مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (3) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (3) 2016

On min/max problems by using Moreau-Yosida with tow variables

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr. Wadih Ali**
Ali Moualla***

(Received 1 / 2 / 2016. Accepted 9 / 6 /2016)

☐ ABSTRACT ☐

In this paper we study some basic properties of the Moreau-Yosida function with two variables , and generalize the results of related to study of the convergence for sequence of convex-concave functions and the sequence of Moreau-Yosida function corresponding , and the basic theorem that we proved is : for any sequence of convex-concave functions , if they are convergent of the Moreau-Yosida distance then the sequence of Moreau-Yosida function corresponding will be convergent to the concept of Mosco-epi/hypo graph convergence .

Key words : epi-graph , optimization problems ,convex-concave function , Moreau-yosida distance, parent functions ,Mosco-epi/hypo-graph

*Associate Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.
**Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.
***Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (3) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (3) 2016

دراسة لمسائل القيم الصغرى/ العظمى باستخدام دالة مورو ـ يوشيدا بمتحولين

الدكتور محمد سويقات *
الدكتور وديع علي **
علي معلا ***

(تاريخ الإيداع 1 / 2 / 2016. قُبِل للنشر في 9 / 6 /2016)

□ ملخّص □

قمنا في هذا البحث بدراسة بعضاً من الخواص الأساسية لدالة مورو ـ يوشيدا بمتحولين ، وتعميم بعض النتائج المتعلقة بدراسة التقارب لمتتالية من الدوال المحدبة ــ المقعرة و متتالية دوال مورو ـ يوشيدا الموافقة لها ، والمبرهنة الأساسية التي حصلنا عليها إنه من أجل أي متتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة إذا كانت متقاربة بالنسبة لمسافة مورو ـ يوشيدا ، فإن متتالية دوال مورو ـ يوشيدا الموافقة لها تكون متقاربة وفق مفهوم موسكو ـ فوق/تحت البيان .

الكلمات المفتاحية : فوق البيان، مسائل أمثلية ، دالة محدبة ـ مقعرة ، مسافة مورو ـ يوشيدا، الدوال القرينية ، موسكو فوق/تحت البيان

* أستاذ – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
*** طالب دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مقدمة :

يلعب التحليل فوق البياني أهمية كبيرة في دراسة مسائل نظرية القيم الصغرى باستخدام مفهوم فوق البيان :

$$epi f =\{(x,r) \in X \times R \;/ f(x) \le r\}$$

كما ويلعب التحليل تحت البياني بشكل مناظر أهمية في دراسة مسائل نظرية القيم العظمى باستخدام مفهوم تحت البيان :

$$hypo f =\{(x,r) \in X \times R \;/ f(x) \ge r\}$$

ومن ثم ظهر التحليل فوق / تحت البياني ليشمل كلا التحليلين و يعالج مسائل نظرية القيم الصغرى/ العظمى لدوال بمتحولين مما أدى إلى خلق مفاهيم جديدة مثل التقارب فوق/تحت– البياني ، التكامل فوق/تحت – البياني ، المشتق فوق/تحت– البياني ، الجمع فوق/تحت– البياني ، الضرب فوق/تحت– البياني .... الخ.

وقد عرف أتوش و ويتس مسافة تعتمد على الدوال المنظمة (دالة مورو ـ يوشيدا) وسميت مسافة مورو ـ يوشيدا،

في هذا البحث سندرس بعضا من الخواص الأساسية لدالة مورو ـ يوشيدا بمتحولين وسندرس العلاقة بين مفهوم التقارب البسيط لمتتالية دوال مورو ـ يوشيدابمتحولين و التقارب وفق مفهوم موسكو فوق/تحت البياني، وتتم المقارنة مع التقارب لمتتالية دوال مورو ـ يوشيدا بالنسبة لمفهوم مسافة مورو ـ يوشيدا والتي تمت دراستها من قبل العديد من الرياضيين[1,3,13,16]

طرائق البحث ومواده :

نعطي بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالتحليل فوق البياني و التحليل فوق/تحت– البياني والتي تساعدنا في عرض الموضوع ، ونستخدم بعض طرائق التقارب لمتتالية التوابع كالتقارب وفق مفهوم موسكو ومفهوم مسافة مورو ـ يوشيدا

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة تقارب الدوال المحدبة– المقعرة و سندرس بشكل خاص دالة مورو ـ يوشيدا، حيث سنقوم بتعميم بعض الخواص الأساسية لدالة مورو ـ يوشيدا بمتحول واحد على دالة مورو ـ يوشيدا بمتحولين ودراسة تقارب الدوال مستخدمين مفهوم موسكو فوق/تحت البياني ومفهوم مسافة مورو ـ يوشيدا

1– تعاريف ومفاهيم أساسية في التحليل المحدب:[1,4,9,17]

لتكن f دالة معرفة على الفضاء الخطي المنظم X و تأخذ قيمها في $\bar{R}$.

- يقال عن $C \subseteq X$ إنَّها مجموعة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x,y \in C \;\;,\;\; \forall \alpha \in [0,1] \;;\;\; \alpha x + (1-\alpha) y \in C$$

- يقال عن f إنَّها دالة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x,y \in C \;\;,\;\; \forall \alpha \in [0,1] \;;\;\; f\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad (1)$$

بحيث يكون الطرف الأيمن معرَّفاً .

● يبرهن أنَّ الدالة f محدبة إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة محدبة في فضاء الجداء الديكارتي $X \times R$ ، وأنَّ f دالة نصف مستمرة من الأدنى إذا وفقط إذا كانت مجموعة $epif$ مغلقة ، وأنَّ f دالة نوعية إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي $domf \neq \varnothing$ حيث :

$$dom f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$$

● يقال إن f دالة مقعرة إذا وفقط إذا كانت $(-f)$ محدبة .

● ترمز لمجموعة الدوال المحدبة والنصف مستمرة من الأدنى والنوعية على X بالرمز $\Gamma(X)$.

● تعرَّف الدالة المرافقة للدالة f بالعلاقة :

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{<x, x^*> - f(x)\} \qquad (2)$$

حيث $<.,.>$ هي الثنا الخطية لعناصر الفضاء X و مرافقه X^*

إن الدالة f^* هي دوما دالة محدبة سواء كانت f محدبة أو ليست محدبة .

● إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل فإن التفاضل الجزئي ∂f في النقطة $x_0 \in X$ يعطى بالعلاقة :

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* / f(x) \geq f(x_0) + <x^*, x - x_0>, \forall x \in X\}$$

● تعرف دالة تقريب مورو ـ يوشيدا f_λ ذو الدليل λ للدالة f حيث $\lambda > 0$ بالعلاقة التالية

$$f_\lambda(x) = \inf_{u \in X}\left\{f(u) + \frac{1}{2\lambda}\|x - u\|^2\right\} \qquad (3)$$

حيث تلعب دالة مورو ـ يوشيدا دورا هاما في دراسة مسائل الأمثليات وقد برهن Attouch في [1] انه إذا كانت الدالة f من $\Gamma(x)$ فإن f_λ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق ودالة ليبشز و ذات قيم منتهية و مشتقها يكون تقريب يوشيدا A_λ للمؤثر المطرد الأعظمي $A = \partial f$ و يكون $(\partial f)_\lambda = \partial(f_\lambda)$

● **تقارب موسكو− فوق البيان :**

ليكن X فضاء باناخ انعكاسي و لتكن الدوال $\{f_n, f : X \to \overline{R}, n \in N\}$ من $\Gamma(X)$. نقول إن المتتالية $(f_n)_{n\in N}$ تتقارب نحو الدالة f وفق مفهوم موسكو− فوق البيان إذا تحقق الشرطان :

$$i)\ \forall (x_n)_{n\in N}\ ; x_n \xrightarrow[n]{w} x\ : f(x) \leq \liminf_n f_n(x_n)$$

$$ii)\ \exists (\zeta_n)_{n\in N}\ ; \zeta_n \xrightarrow[n]{s} \zeta\ : f(\zeta) \geq \limsup_n f_n(\zeta_n)$$

ونكتب : $f = Mosco - epi \lim_n f_n$ أو $f_n \xrightarrow{M} f$

حيث s (w) التبولوجيا (الضعيفة) القوية المعرفة على X

● **مسافة مورو ـ يوشيدا على دوال بمتحول واحد :**

إذا كان X فضاءً خطياً منظماً و كانت $\{f, g : X \to \overline{R}\}$ دالتين معرفتين على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$ عندئذ من أجل $\lambda > 0$ و $\rho \geq 0$ تعرف دالة مسافة مورو ـ يوشيدا بين الدالتين f و g بالعلاقة :

$$d_{\lambda,\rho}(f, g) = \sup_{\|x\| \leq \rho} |f_\lambda(x) - g_\lambda(x)|$$

مبرهنة1.1: [6]

ليكن X فضاء باناخ انعكاسي ، ولتكن $\{f^n, f : X \to \overline{R}, n \in N\}$دوال محدبة ، مغلقة و نوعية عندئذ من أجل $\lambda > 0$ و كل $\rho \geq 0$ ، إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\lambda,\rho}\left(f^n, f\right) = 0$ فإن $f^n \xrightarrow{M} f$

2 – تعاريف ومفاهيم أساسية في التحليل المحدب ـ المقعر: [2,5,6,8,12,14,15]

لتكن $L : X \times Y \to \overline{R}$ دالة معرفة على $X \times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$

- يقال عن الدالة L إنها دالة محدبة ـ مقعرة إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول و مقعرة بالنسبة إلى المتحول الثاني
- تعرف الدالة القرينة المحدبة (parent convex) F_L للدالة L حيث $F_L : X \times Y^* \to \overline{R}$ بالعلاقة :

$$F_L\left(x, y^*\right) = \sup_{y \in Y}\left\{L\left(x, y\right) + \left\langle y, y^*\right\rangle\right\} \qquad (4)$$

- تعرف الدالة القرينة المقعرة (parent concave) G_L للدالة L حيث $G_L : X^* \times Y \to \overline{R}$ بالعلاقة :

$$G_L\left(x^*, y\right) = \inf_{x \in X}\left\{L\left(x, y\right) - \left\langle x, x^*\right\rangle\right\} \qquad (5)$$

- يقال عن الدالة L أنَّها مغلقة إذا كان و $F_L^* = -G_L$ حيث G^*, F^*هما الدالتان المرافقتان للدالتين على الترتيب، ونقول عن دالتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما الدوال القرينة نفسها .
- يعرف صف التكافؤ لدالة محدبة ـ مقعرة L (نرمز له بـ $\left[\underline{L}, \overline{L}\right]$) بأنه مجموعة الدوال المحصورة بين $\overline{L}$ و $\underline{L}$ حيث :

$$\underline{L}(x, y) = \sup_{x^* \in X^*}\left\{G\left(x^*, y\right) + \langle y, y^* \rangle\right\} \qquad (6)$$

$$\overline{L}(x, y) = \inf_{y^* \in Y^*}\left\{F\left(x, y^*\right) - \langle y, y^* \rangle\right\} \qquad (7)$$

وقد برهن من قبل روكافولار[17] أنه يوجد تقابل واحد لواحد بين مجموعة صفوف التكافؤ لدوال محدبة ـ مقعرة $\left[\underline{L}, \overline{L}\right]$ والدوال المحدبة المغلقة $\Gamma\left(X \times Y^*\right)$.

- **تقارب موسكو ـ فوق / تحت ـ البيان :**

ليكن X و Y فضائي باناخ انعكاسيين و لتكن $\{L_n, L : X \times Y \to \overline{R}, n \in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة ، نقول عن المتتالية $\left(L_n\right)_{n\in N}$ إنها تتقارب وفق موسكو – فوق/تحت – البيان نحو الدالة Lإذا تحقق الشرطان :

$$\text{i)}\quad \forall\left(x, y\right) \in X \times Y, \forall y_n \xrightarrow[n]{w} y, \exists x_n \xrightarrow[n]{s} x : \limsup_n L_n\left(x_n, y_n\right) \leq L\left(x, y\right) \qquad (8)$$

$$\text{ii)}\quad \forall\left(x, y\right) \in X \times Y, \forall x_n \xrightarrow[n]{w} x, \exists y_n \xrightarrow[n]{s} y : \liminf_n L_n\left(x_n, y_n\right) \geq L\left(x, y\right) \qquad (9)$$

حيث s (w)التبولوجيا (الضعيفة) القوية المعرفة على $X \times Y$

ونكتب $L = Mosco - epi / hypo - \lim\limits_n L_n$ أو اختصاراً $L_n \xrightarrow{M-e/h} L$

● **دالة تقريب مورو ـ يوشيدا :** لتكن $L: X\times Y \to \overline{R}$ دالة محدبة ـ مقعرة ، عندئذ تعرف دالة تقريب مورو ـ يوشيدا ذات الدليلين $\lambda>0$ ، $\mu>0$ لدالة $L\in \overline{R}^{X\times Y}$ (يرمز لها بـ $L_{\lambda,\mu}$) بالعلاقة :

$$L_{\lambda,\mu}(x,y):=\inf_{u}\sup_{v}\left\{L(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2, u\in X, v\in Y\right\} \quad (10)$$

حيث $\overline{R}^{X\times Y}$ ترمز لمجموعة الدوال المحدبة ـ المقعرة المعرفة على $X\times Y$ وتأخذ قيمها في $\overline{R}$

وهذه المسألة تقبل نقطة سرجية وحيدة حلا لها و يرمز لها بـ $(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu})$ و تتصف بالعلاقة :

$$\left(\frac{x-x_{\lambda,\mu}}{\lambda},-\frac{y-y_{\lambda,\mu}}{\mu}\right)\in \partial L(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu})$$

