مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (3) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (3) 2016

مسألة التتميم في منطق الجبر ثلاثي القيمة

الدكتور يعرب غاليه *
مسعود سعاده **

(تاريخ الإيداع 15 / 12 / 2015. قُبِل للنشر في 19 / 5 /2016)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث مسألة التتميم في منطق الجبر ثلاثي القيمة على منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة بالنسبة لجملة أدوات منطقية تامة حيث تمت دراسة هذه المسألة في منظومة اشتقاق غاسبرغ وتقديم دراسة شاملة تضمنت أهم النظريات و قواعد الاشتقاق التي تم وضعها والتي أدت إلى تقديم برهان مميز لنظرية التتميم في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة.

الكلمات المفتاحية: مسألة التتميم ، منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة ، نظام اشتقاق غاسبرغ .

*مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية
**طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (3) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (3) 2016

Completeness problem in three valued algebraic logic

Dr. Yaroub Ghaleih *
Masoud Saade **

(Received 15 / 12 / 2015. Accepted 19 / 5 /2016)

□ ABSTRACT □

We study in this research completeness problem in three valued algebraic logic on Lukasiewicz 3 valued logic for a functionally complete set of connectives where we studied this problem in Wajseberg derivation system and we presented a comprehensive study of the most important theorems and derivation rules which led to a very unique and special proof of completeness theorem in Lukasiewicz 3 valued logic.

Key words: Completeness Problem, Lukasiewicz 3 valued logic, Wajsberg Derivation System.

* **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أن العنصر الرئيسي في مسألة التميم في المنطق ثلاثي القيمة هي مسألة الاشتقاق المتمثلة بمنظومة البديهيات و قواعد الاشتقاق، و هو ما قمنا فيه في بحثناهذا حيث انطلقنا من منظومة بديهيات غاسبرغ و استعرضنا أهم النظريات و قواعد الاشتقاق التي تم إثباتها في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة من قبل العديد من الرياضيين و التي تم الاعتماد عليها في تقديم برهان فريد و مميز لنظرية التتميم في هذا المنطق.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى إثبات نظرية التتميم في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة القائلة بأن كل قضية منطقية صائبة هي قضية قابلة للبرهان.

طرائق البحث و مواده:

يقع البحث ضمن اختصاصات الرياضيات النظرية و بشكل خاص ضمن المنطق الرياضي و مسألتي الاشتقاق و التتميم في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على قواعد الاشتقاق و النظريات المبرهنة بالاشتقاق في المنطق المذكور.

تعاريف و مفاهيم أساسية:

تعريف1 [1]:

تتألف أبجدية (لغة) المنطق ثلاثي القيمة العباراتي (3-valued Propositional Logic) من:

- مجموعة $R=\{P_1,P_2,......\}$ من المتغيرات العباراتية.
- مجموعة أدوات الربط المنطقية الأساسية $\{\leftrightarrow ، \vee ، \wedge ، \rightarrow ، \neg\}$ كما و يمكن تعريف و إضافة أدوات منطقية جديدة كما سنرى لاحقاً.

تعريف 2 [1]:

مجموعة الصيغ العباراتية في المنطق ثلاثي القيمة هي أصغر مجموعة L تحقق الخواص الآتية:

- إذا كانت $P\in R$ فإن $P\in L$ ، حيث هي صيغة بسيطة أو مركبة في المنطق ثلاثي القيمة.
- إذا كانت o أداة ربط منطقية أحادية و $P\in L$ فإن $oP\in L$.
- إذا كانت o أداة ربط منطقية ثنائية و $P، Q\in L$ فإن $PoQ\in L$.

تعريف 3 [1]:

المجموعة $W_3=\{0,\frac{1}{2},1\}$ تعبر عن قيم الحقيقة في المنطق ثلاثي القيمة.

تعريف 4 [1]:

نعرف تابع الحقيقة Truth Function لأداة الربط المنطقية o و نرمز له ب o^* بالشكل:

$$O^*: W_3^n \rightarrow W_3$$

$$PoQ \rightarrow Po^*Q$$

تعريف 5 [2]:

منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة Lukasiewicz 3-valued Logic

هو المنطق الذي يتألف من الأبجدية $R=\{P_1,P_2,\ldots\ldots\}$ و مجموعة أدوات الربط المنطقية الأساسية $\{\neg، \wedge، \vee، \rightarrow، \leftrightarrow\}$ و سنضيف ثلاث أدوات هي $\{\nabla، \&، \sim\}$ بالشكل:

$$\sim P = P \rightarrow \neg P \quad ، \; P\&Q = \neg(P \rightarrow \neg Q) \quad ، \quad P\nabla Q = \neg P \rightarrow Q$$

