مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (5) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (5) 2016

دراسة تداخل بعض الفضاءات التابعية

الدكتور محمد علي[*]
الدكتور حسن بدور[**]
بشرى دراج[***]

(تاريخ الإيداع 2 / 6 / 2016. قُبِل للنشر في 20 / 9 /2016)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل التحليل التابعي وهي مسألة تداخل الفضاءات التابعية، وبشكل خاص فقد درسنا تداخل الفضاءات $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ المتعلقة بفضاءات هولدر.

كما درسنا التداخل لفضاءات $L_M^p(\Gamma)$ والذي يعتمد في تعريفه على فضاءات أورليتش وفضاءات ليبيغ ويعتبر في حالة خاصة تعميماً لهما.

الكلمات المفتاحية: فضاء أورليتش، فضاء ليبيغ، فضاء هولدر.

[*]أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية
[**]أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية
[***]طالبة دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (5) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (5) 2016

Study some inclusion of functional space

Dr. Mohammad Ali[*]
Dr. Hasan Baddour[**]
Boushra Darrag[***]

(Received 2 / 6 / 2016. Accepted 20 / 9 /2016)

□ ABSTRACT □

We study in this research one of the functional analysis problems,it is the inclusion of functional spaces. Especially we study the inclusion of spaces$C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ which branched form Holder spaces.

Alsowe study the inclusion of spaces$L_M^p(\Gamma)$ whichdepends in it definition onOrlicz and Lebesgue spaces and in anespecial case this space is generalization to them.

Key word: Orliczspaces, Lebesgue spaces, Holder spaces

[*]**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[**]**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[***]**Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يقسم التحليل التابعي بشكل عام إلى مجموعة من الأقسام الرئيسية إحدى هذه الأقسام هي نظرية الفضاءات التابعية. درسنا في هذا البحث بعض المسائل المتعلقة بالبنية الرئيسية في التحليل التابعي وهي الفضاءات وبشكل خاص ركزنا على موضوع تداخل الفضاءات الذي يملك أهمية كبيرة. مثل هذه الدراسة تمت فيما سبق على بعض الفضاءات الشهيرة مثل فضاء هولدر، ليبيغ و أورليتش.

أهمية البحث وأهدافه:

أهمية هذا البحث تكمن في أنه يعرف صف توابع جديد $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ ويدرس خواصه وتداخل توابع هذا الصف فيما بينها، وكذلك يدرس خواص الصف L_M^p وتداخل توابعه فيما بينها.

يهدف هذا البحث إلى الوصول إلى النتائج التالية:

1. تعريف صف توابع جديد $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ والنظيم عليه واثبات بأنه فضاء باناخ .
2. دراسة التداخل في الصفوف التابعية $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ من أجل حالات مختلفة لـ p و φ.
3. دراسة خواص الصف $L_M^p(\Gamma)$.
4. دراسة التداخل في الصفوف التابعية $L_M^p(\Gamma)$ من أجل حالات مختلفة لـM و p.

طرائق البحث ومواده

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل التابعي ونظرية الفضاءات، لذلك فأن الطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية الفضاءات.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1:[1]

يعرف معامل الاستمرارية من الدرجة الأولى للتابع العقدي f المعرف على المنطقة G بأحد الشكلين التاليين:

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|z_1-z_2|\le\delta}|f(z_1)-f(z_2)| \quad ; \forall z_1,z_2\in G$$

أو

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|h|\le\delta}|f(z+h)-f(z)| \quad ; \forall z\in G$$

تعريف2[2]:

يعرف فضاء φ−هولدر $C^{0,\varphi}(\Gamma)$ على منحني جوردان Γ ذي الطول المحدود بأنه أسرة التوابع المستمرة على Γ

والتي تحقق الشرط التالي:

$$\omega_f(\delta)\le c\,\varphi(\delta)$$

حيث $\varphi:(0,d)\to R^+$ تابع يحقق مايلي:

$\varphi(\delta)$ غير متناقص، $\delta^{-1}\varphi(\delta)$ غير متزايد، $\varphi(\delta) \to 0$ عندما $\delta \to 0$