ويعطى المشتق من المرتبة الأولى للدالة $L_{\lambda,\mu}$ بالعلاقة :

$$\nabla L_{\lambda,\mu}(x,y)=\left(\frac{x-x_{\lambda,\mu}}{\lambda},-\frac{y-y_{\lambda,\mu}}{\mu}\right) \quad (11)$$

حيث يعرف ∂L بأنه التفاضل الجزئي للدالة L ويعطى بالعلاقة :

$$\partial L(x,u):=\partial_1 L(x,u)\times \partial_2(-L)(x,u)$$

و يعرف مؤثر تقريب مورو− يوشيدا $A^k_{\lambda,\mu}$ بالعلاقة :

$$A^k_{\lambda,\mu}(x,y)=\left(\frac{x-x_{\lambda}}{\lambda},\frac{y-y_{\mu}}{\mu}\right) \quad (12)$$

● يعرف المؤثر التفاضلي A^L المرتبط بـ L بالعلاقة :

$$A^L(x,y):=\partial_1 L(x,y)\times \partial_2(-L)(x,y)$$

حيث $\partial_1 L(x,y)$ التفاضل الجزئي للدالة L بالنسبة للمتحول الأول

و $\partial_2(-L)(x,y)$ التفاضل الجزئي للدالة L بالنسبة للمتحول الثاني

و برهن في [17] إنه إذا كانت L محدبة ـ مقعرة فإن A^L مؤثر مطرد أعظميا و التكافؤات التالية محققة

$$(u,v)\in \partial L(x,y) \Leftrightarrow (u,y)\in \partial F(x,-v)$$

$$(u,v)\in A^K(x,y) \Leftrightarrow (u,y)\in \partial F(x,v)$$

● **مسافة مورو ـ يوشيدا على دوال بمتحولين :**

لتكن $\{L,K: X\times Y \to \overline{R}\}$ دالتين محدبتين ـ مقعرتين مغلقتين و نوعيتين عندئذ من أجل $\lambda>0$ ، $\mu>0$ و $\rho\geq 0$ تعطى دالة مسافة مورو ـ يوشيدا بين الدالتين L و K بالعلاقة

$$d_{\lambda,\mu,\rho}(K,L)=\sup_{\substack{\|x\|\leq\rho\\ \|y\|\leq\rho}}\left|K_{\lambda,\mu}(x,y)-L_{\lambda,\mu}(x,y)\right|$$

و يقال عن متتالية الدوال K_n إنها متقاربة نحو الدالة K وفق هذه المسافة إذا كانت

$$d_{\lambda,\mu,\rho}(K_n,K)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \ \forall \lambda,\mu>0 \ \text{،} \ \rho\geq 0$$

و تعرف دالة لاغرانج التربيعية المتصاعدة $L_\mu: X\times Y^* \to R\cup\{\infty\}$ للدالة L بالعلاقة الآتية :

$$L_\mu(x,y^*)=\sup_{\eta\in y^*}\left\{K(x,\eta)-\frac{1}{2\mu}\|y^*-\eta\|_*^2\right\} \quad (13)$$

مبرهنة2.1:[5]

ليكن X,Y فضائين خطيين منظمين ولتكن $\{L^n, L : X\times Y^* \to \overline{R}\}$متتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة المغلقة و النوعية ولتكن F^n, F الدوال القرينة المحدبة للدالتين L^n, L على الترتيب ، عندئذ يوجد تكافؤ بين مايلي :

$$i)\ F^n \xrightarrow{M} F$$

$$ii)\ L^n \xrightarrow{M-e/h} L$$

$$iii)\ L^n_\mu(.,y^*) \xrightarrow{M} L_\mu(.,y^*)$$

النتائج والمناقشة :

مبرهنة 3.1 :

ليكن X و Y فضائين خطيين منظمين و لتكن $K : X\times Y \to \overline{R}$ دالة نوعية بمتحولين و لنفرض أنه يوجد $(u_0,v_0)\in X\times Y$ ، $\alpha_0 \geq 0$ و $\alpha_1 \geq 1$ بحيث يكون

$$K(u_0,.) \leq \alpha_0 \|.-v_0\|^2 + \alpha_1 \quad (14)$$

$$K(.,v_0) \geq -\alpha_0 \|u_0-.\|^2 - \alpha_1 \quad (15)$$

عندئذ من أجل كل $0<\lambda<\dfrac{1}{4\alpha_0}$ و $0<\mu<\dfrac{1}{4\alpha_0}$لدينا :

1- $K_{\lambda,\mu}$ ذات قيم منتهية

2- $K_{\lambda,\mu}$ يحقق شرط ليبشز ، أي أن

$$\|K_{\lambda,\mu}(x_1,y_1)-K_{\lambda,\mu}(x_2,y_2)\| \leq C(\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|)$$

حيث C ثابت يعطى من خلال البرهان .

البرهان :

1-حسب تعريف $K_{\lambda,\mu}$ في العلاقة (10) نكتب

$$K_{\lambda,\mu}(x,y) = \inf_{u\in X}\sup_{v\in y}\left\{K(u,v)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}$$

$$\leq \sup_{v\in y}\left\{K(u_0,v)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}$$

$$\leq \sup_{v\in Y}\left\{\alpha_0\|v-v_0\|^2+\frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}+\alpha_1$$

و باستخدام المتراجحة $\|v-v_0\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|v-y\|^2+\|y-v_0\|^2\right)$ نجد أن :

$$K_{\lambda,\mu}(x,y) \leq \sup_{v\in y}\left\{\frac{\alpha_0}{2}\|v-y\|^2+\frac{\alpha_0}{2}\|y-v_0\|^2+\frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}+\alpha_1$$

و باعتبار أن $0<\mu<\dfrac{1}{4\alpha_0}$ نحصل على

$$K_{\lambda,\mu}(x,y) \le \sup_{v}\left\{\frac{\alpha_0}{2}\|v-y\|^2 + \frac{\alpha_0}{2}\|y-v_0\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2 - \frac{\alpha_0}{2}\|y-v\|^2\right\} + \alpha_1$$

$$K_{\lambda,\mu}(x,y) \le \frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2 + \frac{\alpha_0}{2}\|y-v_0\|^2 + \alpha_1 \quad (16)$$

و من جهة أخرى و من أجل كل $0 < \lambda < \dfrac{1}{4\alpha_0}$ نبرهن على أن

$$K_{\lambda,\mu}(x,y) \ge -\frac{1}{2\mu}\|y-v_0\|^2 - \frac{\alpha_0}{2}\|x-u_0\|^2 - \alpha_1 \quad (17)$$

من (16) و (17) نجد أن $K_{\lambda,\mu}$ ذات قيم منتهية .

