مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (6) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (6) 2016

الإستمرار التام لمؤثر أوريسون في فضاء أورليتش

الدكتور أحمد بكداش*
خالد عبد العال**

(تاريخ الإيداع 15 / 5 / 2016. قُبِل للنشر في 17 / 11 /2016)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو دراسة وتعميم بعض النتائج المتعلقة بالاستمرار التام لمؤثر أوريسون بمتحولين، والمعطى بمعادلة تكاملية على مجموعة G قيوسة وفق قياس لوبيغ، من خلال دراسة التقارب المنتظم لمتتالية من مؤثرات أوريسون k_n، المعطاة بالتوابع $k_n(x,y,u)$، وذلك باستخدام التقارب بالقياس من خلال الإعتماد على شرط كاراثيودوري للمجموعات القيوسة.

الكلمات المفتاحية : فضاء أورليتش ، مؤثر أوريسون، قياس لوبيغ، التقارب بالقياس، $N\ M(u)-$ دالة.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** طالب دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (6) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (6) 2016

The complete continuity of urysohn operator in orlicz space

Dr. Ahmed bakdash*
Khaled abd alaal**

(Received 15 / 5 / 2016. Accepted 17 / 11 /2016)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to study and generalize some results that related by the complete continuity of the urysohn.s operator of two variables on a set G on which a lebesgue meagure is defined and study uniform convergence sequence of the urysohn .s.operators K_n that defined by functions $k_n(x,y,u)$ using convergence meager Depending on caratheodory condition of measurable sets .

Key words : Orlicz space .urysohn operator. lebesgue meager. convergence in measure. $M(u)-Nfunction$

***Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.**
****Master Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.**

مقدمة :

تعتبر المؤثرات التكاملية غير الخطية من المواضيع الهامة التي تعتمد في دراستها على صفوف الدوال المحدبة المستمرة والمتراصة، والتي تلعب دوراً هاماً في فضاء أورليتش وتطبيقاته في التحليل التابعي. وإن دراسة المعادلات التكاملية بالطريقة غير الخطية أظهرت صعوبتها، لذلك تم اللجوء لدراسة صفوف المعادلات غير الخطية من خلال المسائل غير الخطية للمعادلات التكاملية، والتي اهتم بها العديد من الرياضيين $[5,2]$

وسندرس في هذا البحث الاستمرار التام لأحد أهم المؤثرات التكاملية غير الخطية، وهو مؤثر أوريسون في فضاء أورليتش.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث الى دراسة الشروط التي تجعل مؤثر أوريسون مستمراً تماماً في فضاء أورليتش، نظراً لأهميته التطبيقية في إثبات وجودية الحل لبعض المعادلات، نذكر منها $A\varphi=\lambda\varphi$، حيث إن A مؤثر غير خطي في أحد فضاءات باناخ E. حيث تمت دراسة الاستمرار التام لمؤثر أوريسون بتشكيل متتالية من مؤثرات أوريسون المستمرة تماما ودراسة تقاربها.

طرائق البحث وموادّه:

تعتمد هذه الدراسة على بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية في مجال التحليل التابعي التي تساعدنا في عرض الموضوع . واستخدمنا في دراستنا مفهوم التراص، وشروط الاستمرار التام التي درسها العديد من الباحثين في أعمال مختلفة $[16]$.

1- مفاهيم أساسية لأصناف خاصة من الدوال المحدبة $[11,10,9,8,6,4,1]$

سنبدأ بذكر بعض المفاهيم الأساسية التي سنعتمد منها في دراستنا على المجموعة G المغلقة، والمحدودة في الفضاء الإقليدي منتهي البعد والقيوسة وفق قياس لوبيغ ، والمجموعة $\hat{G}$ هي الجداء التبولوجي $G\times G$.

- يقال عن $M\left(U\right)$ دالة ذات متغيرات حقيقية إنها دالة محدبة إذا تحقق

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\le 1/2\left[M\left(u_1\right)+M\left(u_2\right)\right]$$

وذلك من أجل جميع القيم u_1,u_2، و بتعبير اخر

$$\mathrm{M}\left[\propto \mathrm{U}_1+\left(1-\propto\right)\mathrm{U}_2\right]\le\propto M\left(\mathrm{U}_1\right)+\left(1-\propto\right)M\left(\mathrm{U}_2\right).$$

- كل دالة محدبة $\mathrm{M}(\mathrm{U})$ تحقق الشرط $M\left(a\right)=0$ يمكن أن تمثل بالعلاقة التالية $M\left(\mathrm{U}\right)=\int_0^{\mathrm{U}}\mathrm{P}\left(\mathrm{t}\right)\,\mathrm{dt}$

حيث إن $\mathrm{p}\left(\mathrm{t}\right)$ دالة مستمرة من اليمين، وغير متناقصة $a\in\left[a,b\right]$.

