مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (4) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (4) 2016

دراسة محدودية تكامل كوشي الشاذ في بعض الصفوف التابعية

الدكتور محمد علي*
الدكتور حسن خليفة**
لمى رجب***

(تاريخ الإيداع 4 / 5 / 2016. قُبِل للنشر في 15 / 8 /2016)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث تكامل كوشي الشاذ لتوابع تنتمي إلى صفوف واسعة من التوابع على أسر شهيرة من المنحنيات وبشكل خاص قمنا بدراسة محدودية هذا التكامل.

حصلنا في هذا البحث على بعض النتائج التي تخص تكامل كوشي الشاذ ومحدوديته في صفوف تابعية متفرعة عن فضاء ليبيغ وعلى منحنيات تنتمي إلى أسرة منحنيات كارلسون.

الكلمات المفتاحية: تكامل كوشي الشاذ– فضاء ليبيغ– كارلسون

* أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.
** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية–سورية .
***طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية–سورية .

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (4) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (4) 2016

On bounded singular Cauchy's integral in some functional classes

Dr. Mohammad Ali*
Hassan Khalifah**
Lama Rajab***

(Received 4 / 5 / 2016. Accepted 15 / 8 /2016)

☐ ABSTRACT ☐

In this research westudied singular Cauchy's integral for functionsbelong to wide classes of functions on a famous curves families .Especially we study the boundness of this integral. Wehave obtained some results about singular Cauchy's integral and it'sboundness for some functional classes branched from Lebesuge classes.

Key words: Singural Cauchy's integral, Lebesuge space, Carleson

***prof., Department of mathematics, faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria**
****Associate prof., Department of mathematics, faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia Syria**
*****Postgraduate student in mathematics Department , faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia Syria.**

مقدمة:

يندرج موضوع البحث الحالي ضمن نظرية التوابع العقدية .

وهو يعتبر امتداداً لما يسمى صيغة كوشي التكاملية التي درست من أجل حالات كثيرة وهي تحل مسألة ايجاد قيمة التكامل من الشكل $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f\ (z)}{z - z_0} dz$

من المعلوم أن قيمة هذا التكامل متعلقة بانتماء z_0 إلى داخل المنحني المغلق Cأو إلى خارج C

أما تكامل كوشي الشاذ فإنه يملك نفس شكل التكامل السابق عندما تقع النقطة z_0 على منحني التكامل C(ليس بالضرورة أن يكون Cمغلق)، الأمر الذي يحول التكامل إلى تكامل شاذ

انقسمت دراسة تكامل كوشي الشاذ إلى قسمين رئيسين:

- إيجاد قيمته الرئيسية.
- دراسة محدودية هذا التكامل.

هاتان المسألتان متعلقتان بقضيتين أساسيتين هما:

- الأسرة التي ينتمي إليها منحني التكاملC.
- الصف التابعي (الفضاء) الذي ينتمي إليه التابع المكامل f.

تمت مثل هاتين الدراستين في الكثير من الفضاءات التابعية مثل فضاءه ولدروفضاء ليبيغ وفضاء أورليتش...

قمنا في هذا البحث بالوصول إلى بعض نتائج تخص محدودية تكامل كوشي الشاذ على صفوف تابعية تعتمد في تعريفها على تعريف فضاء ليبيغ.

أهمية البحث وأهدافه:

تنبع أهمية البحث من كون الموضوع المدروس وهو محدودية تكامل كوشي الشاذ الذي يملك تطبيقات نظرية وعملية هامة ويهدف هذا البحث إلى ما يلي :

1- دراسة العلاقة بين نظيم التابع f ونظيم التابع f_0 في الفضاء L_{1_0} والفضاء $L_{p_0}(\Gamma,\tilde{v})$.

2- دراسة العلاقة بين نظيمتكامل كوشي الشاذ للتابع f_0 و نظيم تكامل كوشي الشاذ للتابع f .

3- دراسة انتماء تابع الوزن إلى فضاء ماكينهوبت للأوزان عند تركيبه مع أحد التحويلات المحافظة .

4- دراسة محدودية تكامل كوشي الشاذ في الفضاء $L_{1_0}(\Gamma)$.

