مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (4) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (4) 2016

تقريب دوال فضاء موري $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ على منحنيات ديني الملساء

الدكتور محمد علي *
الدكتور سليمان محمود **
أحمد كنج ***

(تاريخ الإيداع 28 / 3 / 2016. قُبِل للنشر في 28 / 8 /2016)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث تقريب دوال فضاء موري $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \alpha \leq 2$ إلى دوال كسرية، وذلك على أسرة واسعة من المنحنيات تدعى منحنيات ديني – الملساء. وعلاوة على ذلك، قمنا بتقريب دوال فضاء سميرنوف موري المعرفة على منطقة محاطة بمنحنٍ ينتمي إلى أسرة منحنيات ديني الملساء بكثيرات حدود.

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، منحنيات ديني الملساء، فضاء موري، كثيرات حدود فابيي.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** طالب دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات–كلية العلوم – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (4) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (4) 2016

Approximation of Complex Functions from Morrey space $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ on Dini smooth Curves

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Suliman Mahmoud**
Ahmad kinj***

(Received 28 / 3 / 2016. Accepted 28 / 8 /2016)

□ ABSTRACT □

In this work, we have studied the issue of approximation of functions from Morrey space $L_{p,\alpha}(\Gamma)$; $1 < p < \infty, 0 < \alpha \leq 2$ by rational functions on a large group of curves, which called Dini-smooth curves. Moreover, approximation of functions from Morrey Smirnov space defined on a finite domain with a boundary belonging to Dini- smooth curves by polynomials is obtained.

Keywords: Approximation theory, Dini-smooth curves, Morrey space, Faber polynomials.

* **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*** **Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يُعدّ فضاء دوال موري واحداً من أهم الفضاءات الدَّالية الشهيرة، ويُعتبر الباحث الأمريكي موري أول من عرَّف هذا الفضاء عام 1938 أثناء دراسته لحلول المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية. ومنذ ذلك الحين حظي فضاء دوال موري باهتمام العديد من الباحثين الرياضيين نظراً لتطبيقاته الواسعة في مختلف المجالات كالمعادلات التفاضلية الجزئية والميكانيك ونظرية المؤثرات... الخ.

ومن الجدير بالذكر أن تقريب بعض صفوف دوال سميرنوف موري دُرس مؤخراً من قبل الباحثين Israfilov و Tozman [1, 2]. وقد قمنا في هذا البحث بدراسة تقريب دوال فضاء موري $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث Γ منحنٍ ينتمي إلى أسرة منحنيات ديني– الملساء، إلى دوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود فابير.

ويجب التنويه إلى أنه تم أولاً إثبات بعض المبرهنات الأساسية ليتم بعد ذلك الوصول إلى برهان النتيجة الرئيسية في هذا العمل بكل سهولة ويسر. كما أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث $c, c_1, c_2, \ldots$ كلها موجبة ومختلفة ولا تؤثر على دراسة التقريب.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث من كونه يُعنى باستبدال دوال فضاء موري الصعبة والمعقدة بكثيرات حدود أو دوال كسرية بدقة مقبولة. ويتجلى هدف البحث الرئيس في دراسة تقريب دوال فضاء موري $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ إلى دوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لمتسلسلات فابير.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص ضمن التحليل العقدي والتحليل الدالي ونظرية تقريب الدوال، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على مفاهيم التحليل العقدي مثل صيغ سوخوتسكي ومحدودية مؤثر كوشي الشاذ وأدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

<u>تعريف 1</u> [3] **منحني ديني –أملس smooth curve– Dini**:

لتكن h دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$ معامل استمراريتها معرف بالعلاقة:

$$\omega(t,h) = \sup_{|t_1-t_2|\le t}|h(t_1)-h(t_2)| \quad , t \ge 0.$$

يُقال عن الدالة h إنها دالة ديني إذا حققت الشرط الآتي:

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(t,h)}{t}\,dt < \infty.$$

ويُقال عن المنحني Γ إنه منحني ديني – أملس إذا كان له التمثيل: $\Gamma: z = z(\tau); \quad 0 \le \tau \le 2\pi$ وكانت $z'(\tau)$ دالة ديني وتحقق الشرط $z'(\tau) \ne 0$ لكل $\tau \in [0,2\pi]$.