- تدعى $M\left(U\right)$ بـ $N-$دالة إذا مثلت بالشكل $M\left(\mathrm{U}\right)=\int_0^{|\mathrm{U}|}\mathrm{P}\left(\mathrm{t}\right)\,\mathrm{dt}$ ،

حيث إن $\mathrm{P}\left(\mathrm{t}\right)$ دالة موجبة عندما $t>0$، ومستمرة من اليمين عندما $t\ge 0$، وتحقق الشرطين

$$\mathrm{p}\left(\infty\right)=\lim_{t\to\infty}p\left(t\right)=\infty \qquad \mathrm{p}\left(0\right)=0 .$$

● تعريف آخر لـ $M\left(U\right)$ $N-$ دالة:

الدالة المحدبة المستمرة $M\left(U\right)$ تدعى $N-$دالة اذا وفقط اذا حققت الشرطين السابقين، لأنه بذلك سيكون

$$\lim_{u\to 0}\frac{M\left(u\right)}{u}=0 \quad .$$

وهذا يعني أن $M\left(0\right)=0$ ، وبالتالي فإنها ستقبل التمثيل بالصيغة:

$$\mathrm{M}\left(\mathrm{U}\right)=\int_{0}^{|\mathrm{U}|}\mathrm{P}\left(\mathrm{t}\right)\,\mathrm{dt}$$

حيث إن $p\left(t\right)$ غير متناقصة وذلك من أجل كل $u>0$.

● لتكن $p\left(t\right)$ دالة موجبة عندما $t>0$، ومستمرة من اليمين من أجل $t\geq 0$، وهي دالة غير متناقصة وتحقق

الشرطين، عندئذ نعرف $q\left(s\right)$ بالمساواة $q\left(s\right)=\sup\limits_{p(t)\leq s} t$، بحيث $s\geq 0$ نلاحظ أنه من السهولة أن نرى أن الدالة $q\left(s\right)$ تتمتع بصفات الدالة $p\left(t\right)$ نفسها حيث إن $q\left(s\right)$ دالة موجبة من أجل $s>0$، ومستمرة من اليمين عندما $s\geq 0$، وهي دالة غير متزايدة وتحقق الشرطين

$$q\left(0\right)=0 \qquad \lim_{s\to\infty} q\left(s\right)=\infty$$

ينتج لدينا مباشرة من تعريف الدالة $q\left(s\right)$ أن

$$q\left[p\left(t\right)\right]\geq t \qquad\qquad p\left[q\left(s\right)\right]\geq s$$

و من أجل $\varepsilon>0$ ينتج لدينا $\quad p\left[q\left(s\right)-\varepsilon\right]\leq s \qquad\qquad q\left[p\left(t\right)-\varepsilon\right]\leq t$

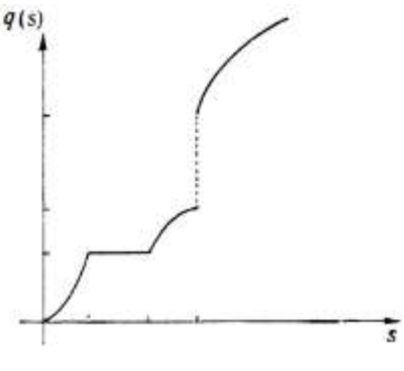
إذا كانت الدالة $p\left(t\right)$ مستمرة ومتزايدة فإن الدالة $q\left(s\right)$ هي المعكوس الصحيح للدالة $p\left(t\right)$.

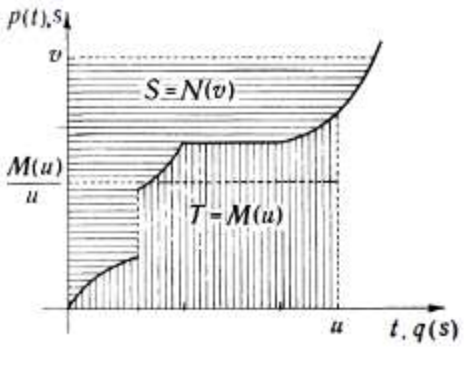
في الحالة العامة:

الدالة $q\left(s\right)$ تدعى المعكوس الصحيح للدالة $p\left(t\right)$ ، وكذلك $p\left(t\right)$ تدعى المعكوس الصحيح للدالة $q\left(s\right)$.