وبالتالي نحصل على المنطق ثلاثي القيمة:

$$L_3 = <\{0\ ,\tfrac{1}{2},, 1\}،\neg، \wedge، \vee، \rightarrow، \leftrightarrow، \nabla، \&، \sim>$$

حيث الأدوات المنطقية و توابع الحقيقة الموافقة لها ممثلة في جدول الحقيقة الآتي:

الجدول (1)

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$	$P\nabla Q$	$P\&Q$	$\sim P$
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	
1	0	1	0	1	0	0	1	0	
$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	0	
$\frac{1}{2}$	0		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
0	1		0	1	1	0	1	0	1
0	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
0	0		0	0	1	1	0	0	

تعريف 6 [1]:

ليكن لدينا المنطق L و لتكن $\sum$ مجموعة أدوات منطقية في L و $\Omega \subset \sum$

يقال عن مجموعة أدوات الربط المنطقية Ω إنها تامة تابعياً (Functional complete) بالنسبة ل $\sum$ في المنطق L إذا أمكن التعبير عن كل أدوات المجموعة $\sum$ بدلالة أدوات المجموعة Ω.

تمهيدية 1 [3]:

إن المجموعة $\{\neg، \rightarrow\}$ تامة تابعياً بالنسبة لمجموعة الأدوات التالية $\{\neg، \wedge، \vee، \rightarrow، \leftrightarrow، \nabla، \&\}$ في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة.

تعريف 7 [4]:

نعرف التتولوجيا في المنطق ثلاثي القيمة بأنها الصيغة التي تأخذ قيمة الحقيقة 1 وفق أي تابع حقيقة.

تعريف 8 [4]:

نعرف المتناقضة في المنطق ثلاثي القيمة بأنها الصيغة التي تأخذ قيمة الحقيقة 0 وفق أي تابع حقيقة.

تعريف 9 [5]:

لتكن S مجموعة صيغ في منطق ثلاثي قيمة طبيعي L و لتكن P صيغة في L، يقال إن الصيغة P تستنتج من المجموعة S إذا كانت الصيغة P تأخذ قيمة الحقية 1 عندما جميع صيغ المجموعة S تأخذ القيمة 1 وفق تابع الحقيقة ذاته. يرمز لذلك بالرمز $S \vDash_L P$ أو $S\vDash P$ إذا لم يؤدي ذلك لى التباس.

و يقال عن المحاكمة المنطقية السابقة إنها صالحة (Valid Argument) في المنطق ثلاثي القيمة، أي المحاكمة الصالحة هي التي نتيجتها تستنتج من مجموعة فرضياتها .

تعريف 10 [6]:

البديهية (Axiom) في المنطق L هي صيغة منطقية صائبة مطلقاً في هذا المنطق.

تعريف 11 [6]:

مبدأ التعويض (Substitution Rule) ينص على أنه إذا كانت A(P) صائبة فإن A(Q) صائبة كذلك مهما تكن الصيغة Q .

أي أن مبدأ التعويض يقضي بأنه يمكن استبدال الصيغة البسيطة Q بالصيغة البسيطة P في أي عبارة منطقية A شرط أن يتم وضع Q مكان P في كل موضع تذكر فيه الصيغة البسيطة P في العبارة A.

تعريف12 [6]:

منظومة البديهيات (Axiomatic Systems) تتألف من جملة بديهيات مزودة بمجموعة من قواعد الاستنتاج، و هي الحجر الاساس لبناء علم المنطق الرياضي.

تعريف 13 [5]:

منظومة بديهيات غاسبرغ لمنطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة تم وضعها من قبل غاسبرغ في عام 1931 مستخدماً مجموعة أدوات الربط المنطقية التامة تابعياً $\{\neg, \rightarrow\}$ ، و هذه المنظومة تتألف من 4 بديهيات و قاعدة الاستنتاج Modus Ponens و مبدأ التعويض (Substitution Rule).

LA_1: $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$

LA_2: $(P\rightarrow Q) \rightarrow ((Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R))$

LA_3: $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

LA_4: $((P\rightarrow\neg P) \rightarrow P) \rightarrow P$

قاعدة الاشتقاق (Modus Ponens): إذا كانت P صحيحة و $P \rightarrow Q$ صحيحة فإن Q صحيحة.