تعريف 2 [4] **فضاء دوال ليبيغ Lebesgue space** $L_p(\Gamma)$ ، $1 < p < \infty$:

ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$. يرمز بالرمز $L_p(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ القابلة للمكاملة لوبيغياً من الدرجة p على طول المنحني Γ والمحققة للشرط الآتي:

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^p \, |dz| < \infty.$$

تعريف 3 [5] **فضاء دوال موري Morrey space** $L_{p,\alpha}(\Gamma)$، $1 \le p < \infty, 0 \le \alpha \le 2$:

ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$، يُقال عن الدالة $f \in L_p(\Gamma)$ إنها تنتمي إلى فضاء دوال موري $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ إذا وجد ثابت موجب c بحيث يتحقق من أجل أي قرص B مركزه نقطة كيفية من المنحني Γ العلاقة الآتية:

$$\int_{\Gamma \cap B} |f(z)|^p \, |dz| \le c \, |\Gamma \cap B|^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

حيث $|\Gamma \cap B|$ طول قوس المنحني Γ الواقع داخل القرص B.

ومن المعلوم أن فضاء دوال موري يشكل فضاء باناخ إذا عُرف عليه النظيم الآتي [5]:

$$\|f\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} = \left\{ \sup_{B} \frac{1}{|\Gamma \cap B|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \int_{\Gamma \cap B} |f(z)|^p \, |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

ملاحظات:

- إذا كانت $\alpha = 2$، فإن فضاء دوال موري يتطابق مع فضاء دوال ليبيغ $L_p(\Gamma)$.
- إذا كانت $\alpha = 0$، فإن فضاء دوال موري يتطابق مع الفضاء $L_\infty(\Gamma)$.
- من أجل $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 2$ فإن $L_{p,\alpha_2}(\Gamma) \subseteq L_{p,\alpha_1}(\Gamma)$.

من الملاحظات السابقة نتوصل إلى العلاقة الآتية:

$$L_{p,\alpha}(\Gamma) \subset L_p(\Gamma) \subset L_1(\Gamma). \quad (1)$$

تعريف 4 [1] **فضاء دوال سميرنوف موري Smirnov Morrey space** $E_{p,\alpha}(\mathrm{G})$:

لتكن G منطقة في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولتكن Γ_r صورة الدوائر $\gamma_r := \{w \in \mathbb{C}: |w| = r, 0 \le r < 1\}$ وفق تحويل محافظ ينقل قرص الواحدة D إلى المنطقة G. يُرمز بالرمز $E_1(G)$ لأسرة جميع الدوال $f: G \to \mathbb{C}$ التحليلية في المنطقة G والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_{\Gamma_r} |f(z)| \, |dz| < \infty,$$

يُعرف فضاء دوال سميرنوف موري $E_{p,\alpha}(\mathrm{G})$ بالعلاقة الآتية:

$$E_{p,\alpha}(\mathrm{G}) = \{f \in E_1(G); f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)\}.$$

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

أ)ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي ولنرمز بـ $\mathbb{C}$ و $G = int\,\Gamma$ و $G^- = ext\,\Gamma$ ودون المساس بعمومية المسألة لنفترض أن $0 \in G$ ولنرمز بـ γ_0 للدائرة الواحدية أي $\gamma_0 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ وبالرمز $D = int\,\gamma_0$ و $D^- = ext\,\gamma_0$.

ب) لنرمز بـ $w = \varphi(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- وتحقق $\lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$ ، $\varphi(\infty) = \infty$ وبالرمز ψ للدالة العكسية للدالة φ.