2– سنبرهن في البداية أن التطبيق $y \to K_{\lambda,\mu}(x,y)$ يحقق شرط ليبشز موضعيا ، من أجل ذلك نختار كل من λ و μ ذات قيم صغيرة جدا بحيث يكون $K_{\lambda,\mu}(.,.)$ ذات قيم منتهية ليكن $y \in Y$ و $\varepsilon > 0$ عندئذ يوجد $v_\varepsilon = v_\varepsilon(\lambda,\mu,x)$ بحيث يكون

$$K_{\lambda,\mu}(x,y) \ge \inf_{u\in X}\left\{K(u,v_\varepsilon) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v_\varepsilon\|^2\right\}$$

$$\ge K_{\lambda,\mu}(x,y) - \varepsilon \; (18)$$

من العلاقتين (17) و (18) و من أجل $u = u_0$ نحصل على

$$K(u_0,v_\varepsilon) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v_\varepsilon\|^2 + \varepsilon \ge -\frac{1}{2\mu}\|y-v_0\|^2 - \frac{\alpha_0}{2}\|x-u_0\|^2 - \alpha_1 \quad (19)$$

و بما أن $K(u,.) \le \alpha_0\|.-v_0\|^2 + \alpha_1$ نجد أن

$$\alpha_0\|v_\varepsilon - v_0\|^2 + \alpha_1 + \frac{1}{2\lambda}\|x-u_0\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v_\varepsilon\|^2 + \varepsilon \ge -\frac{1}{2\mu}\|y-v_0\|^2 - \frac{\alpha_0}{2}\|x-u_0\|^2 - \alpha_1 \quad (20)$$

و باستخدام المتراجحة الصحيحة $\|v_\varepsilon - v_0\|^2 \le \frac{1}{2}\left(\|v_\varepsilon - y\|^2 + \|y-v_0\|^2\right)$ نجد أن :

$$\alpha_0\|v_\varepsilon - v_0\|^2 \le \frac{\alpha_0}{2}\left(\|v_\varepsilon - y\|^2 + \|y-v_0\|^2\right) \le \frac{\alpha_0}{2}\|v_\varepsilon - -y\|^2 + \frac{\alpha_0}{2}\|y-v_0\|^2$$

و تصبح العلاقة (20)بالشكل :

$$2\alpha_1 + \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{\alpha_0}{2}\right)\|x-u_0\|^2 + \varepsilon + \frac{\alpha_0}{2}\|v_\varepsilon - y\|^2 + \frac{\alpha_0}{2}\|y-v_0\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v_\varepsilon\|^2 \ge -\frac{1}{2\mu}\|y-v_0\|^2$$

$$2\alpha_1 + \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{\alpha_0}{2}\right)\|x-u_0\|^2 + \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\alpha_0}{2}\right)\|y-v_0\|^2 + \varepsilon \ge \frac{1}{2\mu}\|y-v_\varepsilon\|^2 - \frac{\alpha_0}{2}\|y-v_\varepsilon\|^2$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{\alpha_0}{2}\right)\|x-u_0\|^2 + \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\alpha_0}{2}\right)\|y-v_0\|^2 + 2\alpha_1 + \varepsilon \ge \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\alpha_0}{2}\right)\|y-v_\varepsilon\|^2$$

$$\Rightarrow \|y-v_\varepsilon\|^2 \le \frac{2\alpha_1+\varepsilon}{\frac{1}{2\mu}-\frac{\alpha_0}{2}} + \left(\frac{\frac{1}{2\lambda}+\frac{\alpha_0}{2}}{\frac{1}{2\mu}-\frac{\alpha_0}{2}}\right)\|x-u_0\|^2 + \left(\frac{\frac{1}{2\mu}+\frac{\alpha_0}{2}}{\frac{1}{2\mu}-\frac{\alpha_0}{2}}\right)\|y-v_0\|^2$$

$$\|y-v_\varepsilon\|^2 \le \left(\frac{2\mu}{1-\alpha_0\mu}\right)(2\alpha_1+\varepsilon)+\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\alpha_0+\lambda}{1-\mu\alpha_0}\right)\|x-u_0\|^2+\left(\frac{1+\mu\alpha_0}{1-\mu\alpha_0}\right)\|y-v_0\|^2 \qquad (21)$$

و بما أن العلاقة (18) صحيحة من أجل كل y فهي صحيحة من أجل كل $y=y_1$ و $y=y_2$ و منه نستطيع أن نكتب

$$K_{\lambda,\mu}(x,y_1)\ge \inf_{u\in X}\left\{K(u,v_\varepsilon)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\}-\frac{1}{2\mu}\|y_1-v_\varepsilon\|^2+\frac{1}{2\mu}\|y_2-v_\varepsilon\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y_2-v_\varepsilon\|^2$$

$$\ge \inf_{u\in X}\left\{K(u,v_\varepsilon)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y_2-v_\varepsilon\|^2\right\}+\frac{1}{2\mu}\|y_2-v_\varepsilon\|^2-\frac{1}{2\mu}\|y_1-v_\varepsilon\|^2$$

$$\ge K_{\lambda,\mu}(x,y_2)-\varepsilon+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}\|y_2-v_\varepsilon\|^2-\frac{1}{2}\|y_1-v_\varepsilon\|^2\right)$$

نستخدم خاصية التحدب للدالة $t\to\frac{1}{2}t^2$ على R^+ ، وحسب متراجحة التدرج الجزئي نحصل على

$$\frac{1}{2}\left(\|y_1-y_2\|+\|y_2-v_\varepsilon\|\right)^2-\frac{1}{2}\|y_2-v_\varepsilon\|^2\le\left(\|y_1-y_2\|+\|y_2-v_\varepsilon\|\right)\left(\|y_1-y_2\|\right)$$

ومنه

$$K_{\lambda,\mu}(x,y_2)-K_{\lambda,\mu}(x,y_1)\le\varepsilon+\frac{1}{\mu}\left(\|y_1-y_2\|+\|y_2-v_\varepsilon\|\right)\left(\|y_1-y_2\|\right) \qquad (22)$$

و بتعويض (21) في(22) و بجعل $\varepsilon\to 0$ نحصل على

$$K_{\lambda,\mu}(x,y_2)-K_{\lambda,\mu}(x,y_1)\le C_{y_2}.\mu^{-1}\|y_2-y_1\| \qquad (23)$$

حيث

$$C_{y_2}=\left\{\|y_1-y_2\|+\left[\frac{2\mu}{1-\alpha_0}(2\alpha_1+\varepsilon)+\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\alpha_0+\lambda}{1-\mu\alpha_0}\right)\|x-u_0\|^2+\left(\frac{1+\mu\alpha_0}{1-\mu\alpha_0}\right)\|y-v_0\|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

ثابت يتعلق فقطب $\|y_2-y_1\|$ ، $\|x-u_0\|$ ، λ ، μ ، α_1 ، α_0 ، $\|y_2-v_0\|$

– و الآن بجعل y_1 تأخذ دور y_2 والعنصر y_2 يأخذ مكان العنصر y_1 نحصل على متراجحة من نفس الشكل للمتراجحة (22) مع ثابت C_{y_1} و بأخذ $C_1=\max(C_{y_1},C_{y_2})$ ، نحصل على المتراجحة التالية

$$(24)\ \left|K_{\lambda,\mu}(x,y_2)-K_{\lambda,\mu}(x,y_1)\right|\le\frac{1}{\mu}C_1\|y_2-y_1\|$$