وندعو الدالتين $\quad M\left(u\right)=\int_{0}^{|u|}p\left(t\right)\,dt \qquad N\left(v\right)=\int_{0}^{|u|}q\left(s\right)\,ds$

$N-$ دالتين متكاملتين بشكل متبادل ، والموضحتين بالشكل:





- متراجحة يونغ:

من أجل كل u,v ندعو المتراجحة التالية بمتراجحة يونغ $uv \le M(u)+N(v)$ ،

من الواضح من الشكل السابق أن متراجحة يونغ تخفض إلى المساواة عندما

$$v = p(|u|) \quad \operatorname{sgn} u \quad , \quad u = q(|v|) \quad \operatorname{sgn} v$$

بحيث ينتج

$$|u|.p(|u|) = M(u) + N\left[p(|u|)\right]$$
$$|v|.q(|v|) = M\left[q(v)\right] + N(v)$$

من متراجحة يونغ $N(v) \ge uv - M(u)$

وباستبدال $u = q(|v|)\operatorname{sgn} v$ نحصل على $N(v) = \max\limits_{u \ge 0}\left[u|v| - M(u)\right]$.

- لنفرض أن المتراجحة $M_1(u) \le M_2(u)$ محققة من أجل $M_1(u), M_2(u)$ دالة $N-$ عندما $u \ge u_0$ عندئذ فإن $N_2(v) \le N_1(v)$ من أجل $N_1(v), N_2(v)$ دالتين $N-$ دالتين متكاملتين للدالتين $M_1(u), M_2(u)$ وذلك من أجل $v \ge v_0 = p_2(u_0)$.

- تكون الدالة $M_1(u) < M_2(u)$ إذا وجد الثابتان k , u_0 بحيث $u \ge u_0$ $M_1(u) \le M_2(ku)$

ونقول عن الدالتين $M_1(u), M_2(u)$ إنهما متكافئان، ونكتب $M_1(u) \sim M_2(u)$.

إذا تحقق $M_2(u) \le M_1(u)$ و $M_1(u) \le M_2(u)$ بمعنى تكون الدالتان السابقتان متكافئتين

إذا وجدت الثوابت الموجبة k_1, k_2, u_0 بحيث إن

$M_1(k_1 u) \le M_2(u) \le M_1(k_2 u)$.

- نقول عن $M(u)$ $N-$ دالة إنها تحقق الشرط Δ_2 من أجل قيم كبيرة للمتغير u ،

إذا وجدت الثوابت $u_0 \ge 0$ $k > 0$ بحيث

$u \ge u_0$, $M(2u) \le kM(u)$.

- الشرط اللازم والكافي حتى تحقق $M(u)$ $N-$ دالة الشرط Δ_2 هو وجود الثوابت

$u \ge u_0$ و α, u_0 بحيث إن $\dfrac{u \quad p(u)}{M(u)} < \alpha$

حيث إن $p(u)$ هو المشتق اليميني ل $M(u)$ $N-$ دالة.

- الشرط اللازم والكافي حتى تحقق $M(u)$ $N-$ دالة الشرط Δ_2 هو أن تحقق الدالة المكملة لها $N(v)$ $N-$ دالة الشرط التالي $v \ge v_0$, $N(v) \le \left(\frac{1}{2L}\right)N(Lv)$.

- نقول عن $M(u)$ $N-$ دالة: إنها تحقق الشرط Δ'' إذا وجد الثابت الموجب c، وكذلك u_0 بحيث $u_0 \ge 0$ $c > 0$ $u,v \ge u_0$ $M(uv) \le cM(u).N(v)$.

- إذا حققت $M(u)$ $N-$ دالة الشرط Δ'' فإنها ستحقق الشرط Δ_2.
- نقول إن $M(u)$ $N-$دالة إنها تحقق الشرط Δ_3 إذا كانت تكافئ $|u|M(u)$ $N-$دالة.

2− مفاهيم أساسية حول فضاء أورليتش ومؤثر أوريسون $[16,15,14,13,12,7,5,3,2]$

- صفوف أورليتش:

لتكن G مجموعة محدودة في فضاء إقليدي منتهي البعد ذي قياس، ولتكن $M(u)$ $N-$ دالة عندئذ فان مجموعة الدوال $u(x)$ ، والتي تحقق $\rho(u,M)=\int_G M\left[u(x)\right]\, dx<\infty$ تدعى بصفوف أورليتش $L_M(G)=L_M$.

