مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (2) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

الدوال الداعمة في فضاء هيلبرت

الدكتور نزار محمد حسن*

(تاريخ الإيداع 30 / 12 / 2015. قُبِل للنشر في 20 / 4 /2016)

ملخّص

تعد الدوال الداعمة من الوسائل الهامة والمفيدة عند دراسة مسائل مختلفة في الرياضيات والفيزياء والعلوم الهندسية، نظرا لامتلاكها الكثيرة من الخصائص والمزايا الحسنة.

لهذا سنركز اهتمامنا في هذه الورقة على دراسة وإثبات التكافؤ فيما بين الشروط الثلاث الآتية:

1) f دالة محدبة.

2) f دالة داعمة.

3) f دالة تحت جمعية على كرة الواحدة

حيث: $f:H\to\Re$ دالة مستمرة ومتجانسة من الدرجة الأولى و H فضاء هيلبرت.

الكلمات المفتاحية : الدوال المحدبة ، الدوال الداعمة ، الدوال تحت الجمعية.

* مدرس – قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة التقنية –جامعة طرطوس – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (2) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

Supporting Functions in Hilbert Space

Dr . Nizar Mohamad Hassan*

(Received 30 / 12 / 2015. Accepted 20 / 4 /2016)

□ ABSTRACT □

The supporting functions are powerful tools for studying several problems in mathematics and engineering sciences, since they have useful advantages.

In this paper, we prove that the following conditions and statements are equivalent:

1. f is convex.
2. f is supporting
3. f is subadditive on the unit sphere

Where $f : H \rightarrow \Re$ be continuous and homogenous of degree 1 and H be a Hilbert space.

Key Words . Convex Functions. Supporting Functions. Subadditive Functions.

***Associate Professor, Department of Basic sciences, Faculty of Technical Engineering, University, Tartous, Syria.**

مقدمة:

تلعب نظرية الدوال المحدبة أو التحليل المحدب دوراً مهماً في إيجاد القيم القصوى والحلول المثلى. أدخل الباحثون في دراستهم للتحليل المحدب الكثير من المفاهيم المساعدة مثل الدالة الداعمة [1] ومفهوم تحت الجمعية والدوال المحدبة. وعدد آخر من الباحثين استفاد من هذه الدوال في التطبيقات الهندسية والنظرية، إذْ تأخذ هذه الدوال دور رئيس في التحليل الرياضي وفي أنواع مختلفة من النظريات الرياضية، وذلك لما تقدمه من ميزات تساهم في معالجة المسائل الرياضية المطروحة التي قد تتطلب شروطاً إضافية، متمثلة بهذه الدوال.

من هذه الدراسات اختلاف المخاريط المماسة، مثل مخروط Bouligand ومخروط Clarke وتطبيقاتها على مسائل التحسين، والنظريات المتعلقة بتطوير الحساب التفاضلي للدوال غير المفاضلة بالمعنى العادي والمجموعات غير الملساء بالمعنى الكلاسيكي والمتعددة الاتصال أو بما يدعى (nonsmooth analysis).

بين **[2]** KrivanV, أهمية الدوال الداعمة في وضع شروط جديدة تضمن المساواة $T_K(x)\cap T_L(x)=T_{K\cap L}(x)$، من أجل $K\subset X,\, L\subset Y$ مجموعتان جزئيتان محدبتان مغلقتان، من فضائي هيلبرت X,Y على الترتيب. بينما نجد عند اقتراح [3] JerryL.and, A. Willsky خوارزمية تعتمد على الدوال الداعمة، لإعادة بناء مجموعة محدبة S بطريقة قياس الخطوط المساعدة $L_S(\theta)$ للمجموعة S وذلك انطلاقاً من كون قياس خطوط المساعدة قد لا تكون منسجمة مع أي مجموعة في المستوي. فحدد نظرية خطوط المساعدة المنسجمة [راجع [3] النظرية المساعدة (1)] والتي تخدم كقاعدة (أو أساس) لخوارزمية التحسين. مهد هذا البحث لاستخدام نهج أكثر عمومية، فقد عرّف الخطوط المساعدة $L_S(\theta)$ للمجموعة S المحدودة والمغلقة، عند الزاوية θ :

$$L_S(\theta)=\{\, x\in\Re^2 \;|x^T w=h(\theta)\,\}$$

حيث إن $w=\left[\cos\theta\ \sin\theta\right]^T$ الخط المعامد إلى الوحدة الناظمية والمماسة لـ S في الاتجاه الموجب لـ w . وأن:

$$h(\theta)=\sup_{x\in S} x^T w$$

هي قيمة أكبر مسقط ممكن من أية نقطة في S على المحور $-w$. وتمثل الدالة الداعمة للمجموعة S من أجل أية قيمة لـ θ، ويمكن للمرء أن يرى أن S تقع تماماً وعلى وجه الخصوص بجهة واحدة من نصفي المستوي المعرف بـ $L_S(\theta)$، إن للدالة الداعمة مهمة وخصائصها معروفة ومشابهة لخصائص المتجهات المساعدة.

أيضاً عند دراسة P. Pikuta, W. Rzymowski [4] للمجموعات المستوية المحدبة باستخدام التوزيع، بينا أن الدالة $P:\Re\to\Re$ $2\pi-$ دوري هي دالة داعمة إذا وجدت مجموعة $C\subset\Re^2$ محدبة,ومغلقة بحيث يكون:

$$p(t)=\max_{x\in C}\left\langle x,e(t)\right\rangle ,\, t\in\Re$$

حيث أن $e(t)=(\cos t,\sin t)\ ,\ t\in\Re$ وأن $\left\langle x,y\right\rangle$ الجداء الداخلي للمتجهين $x,y\in\Re^2$. كما أشار إلى الشرط اللازم والكافي في اختبار الدالة الداعمة، نشير بذلك إلى اختبار Rademacher [10] للتحدب والشرط اللازم والكافي كي تكون p دالة الداعمة. كذلك اختباريّ Gelfond [5] و Firey [6].