باستخدام العلاقتين (15) و (16) و بطريقة مشابهة نبرهن أن التطبيق $x\to K_{\lambda,\mu}(x,y)$ يحقق شرط ليبشز موضعي ونحصل على المتراجحة التالية

$$\left|K_{\lambda,\mu}(x_2,y)-K_{\lambda,\mu}(x_1,y)\right|\le\frac{1}{\lambda}C_2\|x_2-x_1\| \qquad (25)$$

حيث $C_2 = \max\{C_{x_1}, C_{x_2}\}$

$$C_{x_2} = \left\{ \|x_1 - x_2\| + \left[\frac{2\lambda}{1-\alpha_0\lambda}(2\alpha_1 + \varepsilon) + \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\alpha_0 + \mu}{1-\lambda\alpha_0}\right)\|y - v_0\|^2 + \left(\frac{1+\lambda\alpha_0}{1-\lambda\alpha_0}\right)\|x - u_0\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

و C_{x_1} ثابت متطابق مع C_{x_2} ، و باستخدام العلاقتين (23) و (24) نحصل على المتراجحة

$$\left|K_{\lambda,\mu}(x_1,y_1) - K_{\lambda,\mu}(x_2,y_2)\right| \le \left|K_{\lambda,\mu}(x_1,y_1) - K_{\lambda,\mu}(x_1,y_2)\right| + \left|K_{\lambda,\mu}(x_1,y_2) - K_{\lambda,\mu}(x_2,y_2)\right|$$
$$\le C\left(\|y_1 - y_2\| + \|x_1 - x_x\|\right)$$

حيث $C = \max\left\{\frac{C_1}{2\mu}, \frac{C_2}{2\lambda}\right\}$وهو المطلوب ■

سندرس في المبرهنة الآتية العلاقة بين التقارب وفق مفهوم موسكو فوق/تحت البيان لمتتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة و بين التقارب البسيط لمتتالية دوال مورو ـ يوشيدا الموافقة لها

مبرهنة3.2 :

ليكن X و Yفضائين خطيين منظمين و لتكن $\{K^n, K : X \times Y \to \overline{R}\}$ دوال محدبة ـ مقعرة مغلقة ونوعية ، عندئذ من أجل كل $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ يوجد تكافؤ بين ما يلي :

$$i)\ K^n \xrightarrow{M-e/h} K$$

$$ii)\ \lim_{n\to\infty} K^n_{\lambda,\mu}(x,y) = K_{\lambda,\mu}(x,y) \quad ;\ \forall\ \lambda,\mu > 0;\ \forall (x,y) \in X \times Y$$

البرهان :

$(ii \Leftarrow (i$ لتكن $\{L_n, L : X \times Y \to \overline{R}\}$ متتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة ، ولنكتب الدوال L_n ، L بالشكل:

$$L(x,y) = K(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|v - y\|^2$$

$$L_n(x,y) = K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|u - x\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|v - y\|^2$$

سنبرهن أن $L_n \xrightarrow{M-e/h} L$ ، ومن أجل البرهان نتحقق من الشرطين :

1) من أجل $(x,y) \in X \times Y$ ومن أجل $y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$ يوجد $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ بحيث يكون

$$\limsup_{n\to\infty} L_n(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}) \le L(x,y)$$

2) من أجل $(x,y) \in X \times Y$ و من أجل كل $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ يوجد $y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$ بحيث يكون

$$\liminf_{n\to\infty} L_n(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}) \ge L(x,y)$$

الآن نتحقق من الشرط الأول :

$$L_n(x, y_{\lambda,\mu}) = K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x - u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y_{\lambda,\mu} - v\|^2$$

بأخذ $\sup_v$ لطرفي العلاقة السابقة

$$\sup_v L_n(x, y_{\lambda,\mu}) = \sup_v \left\{ K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\}$$

$$\leq \sup_v \left\{ \overline{K}^n(u,v) - \frac{1}{2\mu}\|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2$$

$$\leq \sup_v \left\{ \inf_{y^*} \left\{ F^n(u, y^*) - < y^*, v > \right\} - \frac{1}{2\mu}\|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2$$

$$\leq \sup_v \inf_{y^*} \left\{ F^n(u, y^*) - < y^*, v > - \frac{1}{2\mu}\|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2$$

$$\leq \inf_{y^*} \left\{ F^n(u, y^*) + \sup_v \left\{ < y^*, v > - \frac{1}{2\mu}\|y_{\lambda,\mu} - v\|^2 \right\} \right\} + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2$$

بفرض $z = y_{\lambda,\mu} - v$ و وبجعل $x = u$ باستخدام العلاقة (2) نجد

$$\leq \inf_{y^*} \left\{ F^n(x, y^*) - < y^*, y_{\lambda,\mu} > + \frac{\mu}{2}\|y^*\|^2 \right\}$$

وبجعل $\mu \to 0$ و أخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty} \sup L_n(x, y_{\lambda,\mu}) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ F^n(x, y^*) - < y, y^* > \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \lim_{n\to\infty} F^n(x, y^*) - < y, y^* > \right\} = \overline{L}(x, y)$$

وهذه العلاقة صحيحة من أجل كل $y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$ ومن أجل $x : x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ أي أن :

$$\lim_{n\to\infty} \sup L_n(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}) \leq \overline{L}(x, y)$$

والآن لنتحقق من الشرط الثاني :

من أجل كل $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ بأخذ $\inf_u$ لطرفي العلاقة

$$L_n(x_{\lambda,\mu}, y) = K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x_{\lambda,\mu} - u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y - v\|^2$$

نحصل على

$$\inf_u L_n(x_{\lambda,\mu}, y) = \inf_u \left\{ K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x_{\lambda,\mu} - u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y - v\|^2 \right\}$$

$$= \inf_u \left\{ K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x_{\lambda,\mu} - u\|^2 \right\} - \frac{1}{2\mu}\|y - v\|^2$$

$$\geq \inf_u \left\{ \underline{K}^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x_{\lambda,\mu} - u\|^2 \right\} - \frac{1}{2\mu}\|y - v\|^2$$

$$\geq \inf_u \left\{ \sup_{x^*} \left\{ G^n(x^*, v) + < x^*, x > \right\} + \frac{1}{2\lambda}\|x_{\lambda,\mu} - u\|^2 \right\} - \frac{1}{2\mu}\|y - v\|^2$$

$$\geq \sup_{x^*} \left\{ G^n(x^*, v) + \inf_u \left\{ < x^*, x > + \frac{1}{2\lambda}\|x_{\lambda,\mu} - u\|^2 \right\} \right\} - \frac{1}{2\mu}\|y - v\|^2$$

بفرض $z = x_{\lambda,\mu} - u$ و بجعل $y = v$ وباستخدام العلاقة (2) نحصل على :

$$\geq \sup_{x^*}\left\{G^n\left(x^*, v\right) + < x^*, x_{\lambda,\mu} > - \frac{\lambda}{2}\left\|x^*\right\|^2\right\}$$