- يكون صف أورليتش $L_{M1}\subset L_{M2}$ إذا وفقط إذا وجد الثابت الموجب a ووجد u_0 بحيث $u\geq u_0$ $M_2(u)\leq aM_1(u)$.
- فضاء أورليتش:

لتكن $M(u)=\int_0^{|u|}p(t)\, dt$ $N(v)=\int_0^{|u|}q(s)\, ds$ بـ $N-$ الدالتين المتكاملتين بشكل متبادل

عندئذ سنرمز $L_M^*(G)=L_M^*$ لمجموعة الدوال $u(x)$، والتي تحقق $\langle u,v\rangle=\int_G u(x)\ v(x)\ dx<\infty$،

وذلك من أجل كل $v(x)\in L_N$. ينتج مما سبق أن L_M^* مجموعة خطية، ومن متراجحة يونغ فإنه من أجل كل زوج من الدوال $v(x)\in L_M$, $u(x)\in L_M$ يكون $L_M\subset L_M^*$.

إن ما سبق يتيح لنا تعريف نظيم للدوال $u(x)$ بالشكل: $\|u\|=\sup\limits_{\rho(V,N)\leq 1}\left|\int_G u(x)v(x)\ dx\right|$ وعندها ستشكل المجموعة L_M^* فضاءاً خطياً منتظماً يدعى بفضاء أورليتش.

- E_M مجموعة مغلقة من التوابع المحدودة في L_N^*.
- شرط كاراثيودوري:

يقال عن التابع الحقيقي $f(x,y,u)$ بالمتحولين $x,y\in G,-\infty<u<\infty$ إنه يحقق شرط كاراثيودوري إذا وفقط إذا كان مستمرا بالمتحول u في كل مكان تقريبا، وذلك لاجل جميع x,y، وقيوس بـ x,y عندما يكون u ثابتاً.

- مؤثر أوريسون:

يعرف مؤثر أوريسون (*Urysohn .B.S Operator*) بالمعادلة التكاملية غير خطية التالية:

$$Ku(x)=\int_G k[x,y,u(y)]dy \qquad (1)$$

بفرض $k(x,y,u)$ دالة محققة لشرط كاراثيودوري ، بمعنى أن هذه الدالة مستمرة في u من أجل جميع قيم المتحولات $x,y\in G$ ، وقابلة للقياس في كل من المتغيرين x,y ، وذلك من أجل كل u .

لن نتوقف عند قيوسية المجموعات والدوال، وسنفرض في دراستنا أن الدالة $k(x,y,u)$ تحقق المتراجحتين التاليتين

$$|k(x,y,u)| \le k(x,y)\left[a(x)+R(|u|)\right] \qquad (x,y \in G \;, -\infty < u < +\infty) \quad (2)$$

$$\iint\limits_{\hat{G}} M\left[k(x,y)\right]dxdy \le b < +\infty \qquad (3)$$

$-N\,M(u)$ تابع،$a(x)$ دالة غير سالبة.

$R(|u|)$دالة مستمرة غير سالبة أيضاً ومتزايد باضطراد من أجل كل $0 < u$.

سندرس ونهتم بالحالات التي يكون بها الشرطان السابقان كافيين ، ليكون مؤثر أوريسون في بعض فضاءات أورليتش L_ϕ^* تام الاستمرار.

ان الشرطين $(2),(3)$ يعنيان أن قيم المؤثر (1) محدودة على الكرة $T\left(\theta,r,L_\phi^*\right)$، أي أن

$$\|Ku\|_\phi \le c \quad ,\left(\|u\|_\phi \le r\right) \qquad (4)$$

من الطبيعي أن الثابت c يعتمد على الثابت b، والدوال $a(x),R(|u|)$ ،وكذلك الدالة $-N\,M(u)$ دالة

ليكن $k(x) \in L_M^*$ دالة غير سالبة ،وتحقق $\int\limits_G M[k(x)]dx \le \dfrac{b}{\mu(G)}$

عندئذ فإن المؤثر المعرف بالمساواة

$$Ku(x) = \int\limits_G \frac{k(x)+k(y)}{2} R\left(|u(y)|\right)dy$$

سيحقق الشرطين $(2),(3)$ وبحسب (4)

$$\left\| \int\limits_G k(x)R\left(|u(y)|\right)dy + \int\limits_G k(y)R\left(|u(y)|\right)dy \right\|_\phi \le 2c \quad ,\left(\|u\|_\phi \le r\right) \qquad (5)$$

وبالتالي $k(x) \in L_\phi^*$ ، ومنه نستنتج أن $L_M^* \subset L_\phi^*$.

وجدنا مما سبق وعندما تكون قيم $\alpha > 0$ كبيرة يتحقق لدينا

$$\phi(\alpha u) < M(u) \qquad (6)$$

من (5)كون $\int\limits_G k(y)R\left(|u(y)|\right)dy$ محدودة بالدالة $k(x) \in L_M^*$ ، و المؤثر

$$Ru(x) = R\left(\frac{r|u(x)|}{2}\right)$$

يحول الكرة $T\left(\theta,r,L_\phi^*\right)$ إلى مجموعات محدودة في الفضاء L_N^* .