ج) لنرمز بـ $w = \varphi_1(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G إلى D^- وتحقق $\lim_{z\to 0} z\varphi_1(z) > 0$ $\varphi_1(0) = \infty$ وبالرمز ψ_1 للدالة العكسية للدالة φ_1 .

<u>تعريف 5</u> [6] كثيرات حدود فابير Faber polynomials:

ليكن منشور لوران للدالة $\varphi(z)$ في جوار اللانهاية من الشكل:

$$\varphi(z) = bz + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \cdots, b > 0$$

ومن أجل $k \in \mathbb{N}$ يكون لدينا:

$$[\varphi(z)]^k = \left[bz + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \cdots\right]^k = b^k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{-n}}{z^n}$$

إنَّ كثيرة الحدود:

$$b^k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \beta_0$$

تُدعى كثيرة حدود فابير من الدرجة k ويرمز لها بالرمز $F_k(z)$.

أي أنَّ كثيرات حدود فابير $F_k(z)$ من الدرجة k هي مجموع الحدود ذات القوى غير السالبة في منشور لوران للدالة $[\varphi(z)]^k$ في جوار اللانهاية.

من المعلوم أنه يمكن تمثيل كثيرات حدود فابير بالشكل التكاملي الآتي [7]:

$$F_k(z) = \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi^k(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \qquad z \in G^- \tag{2}$$

$$\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_1^k(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,, \qquad z \in G\backslash\{0\} \tag{3}$$

النتائج والمناقشة:

نعرف من أجل كل $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ الدالتين f_0 ، f_1 بالعلاقتين الآتيتين:

$$f_0(w) := (f \circ \psi)(w) = f\left(\psi(w)\right)\ ; w \in D^- \tag{4}$$

$$f_1(w) := (f \circ \psi_1)(w) = f\left(\psi_1(w)\right)\ ; w \in D \tag{5}$$

نبيّن في المبرهنة الآتية أنَّ الدالتين f_0 ، f_1 تنتميان إلى فضاء دوال موري على الدائرة الواحدية.

مبرهنة 1: ليكن Γ منحني ديني – أملس، عندئذٍ إذا كان $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ فإنَّ $f_0 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ و $f_1 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ حيث $1 \le p < \infty$ و $0 \le \alpha \le 2$.

البرهان: لنفرض أنَّ $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ ولنبرهن أن $f_0 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$. نبيّن أولاً أنَّ $f_0 \in L_p(\gamma_0)$.

$$\int_{\gamma_0} |f_0(w)|^p \, |dw| = \int_{\gamma_0} |f[\,\psi(w)\,]|^p \, |dw| = \int_{\Gamma} |f(z)|^p |\varphi'(z)| \, |dz|,$$

بما أنَّ Γ منحني ديني– أملس، فإنَّه يوجد ثابتان موجبان c_1, c_2 بحيث يتحقق [3]:

$$0 < c_1 \le |\varphi'(z)| \le c_2 < \infty, \qquad (6)$$

لدينا $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ وبالتالي $f \in L_p(\Gamma)$ ومنه ينتج أن:

$$\int_{\gamma_0} |f_0(w)|^p \, |dw| \le c_2 \int_{\Gamma} |f(z)|^p \, |dz| < \infty,$$

ومنه $f_0 \in L_p(\gamma_0)$.

ليكن T قرصاً كيفياً مركزه نقطة من المنحني γ_0 ، عندئذٍ بالاستفادة من العلاقة (6) نجد أنَّ:

$$\int_{\gamma_0 \cap T} |f_0(w)|^p |dw| = \int_{\Gamma \cap B} |f(z)|^p |\varphi'(z)||dz| \le c_2 \int_{\Gamma \cap B} |f(z)|^p |dz|$$

حيث $\Gamma \cap B$ هو صورة جزء المنحني Γ الذي صورته وفق التحويل φ هو $\gamma_0 \cap T$