5- دراسة محدودية تكامل كوشي الشاذ في الفضاء $L_{p_0}(\Gamma,\tilde{v})$.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد دراسة هذا البحث على بعض المفاهيم والتعاريف الرياضية المعروفة في التحليل التابعي لأن البحث يقع ضمن الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن مادة التحليل العقدي لذلك فإن الطرق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية التوابع التحليلية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث**[1]** :

لتكن Gمنطقة وحيدة اتصال في المستوي العقدي Zمحيطها $\Gamma=\partial G$ نرمز ب $G^{-}=ext\,\Gamma$ مع الافتراض دوما أن $\infty\in G^{-}\quad,\quad 0\in G$

كما نرمز ب $\gamma=\{w:|w|=1\}$ لدائرة الوحدة في المستوي W ويكون :

$$D=int\,\gamma\quad,\quad D^{-}=ext\,\gamma$$

أي أن D هو قرص الوحدة المفتوح و D^{-} هو جزء المستوي الواقع خارج قرص الوحدة المغلق.

$w=\varphi(z)$ هو التابع الذي يحول G^{-} من المستوي Z إلى D^{-} في المستوي W

بحيث يتحقق : $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\varphi(z)}{z}>0$, $\varphi(\infty)=\infty$ وليكن $z=\psi(w)$ التابع العكسي ل $w=\varphi(z)$

تعريف1[2]:نسمي التكامل:

$$S_{\Gamma}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\qquad,z\in\Gamma$$

بتكامل كوشي الشاذ، ويسمى المؤثر S_{Γ}بمؤثر كوشي الشاذ.

تعريف2[3]:لتكن νدالة وزن (دالة غير سالبة و قابلة للمكاملة على Γ) سوف نرمز ب $L^{p}(\Gamma,\nu)$لفضاء ليبيغ الموزن على Γوهو مجموعة الدوال f المقيسةعلى Γ والتي من أجلها:

$$\|f\|_{L^{p}(\Gamma,\nu)}=\left(\int_{\Gamma}|f(z)\nu(z)|^{p}\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

تعريف3: نعرف صف التوابع $L_{P_0}(\Gamma)$ بالشكل :

$$L_{P_0}(\Gamma)=\{f(z);f_0(w)=f(\psi(w))\in L_{P}(\gamma)\}$$

تعريف 4[4]:يقال عن المنحني Γ إنه منحني كارليسون إذا حقق الشرط الآتي :

$$\sup_{\varepsilon>0}\sup_{t\in\Gamma}|\Gamma(t,\varepsilon)|<\infty$$

حيث أن $\Gamma(t,\varepsilon)$ هو جزء المنحني Γ الواقع داخل الدائرة المفتوحة التي مركزها النقطة $t\in\Gamma$ ونصف قطرها ε أي $\Gamma(t,\varepsilon)=\{\tau\in\Gamma,\ |\tau-t|<\varepsilon\}$ ، $|\Gamma(t,\varepsilon)|$ تمثل طول $\Gamma(t,\varepsilon)$

تعريف 5 [5]:لتكن $p\in(1,\infty)$ & $q\in(1,\infty)$ نرمز ب $A_{p}(\Gamma)$ لمجموعة كل توابع الوزن $\nu:\Gamma\to[0,\infty]$ التي تحقق الشرط الآتي :

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,r)}(\nu(\tau))^{p}\,|d\tau|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(z,r)}(\nu(\tau))^{-q}\,|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

حيث : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ، أسرة توابع الوزن هذه تسمى أسرة توابع وزنماكينهوبت.

تعريف 6:أسرة توابعهولدر :

نقول عن التابع $f(z)$ أنه يحقق شرط هولدرعلى المنحني Γ إذا حقق الشرط التالي :

$$\left|f(z_1)-f(z_2)\right|\le K\left|z_1-z_2\right|^{\alpha}\ ;\ \forall z_1,z_2\in\Gamma$$

حيث أن $K>0$ ثابت، $0<\alpha\le 1$

نرمز لأسرة جميع التوابع التي تحقق هذا الشرط بالرمز $H^{\alpha}(\Gamma)$

النتائج والمناقشة:

<u>**مبرهنة1**</u> : إذا كان $f\in L_1(\Gamma)$ و $w=\varphi(z)\in H^1(\Gamma)$ بحيث $A\le|\varphi'(z)|\le B$ (A,B ثابتان موجبان) فإن $f_0=f(\psi(w))\in L_1(\gamma)$ ويكون $\|f\|_{L_1(\Gamma)}\le\frac{1}{A}\|f_0\|_{L_1(\gamma)}$.