$N(v)$ $-N$ دالة مكملة للدالة $M(u)$ ، وبالتالي فإنه يمكن إيجاد الثوابت c_1,c_2,c_3 بحيث

$$f\left[\frac{1}{c_1}R\left(\frac{ru}{2}\right)\right] \le c_2 + c_3\phi(u) \;, \qquad (-\infty < u < +\infty)$$

وينتج من أجل قيم كبيرة للمتغير $0<u$ $\quad N\left[\beta R(\gamma u)\right]<k\phi(\alpha u) \qquad (7)$

$$N\left[\beta R(\gamma u)\right]<kM(u) \qquad (8)$$

وهذا ما يثبت أن $\phi(u)$ تحقق المتباينات $(6),(7)$.

- محدودية مؤثر أوريسون:

إن دراسة محدودية مؤثر أوريسون مركزة حول الحالة التي تكون بها الدالة $N(v)$ تحقق الشرط $\ddot{\Delta}$.

مبرهنة 2.1: $[5,3]$

بفرض أن الدالة $N(v)$ تحقق الشرط $\ddot{\Delta}$إضافة إلى الشروط $(2),(3),(6),(7)$، فإن المؤثر (1) سيكون معرفاً على الكرة $T\left(\theta,\frac{\gamma}{\alpha};L_{\phi}^{*}\right)$، ومجموعة قيمه ستكون محدودة في L_{ϕ}^{*}، وسيتحقق

$$\left(\|u\|_{\phi}\le\frac{\gamma}{\alpha}\right) \quad , \quad \|Ku\|_{\phi}\le c\left\|k(x,y)\right\|_{\hat{M}} . \qquad (9)$$

النتائج والمناقشة:

- الانتقال إلى مؤثرات أبسط:

سنفرض أن شروط المبرهنة السابقة محققة، و يمكن إيجاد متتالية من المجموعات المغلقة $\hat{G}_n\subset\hat{G}$ بحيث $\mu\left(\hat{G}\backslash\hat{G}_n\right)<\frac{1}{n}$ ،عندئذ ستكون الدالة $k(x,y,u)$ مستمرة بكل متغيراتها على المجموعات $\hat{G}_n\times\left]-\infty,+\infty\right[$ وكذلك تكون $k(x,y)$, $k(x,y)a(y)$ مستمرة على $\hat{G}_n$ ، لنضع

$$k_n(x,y,u)=\begin{cases} k(x,y,u) & ;\ \{x,y\}\in\hat{G}_n \\ 0 & ;\ \{x,y\}\notin\hat{G}_n \end{cases}$$

إن كلاً من الدوال $k_n(x,y,u)$ تحقق الشرط (2)، واعتمادا على المبرهنة 2.1 يمكن تعريف مؤثرات أوريسون $K_nu(x)=\int_G k_n\left[x,y,u(y)\right]dy$ من الكرة $T\left(\theta,\frac{\gamma}{\alpha};L_{\phi}^{*}\right)$ إلى L_{ϕ}^{*} ، حيث نجد أن متتالية المؤثرات متقاربة بانتظام، وذلك لأن

$$Ku(x)-K_nu(x)=\int k\left[x,y,u(y)\right]\chi\left(x,y,\hat{G}\backslash\hat{G}_n\right)dy .$$

واعتمادا على (2) والمبرهنة 2.1 نجد

$$\|Ku - K_n u\|_\phi \le \left\| \int_G k(x,y)\,\chi\left(x,y,\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)\left[\phi(x)+R\left(|u(y)|\right)\right]dy \right\|_\phi$$
$$\le c\left\| k(x,y)\,\chi\left(x,y,\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)\right\|_{\hat{M}} \qquad \left(\|u\|_\phi \le \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

وبإضافة الشرط $k(x,y)\in\hat{E}_n$ ، إذ إن $\hat{E}_n$ تعني المجموعات المغلقة في فضاء الدوال المحدودة L_N^*

$$\lim_{n\to\infty}\left\| k(x,y)\,\chi\left(x,y,\hat{G}\setminus\hat{G}_n\right)\right\|_{\hat{M}} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}}\|Ku-K_nu\|_\phi = 0$$

وهذا يعني أن متتالية المؤثرات متقاربة بانتظام من المؤثر k ، حيث إن هذه المؤثرات k_n المعرفة بالدوال $k_n(x,y,u)$ التي تحقق المتراجحات

$$|k_n(x,y,u)| \le a_n + b_n R\left(|u|\right) \quad ,(-\infty < u < +\infty)$$
$$a_n = \max_{\{x,y\}\in\hat{G}_n}|k(x,y)\,a(x)| \ , \ b_n = \max_{\{x,y\}\in\hat{G}_n}|k(x,y)| \quad *$$

