مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (4) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (4) 2016

خواص وتقريب الدوال في صف الدوال $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$

الدكتور نزار محمد حسن*

(تاريخ الإيداع 4 / 5 / 2016. قُبِل للنشر في 15 / 8 /2016)

□ ملخّص □

درسنا في هذه المقالة إحدى مسائل التحليل الدالي المتعلقة بإنشاء صف دالي جديد نرمز له بالرمز $L_pH^{\alpha}(z_0)$ انطلاقاً من تعريف كلٍ من صف دوال ليبيغ $L_p(\Gamma)$ وصف دوال هولدر $H^{\alpha}(\Gamma)$ ومن ثم درسنا علاقات التداخل في هذا الصف والعلاقة بين الصف الجديد وكلٍمن صفي دوال ليبيغ ودوالهولدر، في النهايةندرستقريب صف الدوال الجديد إلى دوال كسرية.

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، فضاء ليبيغ، فضاء هولدر، مؤثر كوشي الشاذ.

* مدرس – قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة التقنية – جامعة طرطوس – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (4) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (4) 2016

Properties and approximation of functions in the class of functions $L_p H^{\alpha}(\Gamma)$

Dr. Nizar Mohamad Hassan*

(Received 4 / 5 / 2016. Accepted 15 / 8 /2016)

□ ABSTRACT □

We study in this paper one of functional analysis problems, involved with construction a new class of functions, denoted by $L_p H^{\alpha}(z_0)$. The definition of the new class depends on definition of Lebesgueclass of functions and on the Holder class $H^{\alpha}(\Gamma)$. We study the relation between the new class and $L_p(\Gamma)$and approximation of the new class to rational functions.

Keywords: approximation theory, Lebesgue space, Holder space, singular Cauchy integral.

***Associate Professor, Department of Basic sciences, Faculty of Technical Engineering, University, Tartous, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أن العناصر الرئيسية في مسائل نظرية تقريب الدوال ترتبط بمايلي:

1- أسرة الدوال التي يتم تقريبها(أسرة دوال ليبيغ – أسرة دوال أورليتش...).

2- أسرة الدوال التي يتم التقريب إليها (كثيرات حدود –دوالكسرية...).

3- أسرة المجموعات التي يتم التقريب عليها(مناطق – منحنيات مغلقة – منحنيات مفتوحة).

4- تقدير درجة التقريب أو تقدير الفروق بين الدوال المقربة والدوال الذي يتم التقريب إليه.

لقد ركزنا في بحثنا هذا على البند الأول وهو أسرة الدوال التي يتم تقريبها، فقمنا بتعريف صف دوال جديد مستوحى من تعريف صفي دوال ليبيغ وهولدر ودرسنا العلاقة بين الصف الجديد وكلاً من صفي دوال هولدر وليبيغ، وبالاستفادة من ذلك درسنا تقريب الصف الجديد إلى دوال كسرية.

كما اعتبرنا في هذا البحث أن الثوابت المستخدمة $c_1, c_2, ...$ جميعها موجبة ومختلفة ولا تؤثر على دراسة التقريب.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من أهمية نظرية تقريب الدوال العقدية، فمن خلال معرفة الأسرة التي تنتمي إليها الدالة العقدية يمكننا إيجاد كثير حدود أو دالة كسريةقريبة منها بدرجة كافية.

أما أهدف البحث فهي الوصول إلى النتائج الآتية:

1- تعريف صف دوال جديدة $L_pH^\alpha(z_0)$.

2- دراسة محدودية مؤثر كوشي الشاذ في الفضاء $L_pH^\alpha(z_0)$.

3- دراسة العلاقة بين صف الدوال $L_pH^\alpha(\Gamma)$ و $L_pH^\beta(\Gamma)$ حيث $0<\beta<\alpha\le 1$.

4- دراسة العلاقة بين صفي الدوال $L_pH^\alpha(\Gamma)$ و $L_qH^\alpha(\Gamma)$ حيث $0<p<q\le\infty$.

5- دراسة تقريب صف الدوال $L_pH^\alpha(\Gamma)$ على المنحنيات المغلقة.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل الدالي ونظرية تقريب الدوال، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1 [5] منحني $-k$:

يقال عن منحني جوردان المحدود الطول Γ أنه منحني $-k$ إذا كان من أجل أي نقطتين $z_1, z_2\in\Gamma$ يوجد ثابت موجب c بحيث يتحقق $l(z_1,z_2)\le c|z_1-z_2|$ حيث $l(z_1,z_2)$ يمثل طول جزء المنحني Γ الواصل بين النقطتين و $|z_1-z_2|$ يمثل طول الوتر الواصل بين النقطتين z_1, z_2.