البرهان:

لدينا $f\in L_1(\Gamma)$ أي يحقق $\int_{\Gamma}|f(z)||dz|<\infty$

بما أن $w=\varphi(z)$ فإن $dw=\varphi'(z)\,dz$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}|f_0(w)||dw| &= \int_{\gamma}|f(\psi(w))||dw|\\ &= \int_{\gamma}|f(z)||\varphi'(z)||dz|\\ &\le B\int_{\gamma}|f(z)||dz|<\infty\end{aligned}$$

ومنه ينتج أن : $f_0=f(\psi(w))\in L_1(\gamma)$

لبرهان أن $\|f\|_{L_1(\Gamma)}\le\frac{1}{A}\|f_0\|_{L_1(\gamma)}$

نلاحظ أن $\varphi(z)$ هو التابع العكسي ل $\psi(w)$ فإن $\psi'(w)=\frac{1}{\varphi'(z)}$

فيكون $A\le|\varphi'(z)|\le B$ فإن $\frac{1}{B}\le|\psi'(w)|\le\frac{1}{A}$

ومنه :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_1(\Gamma)} &= \int_{\Gamma}|f(z)||dz| = \int_{\Gamma}|f(\psi(w))||\psi'(w)||dw|\\ &= \int_{\gamma}|f_0(w)||\psi'(w)||dw|\le\frac{1}{A}\int_{\gamma}|f_0(w)||dw| = \frac{1}{A}\|f_0\|_{L_1(\gamma)}\end{aligned}$$

بالتالي:

$$\| f \|_{L_1(\Gamma)} \le \frac{1}{A} \| f_0 \|_{L_1(\gamma)} \qquad ....(1)$$

تناقش المبرهنة التالية علاقة تكامل كوشي الشاذ للتابع f_0 مع تكامل كوشي الشاذ للتابع f.

من أجل ذلك سوف نفترض أن $\varphi \in H^1(\Gamma)$ أي يحقق $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \le K\,|z_1 - z_2|$ أو $\left|\dfrac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{(z_1 - z_2)}\right| \le K$ حيث $0 <$ $z_1 \ne z_2$ أي يوجد ثابت L بحيث يتحقق:

$$0 < L \le \left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{(z_1 - z_2)}\right| \le K \quad ; z_1 \ne z_2$$

<u>**مبرهنة 2**</u> <u>:</u>إذا كان $f(z) \in L_1(\Gamma)$ و $w = \varphi(z) \in H^1(\Gamma)$ بحيث $A \le |\varphi'(z)| \le B$

فإن $\| S_\Gamma f \|_{L_{1(\Gamma)}} \le k_1 \| S_\gamma f_0 \|_{L_{1(\gamma)}}$ حيث أن $k_1 = k.B$ ثابت

البرهان:

لنبرهن أولاً أن $|S_\gamma f_0| \le k\,|S_\Gamma f|$

$$|S_\gamma f_0| \le \int_\gamma \left|\frac{f_0(w)}{w - w_0}\right| |dw|$$

$$\le \int_\gamma \frac{|f(\psi(w))|}{|\varphi(z) - \varphi(z_0)|} |\varphi'(z)||dz|$$

نضرب ونقسم على $z - z_0$ بحيث أن $z \ne z_0$

$$\le \int_\Gamma \left|\frac{f(z)}{z - z_0}\right| \left|\frac{z - z_0}{\varphi(z) - \varphi(z_0)}\right| |\varphi'(z)||dz|$$

$$\le \frac{B}{L} \int_\Gamma \left|\frac{f(z)}{z - z_0}\right| |dz|$$

$$\le k \int_\Gamma \left|\frac{f(z)}{z - z_0}\right| |dz|$$

$$\le k\,|S_\Gamma f| \Rightarrow \boxed{|S_\gamma f_0| \le k\,|S_\Gamma f|} \quad ...(2)$$

الآن:

$$\left\| S_\gamma f_0 \right\|_{L_1(\gamma)} = \int_\gamma \left| S_\gamma f_0(\mathrm{w}) \right| \left| dw \right|$$
$$\leq k \int_\gamma \left| S_\Gamma f\ (\mathrm{z}) \right| \left| \varphi'(\mathrm{z}) \right| \left| dz \right|$$
$$\leq k\,.B \int_\Gamma \left| S_\Gamma f\ (\mathrm{z}) \right| \left| dz \right|$$
$$\leq k_1 \left\| S_\Gamma f \right\|_{L_1(\Gamma)} \Rightarrow \boxed{\left\| S_\gamma f_0 \right\|_{L_1(\gamma)} \leq k_1 \left\| S_\Gamma f \right\|_{L_1(\Gamma)}} \;....(3)$$

مبرهنة مساعدة (1)[4]: إذا كان $f \in L_1(\Gamma)$ فإن تكامل كوشي الشاذ $S_\Gamma f$ يكون محدوداً أي يحقق العلاقة : $\left\| S_\Gamma f \right\|_{L_1(\Gamma)} \leq c \left\| f \right\|_{L_1(\Gamma)}$.