وبما أن $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ فإنَّه يوجد ثابت موجب c بحيث تتحقق العلاقة الآتية:

$$\int_{\gamma_0 \cap T} |f_0(w)|^p |dw| \le c_2 \int_{\Gamma \cap B} |f(z)|^p |dz| \le c_2 c |\Gamma \cap B|^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

وبالاستفادة من العلاقة $|\Gamma \cap B| = \int_{\Gamma \cap B} |dz|$ نجد أنَّ:

$$\int_{\gamma_0 \cap T} |f_0(w)|^p |dw| \le c_2 c \left(\int_{\Gamma \cap B} |dz| \right)^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

وبإجراء التحويل $z = \psi(w)$ يكون لدينا:

$$\int_{\gamma_0 \cap T} |f_0(w)|^p |dw| \le c_2 c \left(\int_{\gamma_0 \cap T} |\psi'(w)||dw| \right)^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

وبما أن ψ هي الدالة العكسية للدالة φ، فإنَّه من العلاقة (6) نجد أنَّ $0 < \frac{1}{c_2} \le |\psi'(w)| \le \frac{1}{c_1} < \infty$

وبالتعويض في العلاقة الأخيرة نتوصل إلى أنَّ:

$$\int_{\gamma_0 \cap T} |f_0(w)|^p |dw| \le \frac{c_2 c}{(c_1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left(\int_{\gamma_0 \cap T} |dw| \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{c_2 c}{(c_1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} |\gamma_0 \cap T|^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

وبوضع $c_3 = \frac{c_2 c}{(c_1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ نجد أنَّ $\int_{\gamma_0 \cap T} |f_0(w)|^p |dw| \le c_3 |\gamma_0 \cap T|^{\frac{\alpha}{2}-1}$

أي أنَّ $f_0 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ وبأسلوب مشابه نبرهن أنَّ $f_1 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$. □

مبرهنة مساعدة 1 [1]: إذا كان Γ منحني ديني–أملس و $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \alpha \le 2$ فإنَّ تكامل كوشي الشاذ للدالة f المعرف بالعلاقة $S_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$ ، $z \in \Gamma$ يكون موجوداً ومحدوداً، أي يوجد ثابت موجب c_4 بحيث يتحقق:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \le c_4 \|f\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} . \quad (7)$$

مبرهنة مساعدة 2 [8]: إذا كان $f \in L_1(\Gamma)$، عندئذٍ يوجد لتكامل نوع كوشي قيمتان حدوديتان من جهتي المنحني Γ نرمز لهما بـ f^-, f^+ تحليليان في G^-, G على الترتيب، وترتبطان مع الدالة f ومع تكامل كوشي الشاذ $S_\Gamma f$ من خلال علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$f^+(z) = S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2} f(z) , \quad (8)$$

$$f^-(z) = S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2} f(z) , \quad (9)$$

ومن العلاقتين (8) و (9) تنتج لدينا العلاقة الهامة الآتية:

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z) . \quad (10)$$

تعريف 6 [2] **معامل الملاسة في الفضاء $L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ Modulus of smoothness**

إذا كان $g \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 \le \alpha \le 2$ ، عندئذٍ يُعرف معامل الملاسة من المرتبة r في الفضاء $L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ بالعلاقة الآتية:

$$\Omega^r_{p,\alpha}(g,\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \|\Delta^r_h(g,w)\|_{L_{p,\alpha}(\gamma_0)} ; \quad r \in \mathbb{N}, \delta > 0, h \in \mathbb{R}, w \in \gamma_0,$$

حيث

$$\Delta^r_h(g,w) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} g\left(w\, e^{ikh}\right) ; r \in \mathbb{N},, h \in \mathbb{R}, w \in \gamma_0.$$