تعريف3$[3]$ **: فضاء التوابع العقدية $L_p(\Gamma)$:**

يعرف صف توابع ليبيغ $L_p(\Gamma)$ حيث $1 \le P < \infty$ بأنه أسرة كل التوابع العقدية القابلة للقياس على منحنيΓوالتي لأجلها يكون $|f|^p$ قابل للمكاملة لوبيغيا على المنحني Γأي أن

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^p \, |dz| < \infty$$

وهو يشكل فضاء باناخ تحت النظيم المعرف بالشكل $[3]$:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left\{ \int_{\Gamma} |f(z)|^p \, |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$$

تعريف$[4]$**4:**

يعرف صف توابع هولدر $H_{\alpha,p}(\Gamma)(0 < \alpha \le 1 , p \ge 1)$ بأنه أسرة التوابع العقدية التي تنتمي إلى $L_p(\Gamma)$والتي تحقق الشرط التالي:

$$\left(\int_{\Gamma} |f(z+h) - f(z)|^p \, |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \le A \, |h|^{\alpha}$$

حيث A ثابت عددي.

وهو يشكل فضاء باناخ تحت النظيم المعرف عليه بالشكل $[4]$:

$$\|f\|_{\alpha,p} = \|f\|_p + sup_{t \neq 0} \frac{\|f(z+h) - f(z)\|_p}{|h|^{\alpha}}$$

كما أنه يحقق خاصة التداخل من الشكل:

$$H_{\alpha,p}(\Gamma) \subseteq H_{\beta,p}(\Gamma) \;\; ; \; p > 1 , 0 \le \beta < \alpha \le 1$$

بالاعتماد على تعريف الصفين $H_{\alpha,p}(\Gamma)$ و $C^{0,\varphi}(\Gamma)$ نعرف صفاً جديداًونرمز له بـ $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$:

تعريف 5:

نعرف صف التوابع $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ $(p > 1)$ بأنه أسرة التوابع العقدية $f(z)$ التي تنتمي إلى $L_p(\Gamma)$ والتي تحقق الشرط التالي:

$$\left(\int_{\Gamma} |f(z+h) - f(z)|^p \, |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \le c \, \varphi(|h|)$$

حيث c ثابت عددي.

- **نعرف على الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ العمليتين التاليتين:**

$$\forall \; f,g \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \qquad \forall \; \lambda \in \mathbb{C}$$

$$1)(f+g)(z)=f(z)+g(z)$$
$$2)\ (\lambda f)(z)=\lambda\, f(z)$$

تعريف6:

ونعرف صف توابع $C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ حيث $(0<\alpha\leq 1\ ,p>1)$ بأنه أسرة التوابع العقدية $f(z)$ التي تنتمي إلى $L_p(\Gamma)$والتي تحقق الشرط التالي:

$$\left(\int_{\Gamma}|f(z+h)-f(z)|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\leq c\{\varphi(|h|)\}^{\alpha}$$

ملاحظة: (1)

- ❖ من أجل $\alpha=1$ يصبح $C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)=\ C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$
- ❖ ومن أجل $\varphi\ (h)=h$ يصبح $C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)=H_{\alpha,p}(\Gamma)$

تعريف 7[5]:

يعرف صف توابع أورليتش $L_M(\Gamma)$ على منحني جوردان Γ ذي الطول المحدود بالشكل التالي:

$$L_M(\Gamma)=\left\{f:\Gamma\to\mathbb{C}\quad:\ \int_{\Gamma}M(\alpha|f(z)|)|dz|<\infty\right\}\ ;\ \alpha>0$$

حيث $M:[0,\infty[\ \longrightarrow[0,\infty[$ تابع حقيقي مستمرومحدبويحقق الشروط التالية:

$$M(0)=0\ ,\qquad M(x)>0\ \ ;\ \forall\, x>0\ ,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

تعريف 8:

ليكن Γ منحني جوردان ذا الطول المحدود عندئذ نقول عن التابع العقدي إنه ينتمي إلى الصف $L_M^p(\Gamma)$إذا كان:

$$\int_{\Gamma}M(\alpha|f(z)|)^{P}|dz|<\infty$$

ونعرف عليه النظيم :

$$\|f\|_{L_M^p}=Sup\left\{\left(\left(\int_{\Gamma}\ |(f.g)(z)|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\ ;\ \ g\in L_N\right\}$$

