n مرة نحصل على العلاقة:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n+z}{(1-z)^{n+2}}\ ,\ \ n=1,2,... \tag{20}$$

ويكون :

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|n!\,\frac{n+z}{(1-z)^{n+2}}\right|\le n!\,\frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}\;,\quad n=1,2,3,... \qquad (21)$$

وبما أنه توجد نقاط (مثل $z=\alpha>0$) حيث تتحول فيها المتراجحات (21) إلى مساواة:

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|n!\,\frac{n+\alpha}{(1-\alpha)^{n+2}}\right|=n!\,\frac{n+|\alpha|}{(1-|\alpha|)^{n+2}}\;,\quad n=2,3,...$$

فإننا نستنتج أن التقديرات (18) لا تقبل التحسين ونستنتج أن تابع كيبي هو التابع الحدودي بالنسبة لتقدير طويلات المشتقات من أي مرتبة في الفضاء S .

4. تقدير طويلة المشتقات في الفضائين S^* و S°

أ)**<u>الفضاء</u>** S^*. الفضاء S^* هو الفضاء الجزئي من S الذي يكون كل من توابعه نجمياً. ويكون التابع نجمياً إذا كان التابع هذا ينقل قرص الواحدة إلى منطقة نجمية بالنسبة للصفر وتكون المنطقة نجمية بالنسبة للصفر إذا كان كل مستقيم مار من الصفر يقطع المنطقة هذه وفق قطعة مستقيمة واحدة فقط . يعرف الفضاء S^* بفضاء التوابع النجمية [8].

يعد تابع كيبي أحد العناصر الأساسية في فضاء التوابع النجمية فهو ينقل قرص الواحدة إلى المستوي العقدي محذوفاً منه المجال $\left(-\infty,1/4\right]$

وبذلك تكون المتراجحات (21) صحيحة في هذا الفضاء وغير قابلة للتحسين فيه.

ملاحظة1. تعد العلاقة الآتية مميزة لهذا الفضاء:

$$f\in S^*\Leftrightarrow Re\frac{zf'(z)}{f(z)}\ge 0 \qquad (22)$$

ومن خلال هذه العلاقة يبرهن بسهولة على فرضية بيبرباخ في هذا الفضاء دون الاعتماد على نظرية دي برانج[10] .

ب) **الفضاء** S°: الفضاء S° هي أسرة التوابع المحدبة في S. والتابع المحدب هو التابع الذي ينقل قرص الواحدة إلى منطقة محدبة.

في هذه الفضاء تتحقق بالنسبة للأمثال التقديرات الآتية [9]:

$$|a_n|\le 1,\;\; n=1,2,... \qquad (23)$$

ومن العلاقة [9] :

$$f\in S^\circ\Leftrightarrow zf'(z)\in S^*$$

نستنتج بحسب (3) أن

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\le|zf'(z)|\le\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\,,\; z\in D$$

وبالتالي إذا كان $f\in S^\circ$ فإن:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2}, |z|=r, \quad z\in D \qquad (24)$$

سوف نستفيد من هذه العلاقة ومن النظرية1 لبرهان النظرية الآتية:

نظرية2. إذا كان $f \in S^\circ$ و فإن:

$$\left| f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{(1-r)^{n+1}}, \quad n=2,3,\ldots, \quad |z|=r<1 \qquad (25)$$

البرهان: بملاحظة أن $\left|h^{(n)}(0)\right| \le n!|a_n| \le n!$ في الفضاء S° – بحسب (23) – فإن العلاقة (18) تؤدي إلى:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}(1-r^2)^{n-1}\right| \le \left|h^{(n)}(0)\right| + n!|\bar z|^{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!\left|h^{(n-k)}(0)\right|}{(n-k)(n-k)!}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right]|\bar z|^k + n!|\bar z|^{n-1}$$

$$\le n! + \sum_{k=1}^{n-2}\frac{n!}{(n-k)}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right]r^k + n!\,r^{n-1}$$

$$\le n!\left\{1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{(n-k)}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right]r^k + r^{n-1}\right\}$$

ومن المطابقة:

$$\frac{1}{(n-k)}\left[n\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right]=\binom{n-1}{k}$$

نستنتج أن:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}(1-r^2)^{n-1}\right| \le n!\left[1+\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-1}{k}r^k + r^{n-1}\right] = n!\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}r^k = n!\,(1+r)^{n-1}$$

ومنه بحسب (24):

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{|f'(z)|}{(1-r^2)^{n-1}}n!\,(1+r)^{n-1} \le \frac{1}{(1-r)^2}\,\frac{n!\,(1+r)^{n-1}}{(1-r)^{n-1}(1+r)^{n-1}} = n!\frac{1}{(1-r)^{n+1}}$$

وهو المطلوب.