نُعرف من أجل اي $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ معاملا الملاسة في الفضاء $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ بالعلاقتين الآتيتين:

$$\Omega^r_{\Gamma,p,\alpha}(f,\delta) := \Omega^r_{p,\alpha}(f_0^+,\delta); \quad \delta > 0, \quad (11)$$

$$\widetilde{\Omega}^r_{\Gamma,p,\alpha}(f,\delta) := \Omega^r_{p,\alpha}(f_1^+,\delta); \quad \delta > 0. \quad (12)$$

مبرهنة مساعدة 3 [1]: إذا كان $g \in E_{p,\alpha}(D)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \alpha \le 2$ عندئذٍ يوجد ثابت موجب c_5 بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right\|_{L_{p,\alpha}(\gamma_0)} \le c_5\, \Omega^r_{p,\alpha}\left(g, \frac{1}{n+1}\right) . \quad (13)$$

حيث إنَّ $\sum_{k=0}^{n} a_k w^k$ هو مجموع أول n حد لمنشور تايلور للدالة g في جوار الصفر.

ملاحظة: وجدنا من العلاقة (10) أنَّ $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$، وبالتالي من أجل تقريب الدالة f على المنحني Γ يكفي أن نقوم بتقريب الدالتين f^+, f^- التحليليتين في G, G^-، على الترتيب. ولأجل الوصول إلى هذه الغاية نقوم بتشكيل كثيرة حدود جبرية بقوى z لتقريب الدالة f^+ وكثيرة حدود جبرية بقوى $\frac{1}{z}$ لتقريب الدالة f^-.

■ نقوم في المبرهنة الآتية بكتابة كثيرة الحدود $\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$ بشكل يساعدنا على تقريب الدالة f^+ إليها.

مبرهنة2: إذا كان Γ منحني ديني –أملس و $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \alpha \leq 2$ فإنَّ:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) + S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right) - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k - f_0^+(\varphi(z))\right] - f_0^-(\varphi(z)) \quad (14)$$

حيث $F_k(z)$ كثيرات حدود فابير والأمثال a_k تُعطى بالعلاقة الآتية:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}\, dw.$$

البرهان: بما أنَّ $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$، فإنَّه من المبرهنة (1) ينتج أن $f_0 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ وبالاستفادة من العلاقة (1) نجد أن $f_0 \in L_1(\gamma_0)$ وحسب المبرهنة المساعدة (2) يكون تكامل كوشي الشاذ للدالة f_0 على γ_0 موجوداً، ولتكامل نوع كوشي للدالة f_0 قيمتان حدوديتان f_0^-, f_0^+ تحققان العلاقة الآتية:

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w), \quad (15)$$

بالاستفادة من العلاقة (4) ووضع $z = \psi(w)$ في العلاقة (15) نحصل على العلاقة الآتية:

$$f(z) = f_0^+(\varphi(z)) - f_0^-(\varphi(z)), \quad (16)$$

لتكن $t \in G^-$ نقطة كيفية، عندئذٍ باستخدام العلاقتين (2) و (16) يكون لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi)}{\xi - t} d\xi =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k\, \varphi^k(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi) - f_0^+(\varphi(\xi))}{\xi - t} d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi - t} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi\,, \quad (17)$$

بما أن $f_0^-(\varphi(\xi))$ دالة تحليلية في G^- فإنه من صيغة كوشي التكاملية يكون لدينا:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi - t} d\xi = -f_0^-(\varphi(t))\,, \quad (18)$$

وبالاستفادة من العلاقة (10) نجد أنَّ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^+(\xi)}{\xi - t} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^-(\xi)}{\xi - t} d\xi = f^-(t), \quad (19)$$

بتعويض العلاقتين (18) و(19) في العلاقة (17) نجد:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi) - f_0^+(\varphi(\xi))}{\xi - t} d\xi - f_0^-(\varphi(t))$$
$$+ f^-(t),$$

وبأخذ النهاية في طرفي العلاقة الأخيرة عندما $t \longrightarrow z \in \Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من العلاقة (9) يكون لدينا:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) + S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right] - f_0^-(\varphi(z)) + f^-(z). \quad \square$$

■ سنقرّب في المبرهنة الآتية الدالة f^+ بكثيرة الحدود $\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$ التي شكلناها في المبرهنة (2).