- ليكن φ,ψتابعين معرفين على (0,d) ويأخذان قيمهما في R^{+}،نكتب $\varphi\preccurlyeq\psi$ إذا وجد عدد $c>0$ بحيث يكون $\varphi(h)\leq c\ \psi(h)$
- ليكن M_1 و M_2–Nتابع عندئذ نقول إن M_2 أقوى من M_1 ونرمز لذلك بالرمز $M_1\prec M_2$إذاوجدثابت $c>0$ بحيث يكون $M_1(t)\leq M_2(ct)$

النتائج والمناقشة:

ينتج من تعريف الصف $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ النتائج الأتية:

نتيجة 1:

الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ فضاء خطي فوق الحقل $\mathbb{C}$

الاثبات:

إذا كان $f,g \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ فإن:

$$\|f(z+h)-f(z)\|_p < c_1\,\varphi(|h|) \& \|g(z+h)-g(z)\|_p < c_2\,\varphi(|h|)$$

لكي يكون الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ فضاءً خطياً يجب تحقق الشرط

$$\alpha f + \beta g \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \qquad , \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

لدينا:

$$\|(\alpha f+\beta g)(z+h)-(\alpha f+\beta g)(z)\|_p =$$
$$= \|[\alpha f(z+h)+\beta g(z+h)]-[\alpha f(z)+\beta g(z)]\|_p$$
$$= \|[\alpha f(z+h)-\alpha f(z)]+[\beta g(z+h)-\beta g(z)]\|_p$$
$$\le \|\alpha[f(z+h)-f(z)]\|_p + \|\beta[g(z+h)-g(z)]\|_p$$
$$= |\alpha|\,\|f(z+h)-f(z)\|_p + |\beta|\,\|g(z+h)-g(z)\|_p$$
$$\le |\alpha|.c_1\,\varphi(|h|)+|\beta|.c_2\,\varphi(|h|) = c.\varphi(|h|)$$
$$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$$

بالتالي الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ خطي فوق $\mathbb{C}$.

- نعرف على الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ التابع المعرف بالشكل التالي:

$$\|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_p + sup_{h\neq 0}\frac{\|f(z+h)-f(z)\|_p}{\varphi(|h|)}$$

نتيجة 2:

يشكل التابع

$$\|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_p + sup_{h\neq 0}\frac{\|f(z+h)-f(z)\|_p}{\varphi(|h|)}$$

نظيماً على الصف $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$

الاثبات:

1) نثبت فيما يلي أن: $\|f\|_{\varphi,p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$

لدينا:

$$\|f\|_{\varphi,p} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_p + sup_{h\neq 0}\frac{\|f(z+h)-f(z)\|_p}{\varphi(|h|)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_p = 0 \quad \& sup_{h\neq 0} \frac{\|f(z+h) - f(z)\|_p}{\varphi(|h|)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \& sup_{h\neq 0} \frac{\|f(z+h) - f(z)\|_p}{\varphi(|h|)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f = 0$$

2)نثبت فيما يلي أن: $\|\lambda f\|_{\varphi,p} = |\lambda| \|f\|_{\varphi,p}$

$$\|\lambda f\|_{\varphi,p} = \|\lambda f\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|f\lambda(z+h) - \lambda f(z)\|_p}{\varphi(|h|)}$$

$$= |\lambda| \|f\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{|\lambda| \|f(z+h) - f(z)\|_p}{\varphi(|h|)}$$

$$= |\lambda| \left[\|f\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|f(z+h) - f(z)\|_p}{\varphi(|h|)} \right]$$

$$= |\lambda| \|f\|_{\varphi,p}$$

3)نثبت متراجحة المثلث: $\|f+g\|_{\varphi,p} \le \|f\|_{\varphi,p} + \|g\|_{\varphi,p}$