وبجعل $\lambda \to 0$ وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$

$$\liminf_{n\to\infty} L_n\left(x_{\lambda,\mu}, y\right) \geq \limsup_{n\to\infty}\left\{G^n\left(x^*, y\right) + < x^*, x_{\lambda,\mu} >\right\}$$

$$\geq \sup\left\{G\left(x^*, y\right) + < x^*, x_{\lambda,\mu} >\right\} = \underline{L}\left(x_{\lambda,\mu}, y\right)$$

وهذه العلاقة صحيحة من أجل كل $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ ومن أجل $y : y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$ أي أن

$$\liminf_{n\to\infty} L_n\left(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}\right) \geq L\left(x, y\right)$$

وشرطا التقارب محققان أي أن $L_n \xrightarrow{M-e/h} L$ ، وبما أن تقارب موسكو فوق/تحت البيان محقق و من النظرية [5] 2.5 نجد أن النقطة $\left(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}\right)$ متقاربة الى النقطة (x, y) والتي تشكل نقطة سرجية وحيدة للدالة L عندئذ من أجل $L_n \in \left[\underline{L}_n, \overline{L}_n\right]$ و $L \in \left[\underline{L}, \underline{L}\right]$ نجد أن $L_n\left(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} L\left(x, y\right)$ وذلك من أجل كل $x_{\lambda,\mu} \xrightarrow{s} x$ و $y : y_{\lambda,\mu} \xrightarrow{w} y$

أي أن

$$\left\{K^n(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\{K(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}$$

وبأخذ $\inf_u \sup_v$ لطرفي النهاية السابقة نجد أن $K_{\lambda,\mu}\left(x, y\right) = \lim_{n\to\infty} K^n\left(x_{\lambda,\mu}, y_{\lambda,\mu}\right)$

$(ii \Leftarrow (i$

لنضع $\psi^n(u) = K^n_\mu(u, y^*)$

$$\psi(u) = K(u, y^*)$$

من المبرهنة 2.1 نجد أن

$$\psi^n \xrightarrow{M} \psi \Leftrightarrow K^n_\mu(., y^*) \xrightarrow{M} K_\mu(., y^*)$$

$$\psi^n_\lambda(x) = \inf_{u\in X}\left\{\psi^n(u) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\}$$

وحسب العلاقة (13) تكون دالة لاغرانج التربيعية للدالة K^n بالشكل :

$$K^n_\mu(u, y^*) = \sup_{\eta^*\in Y^*}\left\{K(u, \eta^*) - \frac{1}{2\mu}\left\|y^* - \eta^*\right\|^2\right\}$$

$$\Rightarrow \psi^n_\lambda(x) = \inf_{u\in X}\left\{\sup_{\eta^*\in Y^*}\left\{K(u,\eta^*) - \frac{1}{2\mu}\left\|y^* - \eta^*\right\|^2\right\} + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\}$$

$$= \inf_{u\in X}\sup_{\eta^*\in Y^*}\left\{K(u,\eta^*) - \frac{1}{2\mu}\left\|y^* - \eta^*\right\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\}$$

$$= K^n_{\lambda,\mu}(x, y^*)$$

و بجعل $n \to \infty$ نحصل على المطلوب ■

مبرهنة3.3 :

ليكن X,Y فضائين خطيين منظمين و لتكن $L^n \in \left[\underline{L}^n, \overline{L}^n\right]$ و $L \in \left[\overline{L}, \underline{L}\right]$ دوال محدبة ـ مقعرة و نوعية، ولتكن F^n, F الدوال القرينة المحدبة للدالتين L^n, L على الترتيب ،

عندئذ من أجل $0 < \lambda \leq 1$ ، $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ و $\rho \geq 0$

فإن :
$$d_{\lambda,\rho}\left(F^n, F\right) = d_{\lambda,\mu,\rho}\left(L^n, L\right)$$

البرهان :

لتكن $L_{\lambda,\mu}$ ، $L^n_{\lambda,\mu}$ دوال مورو ـ يوشيدا للدالتين L ، L^n على الترتيب ، بالدليلين λ, μ

و F_λ ، F^n_λ الدوال القرينة المحدبة للدالتين $L_{\lambda,\mu}$ ، $L^n_{\lambda,\mu}$ على الترتيب

$$L_{\lambda,\mu}(x,y) := \inf_u \sup_v \left\{L(u,v) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2, u \in X, v \in Y\right\}$$

لنأخذ الدالتين
$$L^\lambda(x,y) = \inf_{u \in X}\left\{L(u,y) + \frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\}$$
$$L_\mu(x,y) = \sup_{v \in Y}\left\{L(x,v) - \frac{1}{2\mu}\|y-v\|^2\right\}$$

تكتب الدالة $L_\mu(x,y)$ بدلالة الدالة القرينة المحدبة بالشكل $L_\mu(x,y) = F(x,y) + \dfrac{\mu}{2}\|y\|^2$

لنأخذ دالة مسافة مورو ـ يوشيدا $d_{\lambda,\mu,\rho}$ بين الدالتين المحدبتين المقعرتين L ، L^n وباعتبار أن :
$$\left(L^\lambda\right)_\mu = \left(L_\mu\right)^\lambda := L_{\lambda,\mu}$$

عندئذ نجد :
$$d_{\lambda,\mu,\rho}\left(L^n, L\right) = \sup_{\substack{\|x\|\leq\rho \\ \|y\|\leq\rho}}\left\|\left(L^n\right)_{\lambda,\mu}(x,y) - L_{\lambda,\mu}(x,y)\right\|$$
$$= \sup_{\substack{\|x\|\leq\rho \\ \|y\|\leq\rho}}\left\|\left(L^n_\mu\right)^\lambda(x,y) - \left(L_\mu\right)^\lambda(x,y)\right\|$$
$$= \sup_{\substack{\|x\|\leq\rho \\ \|y\|\leq\rho}}\left\|\left(F^n\right)^\lambda(x,y) + \frac{\mu}{2}\|y\|^2 - F^\lambda(x,y) - \frac{\mu}{2}\|y\|^2\right\|$$
$$= \sup_{\substack{\|x\|\leq\rho \\ \|y\|\leq\rho}}\left\|F^n_\lambda(x,y) - F_\lambda(x,y)\right\|$$
$$= d_{\lambda,\rho}\left(F^n, F\right)$$

مبرهنة 3.4 :

لتكن $\left\{K^n, K : X \times Y \to \overline{R}\right\}$ دوال محدبة ـ مقعرة مغلقة ونوعية ، عندئذٍ من أجل $0 < \lambda$ ، $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ و $\rho \geq 0$

إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\lambda,\mu,\rho}\left(K^n, K\right) = 0$ ، فإن المتتالية $\left(\left\|A^{K^n}_{\lambda,\mu}(0,0)\right\|\right)_n$ محدودة

البرهان :

من المبرهنة 3.3 نعلم أن $d_{\lambda,\mu,\rho}\left(K^n,K\right)=d_{\lambda,\rho}\left(F^n,F\right)$ حيث أن F^n,F الدوال القرينة المحدبة للدالتين K^n,K على الترتيب و $d_{\lambda,\rho}\left(F^n,F\right)=\sup_{\|x\|\le\rho}\left|F_\lambda^n\left(x,0\right)-F_\lambda\left(x,0\right)\right|$