تعريف2 [4]فضاء دوال ليبيغ $L_p(\Gamma)$ ، $1<p<\infty$:

ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي C ، يرمز بالرمز $L_p(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال العقدية $f:\Gamma\to C$ والمحققة للشرط الآتي:

$$\int_{\Gamma}|f(z)|^p|dz|<\infty$$

ويعرف النظيم في الفضاء $L_p(\Gamma)$ بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)}=\left(\int_{\Gamma}|f(z)|^p|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعريف 3 [1] تكامل كوشي الشاذ:

يعرف تكامل كوشي الشاذ للدالة $f(z)$ على المنحني Γ بالعلاقة:

$$(S_{\Gamma}f)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-t}dt \qquad ;\ t\in\Gamma$$

ويرمز له بالرمز $(S_{\Gamma}f)$.

تعريف 4 أسرة منحنيات ريس [5]:

ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي C ، يقال عن المنحني Γ أنه ينتمي إلى أسرة منحنيات ريس إذا كان تكامل كوشي الشاذ محدوداً كمؤثر، من أجل دوال الأسرة $L_p(\Gamma)$ ، أي إذا كان:

$$\|S_{\Gamma}f\|_{L_p(\Gamma)}\le c\|f\|_{L_p(\Gamma)}$$

تعريف 5 صف الدوال $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$:

نقول عن الدالة f أنها تنتمي إلى صف الدوال $L_pH^{\alpha}(z_0)$ حيث $1<p<\infty$ و $0<\alpha\le 1$ إذا وجد ثابت موجب $c>0$ بحيث يتحقق:

$$\left(\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)|^p|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\le c|z-z_0|^{\alpha} \qquad ;\ z_0\in\Gamma$$

ونقول عن الدالة f أنها تنتمي إلى صف الدوال $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ إذا كانت $f\in L_pH^{\alpha}(z_0)$ ، لكل $z_0\in\Gamma$ نعرف على الصف $L_pH^{\alpha}(z_0)$ النظيم بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L_pH^{\alpha}(\Gamma)}=\left(\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)|^p|dz|\right)^{\frac{1}{p}}=\|f(z)-f(z_0)\|_{L_p(\Gamma)}$$

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في البحث [5]

أ)ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي C ولنرمز بـ $G=\operatorname{int}\Gamma$ و $G^{-}=ext\,\Gamma$ ، ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة،أن $0\in G$ ولنرمز بـ γ_0 للدائرة الواحدية أي $\gamma_0=\{w\in C:|w|=1\}$ وبالرمز $D=\operatorname{int}\gamma_0$ و $D^{-}=ext\,\gamma_0$.

ب) لنرمز بـ $w=\varphi(z)$ للدوال التي تنقل بشكل محافظ D^{-} إلى G^{-} وتحقق:

$$\varphi(\infty)=\infty \quad , \quad \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$$

ولنرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.

ت) لنرمز بـ $w=\varphi_1(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G إلى D^- وتحقق:

$$\varphi_1(0)=\infty \quad , \quad \lim_{z\to 0} z\,\varphi_1(z)>0$$

ولنرمز بـ ψ_1 للدالة العكسية للدالة φ_1.

النتائج والمناقشة:

نبين في المبرهنة الآتية أن صف الدوال $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ محتوى في صف الدوال $L_pH^{\beta}(\Gamma)$ إذا كان $0<\beta<\alpha\le 1$.

مبرهنة (1): $L_pH^{\alpha}(\Gamma)\subseteq L_pH^{\beta}(\Gamma)$ لكل $0<\beta<\alpha\le 1$ و $1<p<\infty$.

البرهان: لنفرض أن $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ ولنبرهن أن $f\in L_pH^{\beta}(\Gamma)$.

بما أن $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ فإنه يوجد ثابت موجب $c_1>0$ بحيث يتحقق:

$$\| f(z)-f(z_0)\|_{L_p}\le c_1|z-z_0|^{\alpha} \quad ; \quad \forall z_0\in\Gamma$$

ولدينا:

$$|z-z_0|^{\alpha}\le |z-z_0|^{\beta} \quad ; \quad 0<\beta<\alpha\le 1$$

وبالتالي نجد أن:

$$\| f(z)-f(z_0)\|_{L_p}\le c_1|z-z_0|^{\alpha}\le c_1|z-z_0|^{\beta}$$

ومنه $f\in L_pH^{\beta}(\Gamma)$. □

في المبرهنة الآتية نبين أن صفالدوال $L_qH^{\alpha}(\Gamma)$ محتوى في صف الدوال $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ إذا كان $1<p<q<\infty$.