بالشكل:

$$\|f+g\|_{\varphi,p} = \|f+g\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|(f+g)(z+h) - (f+g)(z)\|_p}{\varphi(|h|)}$$

$$\le \|f\|_p + \|g\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|[f(z+h) - f(z)] + [g(z+h) - g(z)]\|_p}{\varphi(|h|)}$$

$$\le \|f\|_p + \|g\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|f(z+h) - f(z)\|_p}{\varphi(|h|)} + sup_{h\neq 0} \frac{\|g(z+h) - g(z)\|_p}{\varphi(|h|)}$$

$$= [\|f\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|f(z+h) - f(z)\|_p}{\varphi(|h|)}] + [\|g\|_p + sup_{h\neq 0} \frac{\|g(z+h) - g(z)\|_p}{\varphi(|h|)}]$$

$$= \|f\|_{\varphi,p} + \|g\|_{\varphi,p}$$

مبرهنة 1:

الفضاء $\left(C^{0,\varphi,p}(\Gamma), \|.\|_{\varphi,p} \right)$ فضاء باناخ.

الإثبات:

أثبتنا أن $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ فضاء منظم، ولنبرهن أن الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ تام.

لتكن (f_n) متتالية أساسية في $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ عندئذفهي متتالية أساسية في $L_p(\Gamma)$ وبما أن $L_p(\Gamma)$ فضاء تام فإنه يوجد $f \in L_p(\Gamma)$بحيث يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0$$

من الفرض (f_n) متتالية أساسية في $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$إذن فهي تحقق الشرط التالي:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n(\varepsilon) \quad ; \; n,m > n_0 \implies \|f_n - f_m\|_{\varphi,p} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_p + sup_{h\neq 0}\frac{\|[f_n(z+h)-f_n(z)]-[f_m(z+h)-f_m(z)]\|_p}{\varphi(|h|)} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \& sup_{h\neq 0}\frac{\|[f_n(z+h)-f_n(z)]-[f_m(z+h)-f_m(z)]\|_p}{\varphi(|h|)} < \varepsilon$$

بجعل $m \to \infty$ نحصل على التالي:

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon \& sup_{h\neq 0}\frac{\|[f_n(z+h)-f_n(z)]-[f(z+h)-f(z)]\|_p}{\varphi(|h|)} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad sup_{h\neq 0}\frac{\|[f_n(z+h)-f(z+h)]+[f(z)-f_n(z)]\|_p}{\varphi(|h|)} < \varepsilon$$

وبالتالي $f_n - f \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ من أجل كل $n > n_0$

وبما أن $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ فضاء خطي يكون لدينا $f = f_n - (f_n - f) \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$

تحقق لدينا: $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\varphi,p} = 0$

هذا يعني أن الفضاء $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ تام

ندرس في المبرهنة التالية تداخل الصفوف التابعية $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$:

مبرهنة2:

1)إذا كان $1 \le q \le p < \infty$ فإن $C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \subseteq C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

2)إذا كان $0 < \beta \le \alpha \le 1$ فإن $C_\beta^{0,\varphi,p}(\Gamma) \subseteq C_\alpha^{0,\varphi,p}$

3)إذا كان $0 < \beta \le \alpha \le 1$ و $1 \le q \le p < \infty$ فإن $C_\beta^{0,\varphi,p}(\Gamma) \subseteq C_\alpha^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

4)إذا كان $\varphi \preccurlyeq \psi$ فإن: $C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \subseteq C^{0,\psi,p}(\Gamma)$

5)إذا كان $1 \le p \le q \le r < \infty$ فإن:

$$C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \cap C^{0,\varphi,r}(\Gamma) \subseteq C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$$

الإثبات:

اثبات (1): لنأخذ التابع $f(z) \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ ولنثبت أنه ينتمي إلى $C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