من العلاقتين (12) و (13) نكتب المؤثر $A_{\lambda,\mu}^{K^n}\left(0,0\right)$ بالشكل :

$$A_{\lambda,\mu}^{K^n}\left(0,0\right)=\left(\nabla_1K_{\lambda,\mu}^n\left(0,0\right),-\nabla_2K_{\lambda,\mu}^n\left(0,0\right)\right)$$

بما أن F_λ^n الدالة القرينة المحدبة للدالة $K_{\lambda,\mu}^n$ عندئذٍ :

$$A^{\left(K_\mu^n\right)^\lambda}\left(0,0\right)=\left(\nabla_1\left(K_\mu^n\right)^\lambda\left(0,0\right),-\nabla_2\left(K_\mu^n\right)^\lambda\left(0,0\right)\right)$$

$$\Rightarrow\quad A^{F_\lambda^n}\left(0,0\right)=\left(\nabla_1F_\lambda^n\left(0,0\right),-\nabla_2F_\lambda^n\left(0,0\right)\right)\qquad(26)$$

$$\left\langle\nabla_1F_\lambda^n\left(0,0\right),x\right\rangle\le F_\lambda^n\left(x,0\right)-F_\lambda^n\left(0,0\right)$$

باعتبار $x\in X$ و $\|x\|\le1$ ومن أجل $n\in N$ ينتج أن

$$F_\lambda^n\left(x,0\right)\le d_{\lambda,1}\left(F^n,F\right)+F_\lambda\left(x,0\right)$$

$$-F_\lambda^n\left(0,0\right)\le d_{\lambda,1}\left(F^n,F\right)-F_\lambda\left(0,0\right)$$

$$\Rightarrow\ \left\langle\nabla_1F_\lambda^n\left(0,0\right),x\right\rangle\le2d_{\lambda,1}\left(F^n,F\right)+F_\lambda\left(x,0\right)-F_\lambda\left(0,0\right)$$

بما أن F_λ ليبشز مستمرة على مجموعات محدودة عندئذٍ يوجد ثابت $0<C$ حيث $C=C\left(x,\lambda,1\right)$ يحقق :

$$\left\langle\nabla_1F_\lambda^n\left(0,0\right),x\right\rangle\le2d_{\lambda,1}\left(F^n,F\right)+C$$

و باعتبار $\|x\|\le1$ فإن : $\left\|\nabla_1F_\lambda^n\left(0,0\right)\right\|\le2d_{\lambda,1}\left(F^n,F\right)+C$

من الفرض وبما أن $\lim_{n\to\infty}d_{\lambda,\mu,\rho}\left(K^n,K\right)=0$ فإن $d_{\lambda,1}\left(F^n,F\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ من أجل كل $\rho\ge0$

وينتج لدينا أن $\forall\mathrm{n}\in\mathrm{N}$, $\left(\left\|\nabla_1F_\lambda^n\left(0,0\right)\right\|\right)_n$ محدودة ، وبنفس الشكل نجد أن $\forall\mathrm{n}\in\mathrm{N}$, $\left(\left\|\nabla_2F_\lambda^n\left(0,0\right)\right\|\right)_n$ محدودة أيضاً

نستنتج من العلاقة (26) محدودية المؤثر $\left(\left\|A^{F_\lambda^n}\left(0,0\right)\right\|\right)_n$،بما أن F_λ^n الدالة القرينة المحدبة للدالة $K_{\lambda,\mu}^n$ عندئذٍ :

$$A_{\lambda,\mu}^{K^n}\left(0,0\right)=A^{K_{\lambda,\mu}^n}\left(0,0\right)=A^{\left(K_\mu^n\right)^\lambda}\left(0,0\right)=A^{F_\lambda^n}\left(0,0\right)$$

وبأخذ النظيم نحصل على المطلوب ■

مبرهنة 3.5 :

ليكن X و Y فضائي باناخ انعكاسيينو لتكن $\left\{K^n,K:X\times Y^*\to\overline{R}\right\}$ دوال محدبة ـ مقعرة مغلقة و نوعية إذا كانت $K^n\xrightarrow{M-e/h}K$ فإنهمن أجل كل $\lambda>0$ و $\mu>0$ يكون كلاً من $K_{\lambda,\mu}^n$ و $K_{\lambda,\mu}$ليبشز مستمرة على مجموعات محدودة في $X\times Y$

البرهان:

يكفي أن نبرهن أن الأسرة $\{K^n_{\lambda,\mu}, n\in N\}$ ليبشز مستمرة على مجموعات محدودة ، و لبرهان ذلك نبرهن أن الأسرة $\{\nabla K^n_{\lambda,\mu}, n\in N\}$ (27) محدودة على مجموعات محدودة في $X\times Y$

ليكن $(x,y)\in X\times Y$ عندئذٍ

$$\left\|\nabla K^n_{\lambda,\mu}(x,y)\right\| \le \left\|\nabla K^n_{\lambda,\mu}(x,y)-\nabla K^n_{\lambda.\mu}(0,0)\right\|+\left\|\nabla K^n_{\lambda,\mu}(0,0)\right\| \qquad (28)$$

من العلاقتين : $\nabla K_{\lambda,\mu}(x,y)=\left(\frac{x-x_\lambda}{\lambda},-\frac{y-y_\mu}{\mu}\right)$ ، $A^k_{\lambda,\mu}(x,y)=\left(\frac{x-x_\lambda}{\lambda},-\frac{y-y_\mu}{\mu}\right)$

بما أن $A^k_{\lambda,\mu}(x,y)$ هي $\frac{1}{\inf(\lambda,\mu)}$ ليبشز[5]

عندئذ ينتج من ذلك أن : $\left\|\nabla K^n_{\lambda,\mu}(x,y)-\nabla K^n_{\lambda.\mu}(0,0)\right\|\le \frac{1}{\inf(\lambda,\mu)}\left\|(x,y)\right\|$

وَ $\left\|\nabla K^n_{\lambda.\mu}(0,0)\right\|=\left\|A^{K^n}_{\lambda,\mu}(0,0)\right\|$ و بالتعويض في العلاقة (28) نحصل على المتراجحة :

$$\left\|\nabla K^n_{\lambda.\mu}(x,y)\right\|\le \frac{\left\|(x,y)\right\|}{\inf(\lambda,\mu)}+\left\|A^{K^n}_{\lambda,\mu}(0,0)\right\| \qquad (29)$$

ومن المبرهنة 3.4 وبما أن $\left\|A^{K^n}_{\lambda,\mu}(0,0)\right\|$ محدودة عندئذ نحصل على المطلوب ■

مبرهنة 3.6 :

ليكن X و Y فضائين خطيين منظمين ولتكن $K^n\in\left[\underline{K}^n,\overline{K}^n\right]$ و $K\in\left[\overline{K},\underline{K}\right]$ دوال محدبة ـ مقعرة ، نوعية و مغلقة ، ولتكن F^n,F الدوال القرينة المحدبة والنوعية للدوال K^n,K على الترتيب .