مبدأ التعويض (Substitution Rule): إذا كانت A(P) صحيحة فإن A(Q) صحيحة.

تعريف 14 [7]:

الاشتقاق (Derivation) هو عدد منته من الصيغ (Formulas) كل منها هو إما :

- فرضية (Assumption) .
- صيغة ناتجة مباشرة من الفرضيات أو البديهيات باستخدام مبدأ التعويض.
- يمكن استنتاجها من صيغ سابقة في سلسلة الاشتقاق باستخدام قواعد الاشتقاق مثل MP وغيرها.

إذا كانت الصيغة P تشتق من اسرة الصيغ S رمزنا لذلك بالرمز $S\vdash P$.

ملاحظة 2:

في الاشتقاق $S\vdash P$ الصيغ التي تنتمي إلى المجموعة S تسمى فرضيات (Assumptions) و يجب دوماً أن تبدأ بها سلسلة الاشتقاق و يجب أن تكون الصيغة P آخر صيغة في سلسلة الاشتقاق.

تعريف 15 [7]:

نقول عن الصيغة P في المنطق L_3 أنها تشتق من مجموعة الصيغ S و نرمز لذلك بالرمز $S\vdash P$ إذا و فقط إذا كان هناك اشتقاق ل P بحيث كل فرضياته هي عناصر من S .

تمهيدية 2 [8]:

من أجل نظام بديهيات في المنطق ثلاثي القيمة يتحقق ما يلي:

a) إذا كانت $S \vdash \mathrm{P}$ فإن $S' \vdash \mathrm{P}$ حيث $S' \supseteq S$.

b) إذا كانت $\vdash \mathrm{P}$ عندئذٍ $S \vdash \mathrm{P}$ مهما تكن مجموعة الصيغ S .

c) إذا كانت P بديهية (Axiom) فإن $S \vdash \mathrm{P}$ مهما تكن مجموعة الصيغ S .

d) إذا كانت $S \vdash \mathrm{P}$ عندئذٍ يوجد مجموعة جزئية منتهية S' بحيث $S \supseteq S'$ $S' \vdash \mathrm{P}$.

e) إذا كانت الصيغة P محتواة في S فإن $S \vdash \mathrm{P}$.

f) إذا كانت $S \vdash \mathrm{P}$ و كانت $S \vdash \mathrm{P} \rightarrow Q$ فإن $S \vdash \mathrm{Q}$.

تعريف 16 [4]:

البرهان (Proof) هو كل اشتقاق خالي من الفرضيات ، أي ينتج مباشرةً من بديهيات النظام و نظرياته باستخدام قواعد الاشتقاق و مبدأ التعويض.

تعريف 17 [4]:

النظرية (Theorem) هي كل صيغة يتم اشتقاقها من النظام ببرهان.

النتائج و المناقشة:

سنقوم في هذا البحث بإيجاد نظريات جديدة في المنطق L_3 و وضع برهان لها بالاعتماد على منظومة اشتقاق غاسبرغ مع النظريات و قواعد الاشتقاق التي وضعها الباحثون على مر السنوات، وسنذكر فقط النظريات و قواعد الاشتقاق التي اعتمدنا عليها في إثبات صحة المبرهنات التي سنقوم ببرهانها في هذا البحث:

- **النظريات:**

L3D1 $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

L3D2 $\neg \neg P \rightarrow P$

L3D3 $P \rightarrow \neg \neg P$

L3D4 $P \rightarrow P$

L3D5 $((P \rightarrow P) \rightarrow Q) \rightarrow Q$

L3D6 $P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

L3D7 $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$

L3D8 $\neg (P \rightarrow Q) \rightarrow P$

L3D9 $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$

L3D10 $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

L3D11 $(P \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow Q))$

• قاعدة الاشتقاق HS (Hypothetical Syllogism) :

$\{P \to Q\ ,\ Q \to R\} \vdash P \to R$

مبرهنة 1:

من أجل أي صيغتين كيفيتين P و Q في L_3 فإن الصيغة الآتية:

$((P\to(Q\to P)) \to Q) \to Q$ هي نظرية في L_3.

الإثبات:

1. $(P\to(Q\to P)) \to(((P\to(Q\to P)) \to Q) \to Q)$

[L_3D6: $P\to(Q\to P)/P$]

2. $P\to(Q\to P)$

[$L_3 1$: P/P ، Q/Q]

3. $((P\to(Q\to P) \to Q) \to Q$

[1 ،3 MP]

P	Q	Q→P	P→(Q→P)	P→(Q→P) →Q	((P→(Q→P) →Q) →Q
1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1
1	0	1	1	0	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	0	1

مبرهنة 2:

من أجل أي صيغتين كيفيتين في L_3 فإن الصيغة الآتية:

$P\&Q \to P\nabla Q$ المكافئة للصيغة $\neg(P \to \neg Q) \to (\neg P \to Q)$

هي نظرية في L_3.