فهو $f(z) \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ يحقق الشرط:

$$\left(\int_\Gamma |f(z+h)-f(z)|^p |d|\right)^{\frac{1}{p}} \le c_1\varphi(h)$$

بتطبيق متراجحة هولدر نجد أن:

$$\int_\Gamma |f(z+h)-f(z)|^q |dz| = \int_\Gamma |f(z+h)-f(z)|^q .1\ |dz|$$

$$\le \left\{\int_\Gamma \left(|f(z+h)-f(z)|^q\right)^{\frac{p}{q}} |dz|\right\}^{\frac{q}{p}} . \left(\int_\Gamma |dz|\right)^{1-\frac{q}{p}}$$

$$\le c_3\left(\int_\Gamma |f(z+h)-f(z)|^q |dz|\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\Rightarrow\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{q}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}\leq(c_3)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\ldots\ldots(1)$$

$$\leq(c_3)^{\frac{1}{q}}c_1\,\varphi(|h|)=c_2\varphi(|h|)$$

بذلك نتج لدينا أن $f(z)\in C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

الأمر الذي يعني أن $C^{0,\varphi,p}(\Gamma)\subseteq C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$ إذا كان $1\leq q\leq p<\infty$

اثبات (2): يتم من خلال اثبات ان التابع $f\in C_{\beta}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ ينتمي إلى $C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ من أجل $0<\beta\leq\alpha\leq 1$

بما أن $f\in C_{\beta}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ فإنه يحقق الشرط:

$$\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\leq c_4\left(\varphi(|h|)\right)^{\beta}$$

ولدينا من الفرض $0<\beta\leq\alpha\leq 1$

ومنه يكون

$$\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{p}|d|\right)^{\frac{1}{p}}\leq c_4\left(\varphi(|h|)\right)^{\beta}=c_4\left(\varphi(|h|)\right)^{\alpha}\left(\varphi(|h|)\right)^{\beta-\alpha}$$

$$=c_4\left(\varphi(|h|)\right)^{\alpha}\frac{1}{\left(\varphi(|h|)\right)^{\alpha-\beta}}\leq c_5\left(\varphi(|h|)\right)^{\alpha}$$

بالتالي

$$\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\leq c_5\left(\varphi(|h|)\right)^{\alpha}$$

أي أن $f\in C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ وهذا يعني أن: $C_{\beta}^{0,\varphi,p}(\Gamma)\subseteq C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$

نثبت (3): وذلك من خلال اثبات أن التابع $f\in C_{\beta}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ ينتمي إلى الصف $C_{\alpha}^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

بما أن $p\geq q$ و $f\in C_{\beta}^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ وكذلك لدينا من العلاقة (1):

$$\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{q}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}<(c_3)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

ومن كون $0<\beta\leq\alpha\leq 1$ يكون لدينا حسب برهان(2):

$$\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{q}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}<(c_3)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Gamma}\left|f(z+h)-f(z)\right|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c_4[\varphi(|h|)]^{\beta}\leq c_5[\varphi(|h|)]^{\alpha}$$

وبالتالي $f\in C_{\alpha}^{0,\varphi,q}(\Gamma)$ نتج لدينا أن : $C_{\alpha}^{0,\varphi,p}(\Gamma)\subseteq C_{\beta}^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

نثبت (4): من خلال اثبات أن التابع $f \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ ينتمي إلى $C^{0,\psi,p}(\Gamma)$ من أجل $\varphi \preccurlyeq \psi$

ليكن $f \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma)$ أي :

$$\left(\int_{\Gamma} |f(z+h)-f(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1\,\varphi(|h|)$$

بما أن $\varphi \preccurlyeq \psi$ يكون لدينا $\varphi(|h|) \leq c_6\,\psi(|h|)$

ومنه يكون:

$$\left(\int_{\Gamma} |f(z+h)-f(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1\,\varphi(|h|)$$

$$\leq c_1\,c_6\,\psi(|h|) = c_7\psi(|h|)$$

وبالتالي $f \in C^{0,\psi,p}(\Gamma)$ أي أن: $C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \subseteq C^{0,\psi,p}(\Gamma)$

نثبت (5): من خلال اثبات أن التابع $f \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \cap C^{0,\varphi,r}(\Gamma)$ ينتمي إلى $C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$ عندما يكون $1 \leq p \leq q \leq r < \infty$

ليكن $f \in C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \cap C^{0,\varphi,r}(\Gamma)$ من أجل $1 \leq p \leq q \leq r < \infty$