نتيجة2. يمثل التابع $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ تابعاً حدودياً بالنسبة لتقدير الأمثال في الفضاء S° وهذا ناتج من أن لمنشور هذا التابع في سلسلة تايلور الشكل:

$$f(z)=z+z^2+\ldots+z^n+\ldots, \qquad |z|<1 \qquad (26)$$

حيث نلاحظ أن: $|a_n|=1$. باشتقاق هذا التابع n مرة نحصل على العلاقة:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots$$

ويكون :

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!}{(1-|z|)^{n+1}}, \quad n=2,3,\ldots \qquad (21)$$

وبما أنه توجد نقاط (مثل $z = \alpha > 0$) حيث تتحول فيها المتراجحات (21) إلى مساواة:

$$\left| f^{(n)}(z) \right| == \frac{n!}{\left(1-|\alpha|\right)^{n+1}} \ , \quad n = 2,3,...$$

فإننا نستنتج أن التقديرات (25) دقيقة وأن التابع (26) هو التابع الحدودي بالنسبة لتقدير طويلات المشتقات من أي مرتبة في الفضاء S° .

الاستنتاجات والتوصيات:

تم القيام ببعض التقديرات لطويلات المشتقات في الفضاءات S و S^* و S°. ومتابعة لذلك يمكن القيام بتقديرات مشابهة في فضاءات جزئية أخرى مثل:

- الفضاء V وهو فضاء الدوال f التحليلية في قرص الواحدة D التي تحقق الشرط
$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad |arg\, f'(z)| < \pi/2 \ .$$
تعرف هذه الفضاء بفضاء الدوال التحليلية ذات الدوران المحدود.

- الفضاء T_r وهو فضاء التوابع التحليلية في القرص الواحدي التي لها الشكل
$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ..., \qquad |z| < 1$$
حيث a_n أعداد حقيقية.

المراجع:

[1] ALEKSANDROV,I. *Boundary Values of Functional on the Class of Holomorphic Functions Univalent in a Circle*. Sibirsk, Mat. Z. 4 , (1963).

[2] BADDOUR,H. ARMALE, H. *The estimation of Modules of Fifth Derivative for the Analytic and Univalent Functions*. Damascus Univ. Journal v10. No. (37-38) 1994

[3] BIEBERBACH, **L**. *Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Sitzungs -berichte Preussische Akademie der Wissenschaften, 1916, 940-955.

[4] DUREN, P.L. *Univalent Functions* . Springer Science & Business Media, Jul 2, 2001 - Mathematics - 384 p.

[5] DUREN, P.L. *Coefficients of univalent functions*. Bull. Amer. Math. Soc.Volume 83, Number 5 (1977), 891-911.

[6] KOREEVAAR, J. *Ludwig Bieberbach's Conjecture and Its Proof by Louis de Branges* . The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 7 (Aug. - Sep., 1986 , Accessed 20/11/2009

[7] NUNOKAWA, M. YAVUZ DUMAN, E. *Properties of functions concerned with Caratheodory functions*. ANNALES ,U M C-S , Lublin – Polonia Vol. LXVII, No. 2, 2013 Sectio A 33–41

[8] PEDERSON, R. SCHIFFER, M. *A Proof of Bieberbach's Conjecture For the Fifth Coefficient* . Arch. Rational Mech. Anal. 45.(1972), 161- 193

[9] POMMERENKE, Ch. *Univalent Functions*. Vandehhoeck & Go`ttingen 1975.

[10] ROGOSINSKI, W. *On the Coefficients of subordiinate functions*, proc. London Mah.soc 48, 1943.