مبرهنة3: ليكن Γ ديني – أملس و $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \alpha \leq 2$ عندئذٍ من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_6 وكثيرة حدود $p_n(z,f) = \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\|f^+(z) - p_n(z,f)\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \leq c_6\, \Omega^r_{\Gamma,p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n+1}\right),$$

حيث $\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$ كثيرة الحدود التي شكلناها في المبرهنة (2) و $\Omega^r_{\Gamma,p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n+1}\right)$ معامل الملاسة في الفضاء $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ المعرف بالعلاقة (11).

البرهان: من العلاقة (14) وبالاستفادة من العلاقتين (9) و (16) نجد أنَّ:

$$f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \frac{1}{2}\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right)$$
$$+S_\Gamma\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right),$$

بالتالي:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}\left\|f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}$$
$$+\left\|S_\Gamma\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)},$$

وبالاستفادة من محدودية مؤثر كوشي الشاذ والعلاقة (7) يكون:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \leq \left(c_4 + \frac{1}{2}\right)\left\|f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)},$$

وبإجراء التحويل $w = \varphi(z)$ نجد أنَّ:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \leq \left(c_4 + \frac{1}{2}\right)\left\|f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right\|_{L_{p,\alpha}(\gamma_0)},$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (3) نتوصل إلى أنَّ:

$$\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \leq c_5\left(c_4 + \frac{1}{2}\right)\Omega^r_{p,\alpha}\left(f_0^+, \frac{1}{n+1}\right),$$

ومن تعريف معامل الملاسة في العلاقة (11) وبوضع $c_6 = c_5\left(c_4 + \frac{1}{2}\right)$ نحصل على المتراجحة:

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) \right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \le c_6\, \Omega^r_{\Gamma,p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n+1}\right). \qquad \square$$

■ نقوم في المبرهنة الآتية بكتابة كثيرة الحدود $\sum_{k=0}^{n} \widetilde{a_k}\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ بشكل يساعدنا على تقريب الدالة f^- اليها.

مبرهنة 4: إذا كان Γ منحني ديني –أملس و $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \alpha \le 2$ فإنَّ:

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\,\widetilde{F_K}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z) - S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z))\right) - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z))\right] - f_1^-(\varphi_1(z)) - f^+(z), \tag{20}$$

حيث $\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ كثيرات حدود فابير بقوى $\frac{1}{z}$ والأمثال $\tilde{a}_k$ تُعطى بالعلاقة الآتية:

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f_1(w)}{w^{k+1}}\, dw.$$

البرهان: بما أنَّ $f \in L_{p,\alpha}(\Gamma)$، فإنَّه من المبرهنة (1) ينتج أن $f_1 \in L_{p,\alpha}(\gamma_0)$ وبالاستفادة من العلاقة (1) نجد أن $f_1 \in L_1(\gamma_0)$ وحسب المبرهنة المساعدة (2) يكون تكامل كوشي الشاذ للدالة f_1 على γ_0 موجوداً، ولتكامل نوع كوشي للدالة f_1 قيمتان حدوديتان f_1^-, f_1^+ تحققان العلاقة الآتية:

$$f_1(w) = f_1^+(w) - f_1^-(w), \tag{21}$$

بالاستفادة من العلاقة (5) وبوضع $z = \psi(w)$ في العلاقة (21) نحصل على العلاقة الآتية:

$$f(z) = f_1^+(\varphi_1(z)) - f_1^-(\varphi_1(z)), \tag{22}$$

لتكن $t_1 \in G$ نقطة كيفية، عندئذٍ باستخدام العلاقتين (3) و (22) نجد أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\,\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{t_1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\,\varphi_1^k(t_1) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\varphi_1^k(\xi)}{\xi - t_1}\, d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(t_1) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k\varphi_1^k(\xi) - f_1^+(\varphi_1(\xi))}{\xi - t_1} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1^-(\varphi_1(\xi))}{\xi - t_1} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t_1} d\xi, \tag{23}$$