فيما يلي سوف نثبت مبرهنة مشابهة بالنسبة لصف التوابع $L_{p_0}(\Gamma)$ في حالة $p = 1$

<u>**مبرهنة 3 :**</u> إذا كان $f \in L_{1_0}(\Gamma)$ و $\varphi(\mathrm{z}) \in H^1(\Gamma)$ بحيث $A \leq \left| \varphi'(\mathrm{z}) \right| \leq B$ فإن المؤثر $S_\Gamma f$ يكون محدوداً في الفضاء L_{1_0} أي يحقق العلاقة : $\left\| S_\Gamma f \right\|_{L_{1_0}} \leq k_2 \left\| f \right\|_{L_{1_0}}$

البرهان :

من تعريف النظيمعلى الصف L_{1_0} لدينا $\left\| f \right\|_{L_{1_0}(\gamma)} = \left\| f_0 \right\|_{L_1(\Gamma)}$ ومنه فإن إثبات هذه المبرهنة يتم بالشكل التالي :

من (3) لدينا:

$$\boxed{\left\| S_\gamma f_0 \right\|_{L_1(\gamma)} \leq k_1 \left\| S_\Gamma f \right\|_{L_1(\Gamma)}} \quad ....(4)$$

وحسب المبرهنة المساعدة (1):

$$\boxed{\left\| S_\Gamma f \right\|_{L_1(\Gamma)} \leq c \left\| f \right\|_{L_1(\Gamma)}} \quad ....(5)$$

من (1) لدينا:

$$\boxed{\left\| f \right\|_{L_{1(\Gamma)}} \leq \frac{1}{A} \left\| f_0 \right\|_{L_{1(\gamma)}}} \quad ....(6)$$

من(4) & (5) & (6) ينتج أن $\left\| S_\gamma f_0 \right\|_{L_1(\gamma)} \leq k_2 \left\| f_0 \right\|_{L_1(\gamma)}$

أي $\left\| S_\Gamma f \right\|_{L_{1_0}} \leq k_2 \left\| f \right\|_{L_{1_0}}$ حيث $k_2 = \dfrac{k_1 . c}{A}$

من أجل اثبات محدودية تكامل كوشي الشاذ بالنسبة لتوابع فضاء ليبيغ L_{p_0} الموزنيلزمنا اثبات المبرهنة التالية :

مبرهنة 4 : إذا كان v من أوزان ماكينهوبت على المنحني Γ و $A \le |\varphi'(z)| \le B$ فإن $\tilde{v}(w) = v(\psi(w))$ من أوزان ماكينهوبتعلى المنحني γ.

البرهان : حتى تكون $\tilde{v}$ وزن ماكينهوبتنبرهن أنه :

$$\sup_{t\in\gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}(\tilde{v}(w))^{p}|dw|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}(\tilde{v}(w))^{-q}|dw|\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

حيث : $\gamma(t,\varepsilon):=\left(\tau\in\gamma;|\tau-t|<\varepsilon\right) \qquad \& \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

لدينا:

$$\sup_{t\in\gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}(\tilde{v}(w))^{p}|dw|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}(\tilde{v}(w))^{-q}|dw|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\sup_{t'\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t',\varepsilon)}(v(z))^{p}|\varphi'(z)||dz|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t',\varepsilon)}(v(z)^{-q}|\varphi'(z)||dz|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\sup_{t'\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{B}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t',\varepsilon)}(v(z))^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{B}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t',\varepsilon)}(v(z)^{-q}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le B\sup_{t'\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t',\varepsilon)}(v(z))^{p}|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t',\varepsilon)}(v(z)^{-q}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

مبرهنة مساعدة (2)[6]: اذا كان $f\in L_p(\Gamma,v)\,(1<p<\infty)$ عندئذ تكامل كوشي الشاذ $S_\Gamma f$ محدود على فضاء $L_p(\Gamma,v)$ أي يحقق العلاقة: $\|S_\Gamma f\|_{L_p(\Gamma,v)}\le c_1\|f\|_{L_p(\Gamma,v)}$ اذا وفقط إذا كان Γ هو منحني كارلسونو v وزن ماكينهوبت.