مبرهنة 3.1 :

لنفرض أن الشرط التالي محقق

$$|k(x,y,u)| \le a + R\,|u(y)| \ ; \ (x,y\in G \ , -\infty < u < +\infty) \quad (10)$$

ولنعرف متتالية من الدوال $k_n(x,y,u)$ بالشكل

$$k_n(x,y,u) = \begin{cases} k(x,y,u) & ; \ |u|\le n \\ k(x,y,n)(n+1-u) & ; n<u<n+1 \\ k(x,y,-n)(u+n+1) & ; \ -n-1<u<-n \\ 0 & ; \ |u|\ge n+1 \end{cases}$$

عندها يكون
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\|u\|_\phi\le\frac{\gamma}{\alpha}}\|Ku-K_nu\|_\phi = 0$$

البرهان:

لنأخذ $u(x)\in T\left(\theta,\frac{\gamma}{\alpha};L_\phi^*\right)$، ولنعرف المجموعة $G'=G\left\{|u(x)|>n\right\}$، والذي يحقق قياسها مايلي:

$$\mu(G') \le \frac{1}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}\int_G \phi\left[\frac{\alpha u(x)}{\gamma}\right]dx \le \frac{1}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}\left\|\frac{\alpha}{\gamma}u(x)\right\|_\phi \le \frac{1}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)}$$

يكون لدينا

$$|Ku(x)-K_nu(x)| \le \int_G \left|k\left[x,y,u(y)\right]-k_n\left[x,y,u(y)\right]\right|dy$$
$$\le \int_{G'}\left|k\left[x,y,u(y)\right]\right|dy + \int_{G'}\left|k\left[x,y,u(y)\right]\right|dy$$

حيث إن

$$\psi(x) = n\chi(x,G')\,sign\,u(x)$$

وحسب

$$\|\psi\|_{\varphi} \le \|u\|_{\varphi} \le \gamma/\alpha \qquad (10)$$

$$|Ku(x)-K_n u(x)| \le \int_G \chi\left(x,y,\hat{G'}\right)\left[a+R\left(|u(y)|\right)\right]dy + \int_G \chi\left(x,y,\hat{G'}\right)\left[a+R\left(|\psi(y)|\right)\right]dy$$

حيث إن $\hat{G'} = G \times G'$ ، ومن المبرهنة 2.1 نجد

$$\|Ku - K_n u\|_{\phi} \le \frac{2C\,\mu(G)}{\phi\left(\frac{\alpha n}{\gamma}\right)} N^{-1}\left[\frac{\phi\left(\frac{n\alpha}{\gamma}\right)}{\mu(G)}\right] \qquad ; \qquad \left(\|u\|_{\phi} \le \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

وبذلك يكون الاستمرار التام لمؤثر أوريسون محققاً بإضافة الشرط $k(x,y) \in \hat{E}_n$ ،

وبالتالي يتحقق

$$* \qquad (11) \qquad \left(|u| \ge u_0 \quad \& u_0 = const > 0\right) \qquad k(x,y,u) \equiv 0$$

- بفرض كلاً من $N(v)\,,M(u)$ دالة مكمل للآخر، وأن $N(v)$ $-N$ تحقق الشرط $\overset{''}{\Delta}$ ، وليكن

$$|k(x,y,u)| \le k(x,y)\left[a(x)+R(|u|)\right];(x,y \in G,-\infty<u<\infty) \qquad (12)$$

بحيث إن $a(x) \in L_N^*$, $k(x,y) \in \hat{E}_M$ ، والدالة $R(u)$ غير سالبة ،وغير متناقصة ، ولنفرض وجود الأعداد γ,β,k ،بحيث

$$N\left[\beta R(\gamma u)\right] \le k\left(M(u)\right) \qquad (13)$$

عندئذ فإن المؤثر (1)سيكون معرف على $\left\{T\left(\theta,\gamma;L_{\phi}^*\right) \to L_{\phi}^* \quad ;a.e\right\}$ حيث إن $\varphi(u)$ $-N$ دالة تحقق

$$N\left[\beta R(\gamma u)\right] \le k\,\phi(u) \le k\,M(u) \qquad (14)$$

❖ السؤال البديهي الذي يمكن طرحه:

ما هي الشروط التي يمكن إضافتها حتى يكون المؤثر k ليس فقط معرفاً على الكرة $T\left(\theta,\gamma,L_{\phi}^*\right)$، بل معرف على كامل الفضاء L_{ϕ}^* ؟ .