بما أن $f_1^-(\varphi_1(\xi))$ دالة تحليلية في G فإنَّه من صيغة كوشي التكاملية يكون لدينا:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1^-(\varphi_1(\xi))}{\xi - t_1} d\xi = f_1^-(\varphi_1(t_1)), \tag{24}$$

وبالاستفادة من العلاقة (10) نجد أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t_1} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^+(\xi)}{\xi - t_1} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^-(\xi)}{\xi - t_1} d\xi = f^+(t_1), \tag{25}$$

وبتعويض العلاقتين (24) و(25) في العلاقة (23) نتوصل إلى العلاقة الآتية:

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(\frac{1}{t_1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(t_1)$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(\xi)-f_1^+(\varphi_1(\xi))}{\xi-t_1}d\xi-f_1^-(\varphi_1(t_1)-f^+(t_1),$$

وبأخذ النهاية في طرفي العلاقة الأخيرة عندما $t_1\longrightarrow z\in\Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من العلاقة (8) نجد أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\tilde{F}_K\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right]-f_1^-(\varphi_1(z))-f^+(z).\qquad\square$$

■ تعطي المبرهنة الآتية تقريباً للدالة f^- بكثيرة الحدود $Q_n\left(\frac{1}{z},f\right)=-\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)$.

مبرهنة 5: ليكن Γ دیني – أملس و $f\in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ حيث $1<p<\infty$ و $0<\alpha\leq 2$ عندئذٍ من أجل أي عدد $n\in\mathbb{N}$ يوجد يوجد ثابت موجب c_6 وكثيرة حدود بقوى $\frac{1}{z}$ $Q_n\left(\frac{1}{z},f\right)=-\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\left\|f^-(z)-Q_n\left(\frac{1}{z},f\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq c_6\,\widetilde{\Omega}_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right),$$

حيث $\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ كثيرة الحدود التي قمنا بتشكيلها في المبرهنة (4) و $\widetilde{\Omega}_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$ معامل الملاسة في الفضاء $L_{p,\alpha}(\Gamma)$ المعرف بالعلاقة (12).

البرهان: من العلاقة (20) وبالاستفادة من العلاقتين (8) و (23) نجد أنَّ:

$$f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))$$
$$-S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right),$$

عندئذٍ:

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}$$
$$+\left\|S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)},$$

وبالاستفادة من محدودية مؤثر كوشي الشاذ والعلاقة (7) يكون:

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq\left(c_4+\frac{1}{2}\right)\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+(\varphi_1(z))\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)},$$

وبإجراء التحويل $w=\varphi(z)$ نجد أنَّ:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq\left(c_4+\frac{1}{2}\right)\left\|f_1^{+}(w)-\sum_{k=1}^{n}a_k w^k\right\|_{L_{p,\alpha}(\gamma_0)},$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (3) نتوصل إلى العلاقة الآتية:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq\left(c_4+\frac{1}{2}\right)\left\|f_1^{+}(w)-\sum_{k=1}^{n}a_k w^k\right\|_{L_{p,\alpha}(\gamma_0)}$$
$$\leq c_5\left(c_4+\frac{1}{2}\right)\Omega_{p,\alpha}^{r}\left(f_1^{+},\frac{1}{n+1}\right),$$

ومن تعريف معامل الملاسة في العلاقة (12) نجد أنَّ:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq c_6\,\widetilde{\Omega}_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right).$$

حيث $c_6=c_5\left(c_4+\frac{1}{2}\right)$ □

■ نعرض الآن المبرهنة الرئيسة في هذه المقالة والتي تختص بتقريب الدوال العقدية من فضاء دوال موري بدوال كسرية.