مبرهنة (2): $L_qH^{\alpha}(\Gamma)\subseteq L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ حيث $1<p<q<\infty$ و $0<\alpha\le 1$.

البرهان: لنفرض أن $f\in L_qH^{\alpha}(\Gamma)$ ولنبرهن أن $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$.

بالاستفادة من العلاقة:

$$\| f\|_{L_p}\le\| f\|_{L_q} \quad ; \quad 1<p<q<\infty$$

وبما أن لكل $f\in L_qH^{\alpha}(\Gamma)$ يوجد ثابت موجب $c_2>0$ بحيث يتحقق:

$$\| f(z)-f(z_0)\|_{L_q}\le c_2|z-z_0|^{\alpha} \quad ; \quad \forall z_0\in\Gamma$$

نجد أن:

$$\| f(z)-f(z_0)\|_{L_p}\le\| f(z)-f(z_0)\|_{L_q}\le c_2|z-z_0|^{\alpha} \quad ; \quad \forall z_0\in\Gamma$$

أي أن $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$. □

نبين في المبرهنة الآتية أن صف الدوال $L_qH^{\alpha}(\Gamma)$ محتوى في صف الدوال $L_pH^{\beta}(\Gamma)$ عندما $1<p<q<\infty$ و $0<\beta<\alpha\le 1$.

مبرهنة (3): $L_qH^{\alpha}(\Gamma)\subseteq L_pH^{\beta}(\Gamma)$ حيث $1<p<q<\infty$ و $0<\beta<\alpha\le 1$.

البرهان: من المبرهنة (2) وجدنا أن $L_qH^{\alpha}(\Gamma)\subseteq L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ لكل $1<p<q<\infty$ و $0<\alpha\le 1$ ومن المبرهنة (1) لدينا $L_pH^{\alpha}(\Gamma)\subseteq L_pH^{\beta}(\Gamma)$ لكل $0<\beta<\alpha\le 1$ وبالتالي نجد أن:

$L_qH^{\alpha}(\Gamma)\subseteq L_pH^{\beta}(\Gamma)$. □

نبين في المبرهنة الآتية أن صف الدوال $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ جزئي من صف دوال ليبيغ $L_p(\Gamma)$.

مبرهنة (4): إذا كانت $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ فإن $f\in L_p(\Gamma)$ لكل $1<p<\infty$ و $0<\alpha\le 1$.

البرهان: لتكن $z_0\in\Gamma$ نقطة كيفية مثبتة عندئذ:

$$\| f(z)\|_{L_p(\Gamma)}=\| f(z)-f(z_0)+f(z_0)\|_{L_p(\Gamma)}\le\| f(z)-f(z_0)\|_{L_p(\Gamma)}+\| f(z_0)\|_{L_p(\Gamma)}$$

وبما أن $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ فإنه يوجد ثابت موجب c_3 بحيث يتحقق:

$$\| f(z)-f(z_0)\|_{L_p(\Gamma)}\le c_3|z-z_0|^{\alpha}\quad ;\ \forall z_0\in\Gamma$$

وبالتالي نجد أن:

$$\| f(z)\|_{L_p(\Gamma)}\le c_3|z-z_0|^{\alpha}+\| f(z_0)\|_{L_p(\Gamma)}=c_3|z-z_0|^{\alpha}+\int_{\Gamma}|f(z_0)|^p|dz|$$

$$\le c_3|z-z_0|^{\alpha}+|f(z_0)|^p\int_{\Gamma}|dz|$$

وبما أن Γ منحني محدود الطول فإن $\int_{\Gamma}|dz|=mes(\Gamma)<\infty$ ومن كون z_0 نقطة مثبتة فإن $|f(z_0)|<M$ كما أن $|z-z_0|$ يمثل طول الوتر الواصل بين النقطتين z و z_0 فإن $|z-z_0|<K$ ومنه نجد أن:

$$\| f(z)\|_{L_p(\Gamma)}\le c_3K^{\alpha}+M^p mes(\Gamma)<\infty$$

أي أن $f\in L_p(\Gamma)$. □

نبين في المبرهنة الآتية أن دوال الصف $L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ قابلة للمكاملة لوبيغياً على طول المنحني Γ.

مبرهنة (5): إذا كان $f\in L_pH^{\alpha}(\Gamma)$ فإن $f\in L_1(\Gamma)$.