مبرهنة 5 : اذا كان $f\in L_p(\Gamma,v)$ وكان $\frac{1}{B}\le|\psi'(z)|\le\frac{1}{A}$ فإن:

$f_0(w)=f(\psi(w))\in L_p(\gamma,\tilde{v})$ و $\|f\|_{L_p(\Gamma,v)}\le k_3\|f_0\|_{L_p(\gamma,\tilde{v})}$

البرهان:

لنبرهن أولا أن $f_0\in L_p(\gamma,\tilde{v})$

لدينا $f \in L_p(\Gamma, \mathrm{v})$ أي أن : $\int_{\Gamma} \left| f(\mathrm{z}).\mathrm{v}(\mathrm{z}) \right|^p \left| dz \right| < \infty$

لنأخذ:

$$\int_{\gamma} \left| f_0(\mathrm{w}).\tilde{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) \right|^p \left| dw \right| = \int_{\gamma} \left| f(\psi(\mathrm{w})).\mathrm{v}(\psi(\mathrm{w})) \right|^p \left| dw \right|$$

$$= \int_{\Gamma} \left| f(\mathrm{z}).\mathrm{v}(\mathrm{z}) \right|^p \left| \varphi'(\mathrm{z}) \right| \left| dz \right| \le B \int_{\Gamma} \left| f(\mathrm{z}).\mathrm{v}(\mathrm{z}) \right|^p \left| dz \right| < \infty$$

ما يعني أن $f_0 \in L_p(\gamma, \tilde{\mathrm{v}})$

لنبرهن فيما يلي أن $\| f \|_{L_p(\Gamma,\mathrm{v})} \le k_3 \| f_0 \|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}$

$$\| f \|_{L_p(\Gamma,v)} = \left(\int_{\Gamma} \left| f(\mathrm{z}) v(\mathrm{z}) \right|^p \left| dz \right| \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\gamma} \left| f(\psi(\mathrm{w}))\, v(\psi(\mathrm{z})) \right|^p \left| \psi'(\mathrm{w}) \right| \left| dw \right| \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\frac{1}{A} \int_{\gamma} \left| f_0(w)\, \tilde{v}(w) \right|^p \left| dw \right| \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le k_3 \left(\int_{\gamma} \left| f_0(w) \tilde{v}(w) \right|^p \left| dw \right| \right)^{\frac{1}{p}} \qquad ; k_3 = A^{-\frac{1}{p}}$$

$$\le k_3 \left\| f_0 \right\|_{L_p(\gamma,\tilde{v})}$$

أي أن :

$$\boxed{\| f \|_{L_p(\Gamma,v)} \le k_3 \| f_0 \|_{L_p(\gamma,\tilde{v})}} \quad ....(7)$$

نثبت فيما يلي المبرهنة التالية التي تعطي علاقة بين تكامل كوشي الشاذ للتابع f_0 مع تكامل كوشي الشاذ للتابع f في فضاء ليبيغالموزن .

<u>مبرهنة 6 :</u> اذا كان $f \in L_p(\Gamma, v)$ و $\varphi(\mathrm{z}) \in H^1(\Gamma)$ بحيث $A \le \left| \varphi'(\mathrm{z}) \right| \le B$ فإن:

$$\left\| S_\gamma f_0 \right\|_{L_p(\gamma,\tilde{v})} \le k_4 \left\| S_\Gamma f \right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$

البرهان:

لدينا من المبرهنة (2) أن $\left|S_\gamma f_0\right| \leq k\left|S_\Gamma f\right|$ ومنه يكون:

$$\left\|S_\gamma f_0\right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}=\left(\int_\gamma\left|S_\gamma f_0(\mathrm{w})\,\tilde{\mathrm{v}}(\mathrm{w})\right|^p|dw|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_\gamma\left|S_\gamma f_0(\mathrm{w})\,\mathrm{v}(\psi(\mathrm{w}))\right|^p|dw|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(k\int_\Gamma\left|S_\Gamma f(\mathrm{z})\right|^p\left|\mathrm{v}(\mathrm{z})\right|^p\left|\varphi'(\mathrm{z})\right||\mathrm{dz}|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\frac{k}{B}\int_\Gamma\left|S_\Gamma f(\mathrm{z})\right|^p\left|\mathrm{v}(\mathrm{z})\right|^p|\mathrm{dz}|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k_4\left(\int_\Gamma\left|S_\Gamma f(\mathrm{z})\,\mathrm{v}(\mathrm{z})\right|^p|\mathrm{dz}|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k_4\left\|S_\Gamma f\right\|_{L_p(\Gamma,\mathrm{v})}$$