سيتحقق ذلك بجعل γ,s تأخذ قيماً كبيرة في الشرطين $(13),(14)$ ويكون المؤثر k معرفاً على كامل L_{ϕ}، إذا كانت $\varphi(u)$ $-N$ دالة تحقق الشرط Δ_2، وفي هذه الحالة يكون

$$N\left[\beta R\left(2^s\,\gamma u\right)\right] \le k\,\phi\left(2^s u\right) \le k_1\,\phi(u) \le k_1 M(u)$$

إن مؤثر أوريسون حقق بشكل مماثل الاستمرار التام في الفضاء L_{ϕ}^*، إذا كانت $R(u)$ تحقق الشرط Δ_2

$$R(2u) \le k_1 R(u)$$

في بعض الحالات نكتب الشرطين $(13),(14)$ بصيغة أبسط

فاذا أخذنا عبارة التكافؤ بين التابعين $N\left[\phi(u)\right]\sim\phi(u)$ بمعنى
$N\left[\phi(u)\right]\le\phi(\alpha u)$

عندئذ فإن الشرطين $(13),(14)$ يحققان عندما

$$R\left[\alpha\gamma\, u\right]\le k\,\phi(u)\le kM\,(u) \quad (15)$$

وهذا بدوره يؤدي إلى تحقق :

$$N\left[R\,(\gamma u)\right]\le N\left[k\,\phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right]\le k_1N\left[\phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right]\le k_1\phi(u)\le k_1M\,(u)$$

مبرهنة 3.2 :

لنفرض أن $M\,(u)\,,N\,(v)$ N – دالتان متكاملتان تبادلياً، والدالة $N\,(v)$ تحقق الشرط Δ_3 ، وليكن

$$\left|k\,(x\,,y\,,u)\right|\le k\,(x\,,y\,)\left[a(x\,)+R\left(|u|\right)\right] \quad (x\,,y\,\in G\;,-\infty<u<\infty) \quad (16)$$

$a(x\,)\in L_N^*\;,\quad k\,(x\,,y\,)\in L_M^*=L_M$ $R\,(u)$ دالة غير سالبة ،و متزايدة ، وذلك من اجل $u>0$ ، ولنفترض وجود الثابت $c>0$ كما في المتراجحة التالية

$$R\,(u)<c\,\frac{M\,(u)}{u}$$

عندئذ فإنه يوجد فضاء أورليتش L_ϕ^* بحيث يكون المؤثر (1) تام الاستمرار في هذا الفضاء .

البرهان:

بما أن $M\left[k\,(x\,,y\,)\right]$ محدودة على $\hat{G}$ عندئذ يوجد $\phi(u)$ N–دالة تحقق الشرطين $\ddot{\Delta}\;,\;\Delta_2$ بحيث

$$\iint_{\hat{G}}\phi\left\{M\left[k\,(x\,,y\,)\right]\right\}dxdy<\infty \quad (17)$$

سنثبت أن مؤثر أوريسون معرفاً على الفضاء L_ϕ^*، إذا تحققت المتراجحة التالية

$$N\left[\beta\,R\,(u)\right]\le\frac{1}{\gamma}u \quad (18)$$

وذلك من أجل قيم كبيرة للمتغير u .

ليكن $u\,(x\,)\in L_\phi^*=L_\phi$ عندئذ:

$$\left\|a(x\,)+R\left(\left|u\,(x\,)\right|\right)\right\|_N\le\left\|a\right\|_N+\frac{1}{\beta}\left\|\beta R\left(\left|u\,(x\,)\right|\right)\right\|_N$$

$$\le\left\|a\right\|_N+\frac{1}{\beta}\left\{1+\int_G N\left[\beta R\left(\left|u\,(x\,)\right|\right)\right]dx\right\}$$

ومن العلاقة (19) نجد

$$\left\|a(x\,)+R\left(\left|u\,(x\,)\right|\right)\right\|_N\le\left\|a\right\|_N+\frac{1}{\beta}\left\{1+N\left[\beta R\,(u_0)\right]\mu(G\,)+\frac{1}{\gamma}\int_G\left|u\,(x\,)\right|dx\right\}\le$$

$$\le\left\|a\right\|_N+\frac{1}{\beta}\left\{1+N\left[\beta\,R\,(u_0)\right]\mu(G\,)+\lambda\left\|u\right\|_\phi\right\} \qquad ;\;\lambda=const$$

ومن أجل $\|u\| \le r$ نجد

$$\left\| a(x) + R\left(\left(|u(x)|\right)\right)\right\|_N \le c(r) \quad (19)$$