البرهان:

$$\int_{\Gamma}|f(z)||dz|=\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)+f(z_0)||dz|\le\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)||dz|+\int_{\Gamma}|f(z_0)||dz|\ (1)$$

وبالاستفادة من متراجحة منكوفسكي نجد أن:

$$\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)||dz|\le\left(\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)|^p|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\Gamma}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}\ (2)$$

حيث $1<p\ ,\ q<\infty$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ومن العلاقتين (1) و (2) نجد أن:

$$\int_{\Gamma}|f(z)||dz|\le\left(\int_{\Gamma}|f(z)-f(z_0)|^p|dz|\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\Gamma}|dz|\right)^{\frac{1}{q}}+|f(z_0)|\int_{\Gamma}|dz|$$

وبما أن Γ منحني محدود الطول فإن $\int_\Gamma |dz| = mes(\Gamma) < \infty$ ، بالتالي:

$$\int_\Gamma |f(z)||dz| \le \left(\int_\Gamma |f(z)-f(z_0)|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}} \cdot (mes(\Gamma))^{\frac{1}{q}} + |f(z_0)|\, mes(\Gamma)$$

وبما أن $f \in L_pH^\alpha(\Gamma)$ فإنه يوجد ثابت موجب c_4 بحيث يتحقق:

$$\left(\int_\Gamma |f(z)-f(z_0)|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}} \le c_4 |z-z_0|^\alpha$$

نجد أن:

$$\int_\Gamma |f(z)||dz| \le c_4 |z-z_0|^\alpha \cdot (mes(\Gamma))^{\frac{1}{q}} + |f(z_0)|\, mes(\Gamma) < \infty$$

أي أن $f \in L_1(\Gamma)$. □

مبرهنة مساعدة 1[6]:إذا كانت f دالة تحليلية في المنطقة G المحاطة بمنحني Γ تنتمي إلى أسرة المنحنيات $k-$ فإنه يوجد ثابتان موجبان A و B بحيث يتحقق:

$$\| f(z) - S_n(z) \| \le \left(A \ln^2 n + B\right) E_n(f, \overline{G}) \quad ; \; z \in \overline{G} \qquad (3)$$

حيث أن S_n هي مجاميع فابير للدالة f .

مبرهنة مساعدة 2 [3]: إذا كانت $f \in L_1(\Gamma)$ ، فإن لتكامل نوع كوشي قيمتان حدوديتان من جهتي المنحني Γ نرمز لهما بـ f^-, f^+ تحليليتان في G^-, G على الترتيب، وترتبطان مع الدالة f من خلال علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$\left.\begin{aligned} f^+(z) &= S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2} f(z) \\ f^-(z) &= S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2} f(z) \\ f &= f^+ - f^- \end{aligned}\right\} \;\; \ldots\ldots\ldots\; (4)$$

ندرس في المبرهنة الآتية تقريب دوال الصف الجديد $L_pH^\alpha(z_0)$ إلى دوال كسرية.

مبرهنة (6): ليكن Γ منحني ينتمي إلى أسرة منحنيات $k-$ و $z_0 \in \Gamma$ نقطة مثبتة و $f \in L_pH^\alpha(z_0)$ ، عندئذ فإنه من أجل أي عدد طبيعي $n \in N$ يوجد دالة كسرية $R_n(z)$ وثابتان موجبان A و B بحيث يتحقق:

$$\| f(z) - R_n(z) \| \le \left(A \ln^2 n + B\right) E_n^R(f)$$

البرهان: من المبرهنة (5) وجدنا أن كل دالة من الصف $L_pH^\alpha(z_0)$ قابلة للمكاملة، أي تنتمي إلى الفضاء $L_1(\Gamma)$ ، وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (2) فإنه يوجد دالتان f^+ و f^- تحليليتان فيداخل وخارج المنحني Γ على الترتيب، وترتبطان مع الدالة f بالعلاقة:

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z)$$

بالتالي من أجل تقريب الدالة f يكفي تقريب الدالتان f^+ و f^- داخل وخارج المنحني Γ،وذلك وفق الآتي:

أولاً: نقوم بتقريب الدالة f^+ التحليلية في المنطقة G المحاطة بالمنحني Γ، حيث نجد بالاستفادة من المبرهنة المساعدة (1) أنه يوجد ثابتان موجبان A_1 و B_1 بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\| f^+(z)-S_n(z)\| \le \left(A_1 \ln^2 n + B_1\right) E_n(f^+,\overline{G}) \quad ...... \quad (5)$$

حيث $E_n(f^+,\overline{G}) = \min\limits_{p_n\in P_n} \| f^+ - P_n\|$ وبالتالي العلاقة (5) تأخذ الشكل الآتي:

$$\| f^+(z)-S_n(z)\| \le \left(A_1 \ln^2 n + B_1\right) \min_{p_n\in P_n} \| f^+, P_n\| \quad ...... \quad (6)$$