تحقق لدينا أن :

$$\left\|S_\gamma f_0\right\|_{L_p(\gamma,\tilde{v})}\leq k_4\left\|S_\Gamma f\right\|_{L_p(\Gamma,v)}\quad ....(8)$$

نصل فيما يلي إلى النتيجة الرئيسية في هذا البحث والتي تثبت محدودية تكامل كوشي الشاذ في الفضاء الموزن L_{p_0} .

<u>**مبرهنة 7 :**</u> إذا كان $f\in L_p(\Gamma,v)$ و $\varphi(\mathrm{z})\in H^1(\Gamma)$ بحيث $A\leq\left|\varphi'(\mathrm{z})\right|\leq B$ و Γ ينتمي إلىأسرة منحنيات كارلسونفإن $\left\|S_\gamma f_0\right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}\leq k_5\left\|f_0\right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}$ وبالتالي:

$$\left\|S_\Gamma f\right\|_{L_{p_0}(\Gamma,\mathrm{v})}\leq k_5\left\|f\right\|_{L_{p_0}(\Gamma,\mathrm{v})}$$

البرهان:

تعتمد طريقة البرهان على أن:

من (8) لدينا:

$$\boxed{\left\|S_\gamma f_0\right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}\leq k_4\left\|S_\Gamma f\right\|_{L_p(\Gamma,\mathrm{v})}}\quad ....(9)$$

ومن المبرهنة المساعدة (2) لدينا:

$$\boxed{\left\| S_{\Gamma} f \right\|_{L_p(\Gamma,\mathrm{v})} \le c_1 \left\| f \right\|_{L_p(\Gamma,\mathrm{v})}} \quad ....(10)$$

من (7) لدينا :

$$\boxed{\left\| f \right\|_{L_p(\Gamma,\mathrm{v})} \le k_3 \left\| f_0 \right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}} \quad ...(11)$$

من (9) & (10) & (11) ينتج المطلوب أي أن $\left\| S_{\gamma} f_0 \right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})} \le k_5 \left\| f_0 \right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})}$

و على اعتبار أن $\left\| \cdot \right\|_{L_p(\gamma,\tilde{\mathrm{v}})} = \left\| \cdot \right\|_{L_{p_0}(\Gamma,\mathrm{v})}$ ينتج لدينا أن :

$$\left\| S_{\Gamma} f \right\|_{L_{p_0}(\Gamma,\mathrm{v})} \le k_5 \left\| f \right\|_{L_{p_0}(\Gamma,\mathrm{v})}$$

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا في هذا البحث إلى مجموعة من النتائج التي تخص محدودية تكامل كوشي الشاذ لتوابع تنتمي إلى أسرة توابع متفرعة عن فضاء ليبيغ على أسرة منحنيات كارلسون.

ونوصي يأن تتم هذه الدراسة على أسر أخرى من التوابع مثل توابع أورليتش أو توابع موري على أسر منحنيات أخرى مثل المنحنيات النظامية.

المراجع:

[1]-GUVEN,A ; ISRAFILOV,D.M.*Multiplier theorems in weighted smirnovspaces. J. Korean math* soc,45,NO6,2008,PP.1535-1548.

[2]-RICARDO ABREU BLAYA . JUAN BORY REYES . *Boris Kats Cauchy integral and singular integral operator over closedJordancurves* Received: 25 November 2013 / Accepted: 5 June 2014 © Springer-Verlag Wien 2014.

[3]-ARXIV.*matrix Riemann -hilbert problems with jumps across carleson contours*. 1401.2506v2[math.cv]18 feb2014.

[4]- ALI GUVEN , DANIYALM. *Rational approximation of Orlicz spaces on carleson curves,* Bull .Belg . Math . soc 12(2005), 223-234.

[5]-SADULLA Z. JAFAROV.*Approximation in weighted rearrangement invariantSmirnov spaces*. DOI 10.1515/tmj-2016-0002

[6]-ISRAFILOV.D.M.*Approximation by p-Faber polynomials in the weighted smirnov class* $E^p(\mathrm{G},\mathrm{w})$ *and the Bieberbach Polynomials. Constr.*Approx.(2001) 17:335-351.