يوجد $0 < \lambda < 1$ بحيث تحقق المساواة $\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1$

منه وبتطبيق متراجحة هولدر

$$\left(\int_{\Gamma} |f(z+h)-f(z)|^q\,|dz|\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\Gamma} |f(z+h)-f(z)|^{\lambda q}\,|f(z+h)-f(z)|^{(1-\lambda)q}\,|dz|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\left\{\int_{\Gamma} \left(|f(z+h)-f(z)|^{\lambda q}\right)^{\frac{p}{\lambda q}}|dz|\right\}^{\frac{\lambda q}{p}} . \left\{\int_{\Gamma} \left(|f(z+h)-f(z)|^{(1-\lambda)q}\right)^{\frac{r}{(1-\lambda)q}}|dz|\right\}^{\frac{(1-\lambda)q}{r}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left[\left\{\int_{\Gamma} \left(|f(z+h)-f(z)|^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^{\lambda q} . \left\{\int_{\Gamma} \left(|f(z+h)-f(z)|^{r}|dz|\right)^{\frac{1}{r}}\right\}^{(1-\lambda)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\|f(z+h)-f(z)\|_{L^p_{(\Gamma)}}^{\lambda q} . \|f(z+h)-f(z)\|_{L^r_{(\Gamma)}}^{(1-\lambda)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f(z+h)-f(z)\|_{L^p_{(\Gamma)}}^{\lambda} . \|f(z+h)-f(z)\|_{L^r_{(\Gamma)}}^{(1-\lambda)}$$

$$\leq c_1\left(\varphi(|h|)\right)^{\lambda} c_2\varphi(|h|)^{(1-\lambda)} = c\,\varphi(|h|)$$

وبالتالي $f \in C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$ اي أن $C^{0,\varphi,p}(\Gamma) \cap C^{0,\varphi,r}(\Gamma) \subseteq C^{0,\varphi,q}(\Gamma)$

ندرس في المبرهنة التالية حالات التداخل في الصف $L^p_M(\Gamma)$:

مبرهنة3:

ليكن Γ منحني جوردان ذا طول محدود عندئذ:

1) إذا كان $M_1 \prec M_2$ فإن $L^p_{M_2}(\Gamma) \subseteq L^p_{M_1}(\Gamma)$

2) إذا كان $M_1 \prec M_2$ و $p \geq q$ فإن $L^p_{M_2}(\Gamma) \subseteq L^q_{M_1}(\Gamma)$

3) ليكن M_1 و M_2–N تابع عندئذ يكون $L^p_{M_1}(\Gamma) \cap L^p_{M_2}(\Gamma) \subseteq L^p_{M_1+M_2}(\Gamma)$

الاثبات:

اثبات (1) من خلال اثبات أن التابع $f \in L^p_{M_2}(\Gamma)$ ينتمي إلى $L^p_{M_1}(\Gamma)$ إذا كان $M_1 \prec M_2$

ليكن $f \in L^p_{M_2}(\Gamma)$ عندئذ يكون:

$$\int_\Gamma M_2(\alpha|f(z)|)^p|dz| < \infty$$

وبما أن $M_1 \prec M_2$ فإنه يوجد ثابت $b > 0$ بحيث يكون $M_1(t) \leq M_2(bt)$

إذا وضعنا $\beta = \frac{\alpha}{b}$ عندئذ من المتباينة السابقة نحصل على

$$M_1(\beta|f(z)|) = M_1\left(\frac{\alpha}{b}|f(z)|\right)$$

$$\leq M_2\left(b\frac{\alpha}{b}|f(z)|\right) = M_2(\alpha|f(z)|)$$

منه يكون:

$$|M_1(\beta|f(z)|)|^p \leq |M_2(\alpha|f(z)|)|^p; 1 \leq p < \infty$$

بالتالي:

$$\int_\Gamma |M_1(\beta|f(z)|)|^p|dz| \leq \int_\Gamma |M_2(\alpha|f(z)|)|^p|dz| < \infty \dots\dots (2)$$

أي أن $f \in L^p_{M_1}(\Gamma)$ الأمر الذي يعني أن: $L^p_{M_2}(\Gamma) \subseteq L^p_{M_1}(\Gamma)$

نثبت (2) من خلال اثبات أن $f \in L^p_{M_2}(\Gamma)$ ينتمي إلى $L^q_{M_1}(\Gamma)$.