ثانياً: تقريب الدالة $f^-(z)$ التحليلية خارج المنحني Γ، من أجل ذلك نجري التحويل $w=\frac{1}{z}$ الذي ينقل المنطقة G^- إلى منطقة $\tilde{G}^+$ محاطة بالمنحني $\tilde{\Gamma}$ (صورة المنحني Γ) كما أن الدالة $f^-(z)$ ستنتقل إلى الدالة التحليلية $\tilde{f}^+(w)=f^-\left(\frac{1}{z}\right)$ في المنطقة $\tilde{G}^+$، كذلك بالاستفادة من المبرهنة المساعدة (1) فإنه يوجد ثابتان موجبان A_2 و B_2 بحيث يتحقق:

$$\| \tilde{f}^+(w)-\tilde{S}_n(w)\| \le \left(A_2 \ln^2 n + B_2\right) E_n(\tilde{f}^+,\overline{\tilde{G}^+}) \quad ...... \quad (7)$$

وبالعودة إلى المتحول z وبالاستفادة من العلاقة:

$$E_n\left(\tilde{f}^+,\overline{\tilde{G}^+}\right) = \min_{p_n\in P_n} \| \tilde{f}^+(w)-\tilde{P}_n(w)\| = \min_{p_n\in P_n} \left\| f^-(z)-\tilde{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)\right\|$$

فإن العلاقة (7) تأخذ الشكل الآتي:

$$\left\| f^-(z)-\tilde{S}_n\left(\frac{1}{z}\right)\right\| \le \left(A_2 \ln^2 n + B_2\right) \min_{p_n\in P_n} \left\| f^-(z)-\tilde{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)\right\| \quad ...... \quad (8)$$

من العلاقتين (6) و (8) وبوضع $R_n(z)=S_n(z)-\tilde{S}_n\left(\frac{1}{z}\right)$ و

$$E_n^R(f) = \min \| f^+(z)-P_n(z)\| + \min_{p_n\in P_n} \left\| f^-(z)-P_n\left(\frac{1}{z}\right)\right\|$$

نجد أن:

$$\| f(z)-R_n(z)\| = \left\| f^+(z)-f^-(z)-\left(S_n(z)-\tilde{S}_n\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right\| \le$$

$$\le \| f^+(z)-S_n(z)\| + \left\| f^-(z)-\tilde{S}_n\left(\frac{1}{z}\right)\right\| \le$$

$$\le \left(A_1 \ln^2 n + B_1\right) \min_{p_n\in P_n} \| f^+ - P_n\| + (A_2 \ln^2 n + B_2) \min_{p_n\in P_n} \left\| f^-(z)-\tilde{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)\right\|$$

$$\le (A \ln^2 n + B)\, E_n^R(f)$$

حيث $A=\max\{A_1, A_2\}$ و $B=\max\{B_1, B_2\}$.

الاستنتاجات والتوصيات

توصلنا في هذه المقالة إلى مجموعة من النتائج التي تخص تعريف صف جديد من الدوالودراسة بعض العلاقات الرئيسية في هذا الصف وبشكل خاص فقد درسنا علاقة هذا الصف بصف دوال ليبيغ كما أننا درسنا تقريب دوال هذه الأسرة إلى دوال كسرية.

ونوصي بتعريف صفوفدالية جديدة يمكن بشكل أو بآخر أن تعتبر تعميماً لصفوف شهيرة مثل صفوف ليبيغ وصفوف هولدر وصفوف سميرنوف ومن المهم إجراء دراسة حول خواص وتقريب الدوال في هذه الصفوف.

المراجع:

[1] BÖTTCHER.A; KARLOVICH.A.Y. *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and ToeplitzOperators*.Springer Basel AG, Washington D.C, 1997, 407.

[2] DAVID.G. *Operateursintegrauxsingulerssurcertainescourbes du plan complexe*. Vol 17 (4), Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, 1984, 157-189.

[3] ISRAFILOV. D.M. *Approximation by p-faber polynomials in the weighted smirnov class* $E_p(G,W)$ *and Bieberbach Polynomials*. Vol 17,Constr.Approx. 2001, 335-351.

[4] ISRAFILOV.D.M; TESTICI.A. *Approximation in Weighted Smirnov Classes*. Vol 59, Complex Variables and Elliptic Equations. 2014, 1-14.

[5] MAMEDKHANOV.J.I; DADASHOVA.I.B. *Rational Approximation On Closed Curves.*Vol 2(3), Applied Mathematics, 2012, 90-93.

[6] SUETIN.P.K. *Series of Faber polynomials*. Cordon and Breachsone publishes, 1998.