الاثبات:

1. $\neg(P \to \neg Q) \to P$

[L_3D8: P/P ، $\neg Q$/Q]

2. $\neg\neg P \to (\neg P \to Q)$

[L_3D1: $\neg P$/P ، Q/Q]

3. $P \to \neg\neg P$
[L_3D3: P/P]
4. $\neg(P \to \neg Q) \to \neg\neg P$
[HS 1 ،3]
5. $\neg(P \to \neg Q) \to (\neg P \to Q)$
[HS 4 ،2]

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to \neg Q$	$\neg(P \to \neg Q)$	$\neg P \to Q$	$\neg(P \to \neg Q) \to (\neg P \to Q)$
1	1	0	0	0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	1	0	0	1

مبرهنة 3:
من أجل أي صيغتين كيفيتين P و Q في المنطق L_3 فإن الصيغة $\neg(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$ هي نظرية في L_3.
الإثبات:

1. $\neg(P \to Q) \to P$ [L_3D7: P/P ، Q/Q]
2. $P \to \neg\neg P$ [L_3D3: P/P]
3. $\neg(P \to Q) \to \neg\neg P$ [HS(1 ،2)]
4. $\neg\neg P \to (\neg P \to \neg Q)$ [L_3D1 : $\neg P/P$ ، $\neg Q/Q$]
5. $\neg(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$ [HS(3 ،4)]

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg P \to \neg Q$	$\neg(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

1	0	0	1	0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	1	0	1	1

مبرهنة 4:

من أجل أي صيغتين P و Q في المنطق L_3 فإن الصيغة $P\to(\neg P\to\neg Q)$ نظرية في L_3.

الإثبات:

1. $P\to\neg\neg P$ [L_3D3: P/P]
2. $\neg\neg P\to(\neg P\to\neg Q)$ [L_3D1 : $\neg P/P$ ، $\neg Q/Q$]
3. $P\to(\neg P\to\neg Q)$ [HS (1 ،2)]

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\to\neg Q$	$P\to(\neg P\to\neg Q)$
1	1	0	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	1	1

الاستنتاجات و التوصيات:

توصلنا في هذه البحث إلى وضع نظريات جديدة في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة و البرهان على صحتها بناءاً على منظومة اشتقاق غاسبرغ ، و نوصي بمتابعة البحث و محاولة إيجاد نظريات و قواعد اشتقاق أخرى وتوظيفها في صياغة برهان جديد أكثر تميزاً لنظرية التتميم في منطق لوكاسفيتش ثلاثي القيمة.

المراجع:

[1] BERGMANN, MERRIE,JAMES, H.MOOR *and* JACK NELSON. *The Logic Book, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2004 , 71-90 , 100-114.*

[2] S. AGUZZOLI *and* A. CIABATTONI *"Finiteness in Infinite-Valued _Lukasiewicz Logic."Journal of Logic, Language, and Information 9, 2000, -17.*

[3] BEALL J.C. *and BAS C. and* VAN FRAASSEN *Possibilities and Paradox: An Introduction to Modal and Many-Valued Logic. New York: Oxford University Press, 2003, 75-92.*

[4] CHANG C.C. *"A Proof of an Axiom of _Lukasiewicz." Transactions of the American Mathematical Society 87, 1958, 220-240.*

[5] WAJSBERG *"Axiomatization of the Three-Valued Propositional Calculus." In ed. StorrsMcCall, Polish Logic: 1920–1939. New York: Oxford University Press, 1967, 50-68.*

[6] CHANG C.C. *"A New Proof of the Completeness of the _Lukasiewicz Axioms." Transactions of the American Mathematical Society 93, 1959, 106-120.*

[7] BAAZ, MATTHIAS, CHRISTIAN FERMULLER , *and* RICHARD ZACH *"Systematic Construction of Natural Deduction Systems for Many-Valued Logics." Proceedings of the 23rd International Symposium on Multiple Valued Logic. Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press, 1993, 7-25.*

[8] OLC, LEONARD *and* PIOTR BOROWIK. *Many-Valued Logics. I: Theoretical Foundations. NewYork: Springer-Verlag, 1992, -20.*