بما أن $M_1 \prec M_2$ و $1 \leq q \leq p < \infty$ فإنه بتطبيق متراجحةهولدر كما في برهان (1) في المبرهنة (1) ومن العلاقة (2) نجد:

$$\int_\Gamma |M_1(\beta|f(z)|)|^q|dz| \leq \int_\Gamma |M_2(\alpha|f(z)|)|^q|dz|$$

$$\leq \int_\Gamma |M_2(\alpha|f(z)|)|^p|dz| < \infty$$

وذلك كون $1 \leq q \leq p < \infty$ و $f \in L^p_{M_2}(\Gamma)$ فإن $f \in L^q_{M_1}(\Gamma)$

أي أن: $L^p_{M_2}(\Gamma) \subseteq L^q_{M_1}(\Gamma)$

نثبت (3) من خلال اثبات أنه إذا كان:

$f \in L^p_{M_1}(\Gamma) \cap L^p_{M_2}(\Gamma)$ فإن $f \in L^p_{M_1+M_2}(\Gamma)$

ليكن $f \in L^{p^*}_{M_1}(\Gamma) \cap L^{p^*}_{M_2}(\Gamma)$ هذا يعني أن:

$$\int_\Gamma |M_1(\alpha|f(z)|)|^p |dz| < c_6 < \infty \quad , \quad \int_\Gamma |M_2(\alpha|f(z)|)|^p |dz| < c_7 < \infty$$

نستخدم للبرهان المتراجحة التالية:[6]

$$|f+g|^p \le 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p) \quad ; p > 1$$

عندئذ:

$$|(M_1+M_2)(\alpha|f(z)|)|^p = |M_1(\alpha|f(z)|) + M_2(\alpha|f(z)|)|^p$$
$$\le 2^{p-1}[|M_1(\alpha|f(z)|)|^p + |M_2(\alpha|f(z)|)|^p]$$

منه يكون:

$$\int_\Gamma |(M_1+M_2)(\alpha|f(z)|)|^p |dz| \le$$
$$\le 2^{p-1}\left[\int_\Gamma |M_1(\alpha|f(z)|)|^p |dz| + \int_\Gamma |M_2(\alpha|f(z)|)|^p |dz|\right]$$
$$\le 2^{p-1}[c_6 + c_7] \le c_8 < \infty$$

وبالتالي $f \in L^p_{M_1+M_2}(\Gamma)$

نتج لدينا أن: $L^p_{M_1}(\Gamma) \cap L^p_{M_2}(\Gamma) \subseteq L^p_{M_1+M_2}(\Gamma)$ في حال M_1 و M_2 تشكلان N-تابع

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى تعريف صف توابع متعلق بفضاء هولدر ودرسنا التداخل بين صفوفه، ونوصي بتعريف صفوف توابع أكثر عمومية ودراسة التداخل عليها.

المراجع:

1) MAMEDKHANOV, J.L. *Approximation in complex plane and singular operator with cauchy's kernel.* Dr.dis, USSR-BAKU,1982

2)RICARDO ABREU BLAYA. JUAN BORY REYES. BORIS KATS. *Cauchy integral and singular integral operator over closed Jordan curves*,Monatsh Math, 2014,PP.1-14

3) AKGUN.R and ISRAFILOVE. D.M. *Approximation by interpolation polynomials in smirnov-orlicz class*, J. Korean Math, soc 43, no2,2006,p.p.413-424

4)BENJAMIN ALANDON. *Deagree of Approximation of HolderContinuous Function*, Phd, Dissertation, Full Term 2008,82

5) DANIYAL M. ISRAFILOV, BURCIN OKTAY AND RAMAZAN AKGUN. *Approximation in Smirnov-Orlicz Classes*, Glasnik Math, vol 40(60)(2005), 87-102

6) ALOIS KUFNER. OLDRICH JOHN. SVATOPLUK FUCIK. *Function spaces*,1977,454