مبرهنة 6: ليكن Γ منحني ديني أملس و $f\in L_{p,\alpha}(\Gamma)$ ، حيث $1<p<\infty$ و $0<\alpha\leq 2$ عندئذٍ من أجل أي عدد $n\in\mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_6 ودالة كسرية $R_n(z,f)$ بحيث يتحقق:

$$\|f-R_n(.,f)\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq c_6\left[\Omega_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+\widetilde{\Omega}_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

البرهان: بوضع $R_n(z,f)=\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ وباستخدام العلاقة $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ وبالاستفادة من المبرهنتين (3) و (5) يكون لدينا:

$$\|f(z)-R_n(z,f)\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}$$
$$\leq\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}+\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}$$

$$\leq c_6\,\Omega_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+c_6\,\widetilde{\Omega}_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=c_6\left[\Omega_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+\widetilde{\Omega}_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\right].\square$$

نتيجة 1. لتكن G منطقة محدودة في المستوي العقدي محاطة بمنحني ينتمي إلى أسرة منحنيات ديني الملساء عندئذٍ، إذا كان $f\in E_{p,\alpha}(G)$ فإنه من أجل أي عدد $n\in\mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_6 وكثيرة حدود جبرية $p_n(z,f)$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\|f-p_n(z,f)\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)}\leq c_6\,\Omega_{\Gamma,p,\alpha}^{r}\left(f,\frac{1}{n+1}\right).$$

البرهان: بما أنَّ $f \in E_{p,\alpha}(G)$، فإنَّ الدالة f تحليلية في المنطقة G وبالتالي حسب صيغة كوشي التكاملية يكون لدينا:

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0 \ ;\forall z \in G^-.$$

أي أنَّ: $f^-(z) = 0$ وبالتالي، من العلاقة (10) ينتج أنَّ $f(z) = f^+(z)$ ومن المبرهنة (3) نتوصل إلى أنَّ:

$$\|f - p_n(z,f)\|_{L_{p,\alpha}(\Gamma)} \leq c_6\ \Omega^r_{\Gamma,p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n+1}\right). \square$$

الاستنتاجات والتوصيات

توصلنا في هذه المقالة إلى تقريب دوال فضاء موري بدوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود فابير على أسرة منحنيات ديني الملساء، كما قمنا بتقريب دوال فضاء سميرنوف إلى كثيرات حدود فابير. ونوصي بدراسة تقريب دوال فضاء موري بدوال كسرية على منحنيات أكثر عمومية مثل أسرة منحنيات كارلسون ودراسة تقريب دوال فضاء سميرنوف موري الموزنة بكثيرات حدود على أسرة منحنيات ديني الملساء أو على أسرة منحنيات كارلسون.

المراجع

[1] ISRAFILOV. D .M; TOZMAN.N.P. *Approximation by polynomials in morrey-smirnov classes*. East J. Approx. 14 (3), 2008, 255-269.

[2] ISRAFILOV. D. M; TOZMAN.N.P. *Approximation in Morrey- Smirnov classes.* Azerbaijan Journal of Mathematics 1(1), 2001, 99-113.

[3] POMMERENKE. C. *Boundary behavior of conformal maps*, Springer-Verlage, 1992.

[4] ISRAFILOV. D. M; AHMET. T. *Approximation in weighted Smirnov classes.* Complex Variables and Elliptic Equations, 2014, 1-14.

[5] KUFNER. A; JOHN. O; FUCIK. S. *Functions Spaces*, Leyden, The Netherland Noordhoff International Publishing, 1977.

[6] Suetin. P, *Series of Faber Polynomials*, Nauka, Moscow: Cordon and Breach Publishers, 1984.

[7] JAFAROV. S. *Approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces*. Journal of computational analysis and applications 13, 2011, 953-962.

[8] GOLUZIN. G. *Geometric theory of functions of a complex variable*, 26 ed., Providence. Rhode Island. Translations of Mathematical Monographs. 2G, AMS, 1969.