بالانتقال الى المؤثر الخطي التكاملي $Av(x) = \int_G k(x,y)v(y)dy$

وبوضع

$$M_1(u) = N(v)$$
$$M_2(u) = \phi(u)$$
$$\psi(u) = \phi\left[M(u)\right]$$

يكون المؤثر A معرفاً من L_N^* إلى L_ϕ بمعنى $A : L_N^* \to L_\phi$ ويحقق

$$\|Av\|_\phi \le 2l \, \|k(x,y)\|_{\hat{\psi}} \, \|v\|_N \qquad (20)$$

واعتمادا على (16) نجد $|Ku(x)| \le A\left[a(x) + R\left(|u(x)|\right)\right]$

من $(20),(19)$ نجد أن

$$\|Ku\|_\phi \le 2l \, \|k(x,y)\|_{\hat{\psi}} \left\| a(x) + R\left(|u(x)|\right)\right\|_N$$
$$\le 2l \;\; c(r)\|k(x,y)\|_{\hat{\psi}} \quad *$$

وبذلك يكون قد تم اثبات الاستمرار التام لمؤثر أوريسون.

الاستنتاجات والتوصيات

لقد كان للمؤثرات غير الخطية دوراً هاماً في دراسة مسائل المعادلات التكاملية في مختلف أنواع فضاءات التحليل التابعي وبشكل خاص على خصائص $N-$ دالة في فضاء أورليتش، وقد تمت دراستنا بتشكيل متتالية من المؤثرات المستمرة والمتراصة، والسؤال الذي يمكن طرحه هل قيوسية المجموعات المعرفة عليها تلك المؤثرات ضرورية ؟وما هو دور الـ $N-$ دالة في ذلك ؟

المراجع:

[1] BIRNBAUM , Z .and ORLICZ , W. *uber die verallgemeierung des Begriffes der Zueinander konjugierten potenze*, Studia Mathematica , 1-67; Zentralblatt, Vol.3 , 1931, p.252.

. [2] D.L.COHN :,*Measure Theory* ,Birk hauser ,Boston,1980 , p.138-212

[3] D.GIRELA and J.A.PELAEZ, *Carlson Measures ,multipliers and integration operators for space of Dirichlet Type*,J.Anal.Math .Malaga spain, 2006,p.1-15.

[4]HARDY,G,LITTLEWOOD , J .andPOLYA ,G.*Inequalities* , IIL , Moscow , Russian ; Cambridge , Univ.Press , ; Zentralblatt , Vol.10 , 1948,p.107-108.

[5] K .HOFFMAN :,*Banach spaces of Analytic function* ,Dover Publi cations, Inc ,Minneola New York, 2007, p.379-417.

[6] JENSEN, J. *Sur les functions convexes et les inequalities enter les valeurs moyennes*, Acta Math, 30,1906 , P.175-193.

[7] KRASNOSEL SKII, M. and LADYZENSKII, L. *Coditions for complete continue of .P.S .urysons operator acting in the space* L^{P} , Trudy Moskov.matem.ob-va, 3,1954 , P.307-320, Russian ; MR , Vol.15, 966.

[8] KRASNOSEL SKII, M. and RUTICKII, YA. *on the theory of orlicz space*s, Doklady Akad .Nauk SSSR, 81, , 497-500, *Russian* ; MR , Vol.13, 1951,p.357.

[9] KRASNOSEL SKII, M. and RUTICKII , YA, *Differentiaility of non-linear integral operators in orlicz spaces*, Doklady Akad.Nauk SSSR, 89 , 601-604 Russian; MR, Vol.15, 1953,p.137.

[10] KRASNOSEL SKII, M. and RUTICKII , YA, *General theory of orlicz spaces*, Trudy seminara po funkcional nomu analizu, Voronez.Gos.Univ. no.1, 3-38 Russian ; MR, Vol.18, 1956,p.912.

[11] KRASNOSEL SKII, M. and RUTICKII , YA, *On a class of covex functions*, Trudy seminara po funkcional noma analizu, Voronez . Gos.Univ., no.5,1957,Russian.

[12] MILNES H.W: ,*Convexity of Orlicz spaces*,Pacif.J.Math,7.3,1957.

[13] ORLICZ, W. *Uber eine gewisse Klasse von Raumen vom typus B*, Bull.intern.del Acad.pol. , serie A, Cracovie, 8, 1932,P. 207-220; Zentralblatt, Vol.6, 1932,p.315.

[14] ORLICZ W. *Uber Raume* L^{M} , Bull.internet.de I Acad .pol. , seri A Cracow,1936.

[15] H.L.ROYDEN : *Real Analysis THIRD EDITION*. 1988,p.118-130.

[16] WALTER RUDIN*: Principles of Mathematical Analysis*, Mcgraw-Hill INTERNATIONAL EDITIONS(Mathematics Series). 1976,p.300-325.