عندئذٍ من أجل $0<\lambda\le 1$ و $\mu=\frac{1}{\lambda}$ ، $\rho\ge 0$

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} d_{\lambda,\mu,\rho}\left(K^n,K\right)=0$ فإن $K^n_{\lambda,\mu}\xrightarrow{M-e/h}K_{\lambda,\mu}$

حيث $K_{\lambda,\mu}$ ، $K^n_{\lambda,\mu}$ دوال مورو ـ يوشيدا للدالتين K ، K^n على الترتيب ، بالدليلين λ , μ

البرهان :

نعلم من المبرهنة 1.1 إنه إذا كانت F^n,F دوال محدبة و $\lim_n d_{\lambda,\rho}\left(F^n,F\right)=0$ فإن $F^n\xrightarrow{M}F$

بالاستفادة من المبرهنة 3.4 و بما أن $d_{\lambda,\mu,\rho}\left(K^n,K\right)=d_{\lambda,\rho}\left(F^n,F\right)$

عندئذٍ بأخذ نهاية طرفي العلاقة السابقة عندما $n\to\infty$ نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty} d_{\lambda,\rho}\left(F^n,F\right)=0 \text{ و } F^n\xrightarrow{M}F$$

وبما أن تقارب موسكو− فوق/تحت – البيان لدوال محدبة ـ مقعرة يكافئ تقارب موسكو فوق البياني للدوال القرينة المحدبة لها ، نجد أن $K_n\xrightarrow{M-e/h}K$

بما أن كلاً من الدالتين $K_{\lambda,\mu}$ ، $K^n_{\lambda,\mu}$ ليبشز مستمرة على مجموعات محدودة و بتطبيق المبرهنة 3.2 نحصل على المطلوب ■

الاستنتاجات والتوصيات :

تمت في هذه الدراسة مناقشة بعض مسائل القيم الصغرى/العظمى من اجل دوال محدبة – مقعرة وقد حصلنا على نتائج تتعلق ببعض خواص دالة مورو- يوشيدا بمتحولين ومسافة مورو- يوشيدا، من أهم النتائج التي توصلنا لها 1- التكافؤ بين تقارب متتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة وفق مفهوم موسكو فوق / تحت البيان والتقارب البسيط لمتتالية دوال مورو- يوشيدا الموافقة لها 2- برهان أنه من أجل أي متتالية من الدوال المحدبة ـ المقعرة إذا كانت متقاربة بالنسبة لمسافة مورو ـ يوشيدا فإن متتالية دوال مورو ـ يوشيدا الموافقة لها تكون متقاربة وفق مفهوم موسكو وفق / تحت البيان ، و نوصي بدراسة هذه النتائج في فضاءات باناخ عامة ومعرفة ما هو مفهوم التقارب الذي يناسب هذه الدراسة

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. :*Variational convergence for functions and operators* . Pitman, London, 1984 , 120-264 .

[2] ATTOUCH, H; WETS,R.: *Convergence Theory of saddle functions* .Trans. Amaer. Math.Soc. 280, n (1), 1983 , 1-41.

[3] ATTOUCH, H ; AZE, D. ; WETS,R. :*On continuity properties of the partial Legendre- FenchelTrasform : Convergence of sequences augmented Lagrangianfunctions , Moreau- Yoshida approximates and subdiffferential operators* . FERMAT Days 85: Mathematics for Optimization, 1986.

[4] ATTOUCH, H; WETS,R.:*Epigraphicanalysis, analyse non linéaire* .Gauthiers- villars, paris, 1989، 74-99.

[5] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS, R. : *Convergence of convex-concave saddlefunctions* , Ann. H. Poincare , Analyse non linéaire , 5 , 1988 , 532-572

[6] ATTOUCH, H; WETS,R.:*Isometries for the Legender-FenchelTransform*. Transactions of the American MathematicalSociety , volume 328, numbe 2 , December 1991

[7] AZE, D. :*Convergence variationelles et dualite , Applications en calcul des variations et en programmationMathematique* . L'UNIVERSITE DE PERPIGNAN .1986 .

[8] BAGH, A :*on the convergence of min/sup problems in some optimal control problems* . Journal of abstract and applied analysis , vol.6 , N1,2001 , 53-71 .

[9] EKLEND,I. ; TEMMAM, R.: *Analyse convexe et problèmes variationnels* . Dunod, 1974 , 12-52 .

[10] Jourani , A. ;Thibault ,L. ;Zagrodny , D. : *DifferentialProperties of the Moreau envelope* , Journal of FunctionalAnalysis 266 , 2014, 1185-1237

[11] JOFER, A. ; WETS, R. : *variational convergence of bivariate function : Lopsided convergenc*. Math. Program. 116 , 2009 , no. 1-2, Ser. B, 275-295 .

[12] M. Bacack; J.M. Borwein; A. Ebrhard, B,S. Mordukhovich, : *Intimal convolution and Lipscchitzianproperties of subdifferentials for prox-regularfunctions in Hilbertspace,* J . CinvexAnal.17 , 2010 737-763

[13] MOREAU , J.J. : proximité *et dualité dans un espace hilbertien Bull* . Soc . Math. France , vol. 93 , 1965 , pp. 273-299

[14] MOREAU, J.J. *: Theoreme "inf-sup" C.R.A.S.T.* 285, 1964 , 2720-2722 .

[15] MOSCO, U.: *On the continunity of the Young-Fenchel Transformation*. Journ. Math. Anal. Apple. 35 , 1971 , 318-335
[16] ROCKAFELLAR, R. ; WETS, R. *: variationalanalysis* . 2en, Springer ,New York, 2004 , 10-212 .
[17] ROCKAFELLAR, R. : *convexAnalysis* . Princeton UniversityPress , Princeton N.J 1970 , 446-470 .
[18] Zhang , K. : *Compensated convexity and its applications* . Ann. I. H. Poincaré – AN 25, 2008 , 743–771
[19] ALI, Wadia. Operator Approach in Solving the Problem of Small Motions of a System of Ideal Capillary Fluids. *Tishreen University Journal-Basic Sciences Series*, 2011, 33.1
[20] ALI, Wadia. Studying the Small Movements of a System of Rotating-Relaxing Fluids. *Tishreen University Journal-Basic Sciences Series*, 2015, 37.1.
[21] ALI, Wadia. Stability and instability of small motions of a pendulum with a cavity filled with a system of ideal capillary fluids. *Tishreen University Journal-Basic Sciences Series*, 2014, 36.4.
[22] ALI, Wadia. Existence And Uniqueness Of Strong Solution For A Semi-Linear Wave Equation With Nonlinear Boundary Dissipation. *Tishreen University Journal-Basic Sciences Series*, 2016, 38.2.
[23] ALI, Wadia. Operator methods for solving the problem of small motions of a dissipative hydrodynamical system. *Tishreen University Journal-Basic Sciences Series*, 2015, 37.2