اختبار Gelfond [[5], p. 132]) : بفرض أن الدالة $P:\Re\to\Re$ $2\pi-$ دوري، تكون P دالة داعمة إذا كان:

$$\det\begin{bmatrix}\cos t_1 & \sin t_1 & p(t_1)\\ \cos t_2 & \sin t_2 & p(t_2)\\ \cos t_3 & \sin t_3 & p(t_3)\end{bmatrix}\geq 0$$

من أجل كل $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le 2\pi$ ، حيث أن $t_2 - t_1 \le \pi$ و $t_3 - t_2 \le \pi$.

ليكن $S^{n-1} = \{x \in \Re^n : \| x \| = 1\}$ نقول إن $P: S^{n-1} \to \Re$ هي دالة داعمة إذا وجدت مجموعة متراصة ومحدبة $C \subset \Re^n$ بحيث يكون:

$$p(u) = \max_{x \in C} \langle x, u \rangle \ , \quad u \in S^{n-1}$$

اختبار Firey ([6], p. 239, Lemma): لتكن $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ قاعدة ثابتة متعامدة في $\Re^n$ ،

تكون الدالة $P: S^{n-1} \to \Re$ دالة داعمة إذا تحقق:

$$\det \begin{bmatrix} \langle u_1, a_1 \rangle & \ldots\ldots & \langle u_1, a_n \rangle & p(u_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \langle u_n, a_1 \rangle & \ldots\ldots & \langle u_n, a_n \rangle & p(u_n) \\ \langle u_{n+1}, a_1 \rangle & \ldots\ldots & \langle u_{n+1}, a_n \rangle & p(u_{n+1}) \end{bmatrix} \times \det \begin{bmatrix} \langle u_1, a_1 \rangle & \ldots\ldots & \langle u_1, a_n \rangle \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \langle u_n, a_1 \rangle & \ldots\ldots & \langle u_n, a_n \rangle \end{bmatrix} \le 0$$

وذلك من أجل كل $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n+1} \in S^{n-1}$ ، وحيث أن $u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} t_i u_i \ , \ t_i \ge 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots., n$.

وفيما يتعلق بتحدب دالة، أشار P. Pikuta, W. Rzymowski [4] إلى اختبار Rademacher [10]، كما قدم اختباراً آخر لتحدب دالة باستخدام توزيع المشتقات للدالة [راجع [4]− النظرية (4)].

نظرية: إذا كانت $u: S^{n-1} \to \Re$ دالة مستمرة و $u_{a,b} + u''_{a,b}$ كانت 2π−دوري، قياس Radon الموجب على $\Re$ ، تحقق:

$$\int_0^{2\pi} e_{a,b}(t) \left(u_{a,b} + u''_{a,b}\right)(dt) = 0$$

من أجل كل $a, b \in S^{n-1}$ وحيث $\langle a, b \rangle = 0$ ، عندئذ فإن $\tilde{u}: \Re^n \to \Re$ تكون دالة محدبة.

وضح L. Hörmander في المرجع [7] إن التوزيع $u_{a,b} + u''_{a,b}$ 2π − دوري، قياس Radon موجب على $\Re$. وعرّف $\tilde{u}: \Re^n \to \Re$ تمديد متجانس بشكل ايجابي للدالة $u: S^{n-1} \to \Re$ أي $\left(u(\alpha x) = \alpha u(x), \alpha > 0, x \in \Re^n\right)$ و $S^{n-1} = \left\{x \in \Re^n : \| x \| = 1\right\}$ وأنه من أجل $a, b \in S^{n-1}$ تحقق $\langle a, b \rangle = 0$ يعرّف $e_{a,b}: \Re \to S^{n-1}$ ، حيث $e_{a,b}(t) = a \cos t + b \sin t$ و $u_{a,b}: \Re \to \Re$ بحيث $u_{a,b}(t) = u(e_{a,b}(t))$ ، وأن:

$$\tilde{u} = \begin{cases} \|x\| \cdot u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \ , & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى تعريف الدالة الداعمة في فضاء هيلبرت، ودراسة العلاقة بين الدوال الداعمة والدوال المحدبة والدوال تحت الجمعية. وبهذا يتم تخفيف بعض القيود على المسائل المطروحة، وتصبح إمكانية الاستفادة من هذه النتائج في التطبيقات الهندسية والفيزيائية والرياضية أكثر سهولة. كما نهدف إلى دعم وتطوير البحث

العلمي وتزويد الباحثين وطلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية والتطبيقية.

طرائق البحث ومواده:

يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية والتي تخص التفاضل والتحليل المحدب، كما ويمكن الاستفادة منه في الدراسات التطبيقية في كليتي العلوم والهندسة.

4- **تعاريف ومفاهيم أساسية:**

نحتاج هنا للتطرق إلى بعض التعاريف الآتية:

فضاء هيلبرت H : هو فضاء جداء داخلي تام.

لتكن S كرة الواحدة في فضاء هيلبرت H حيث:

$$S=\left\{x\in H:\ \|x\|=1\right\}$$

نقول إن الدالة $f:H\to\Re$ هي دالة متجانسة موجبة (متجانسة من الدرجة الأولى) إذا كان $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ من أجل كل $\lambda\geq 0$ و $x\in H$.

ونقول إن الدالة $f:S\to\Re$ دالة داعمة، إذا وجدت مجموعة $C\subset H$ غير خالية و مغلقة، محدودة ومحدبة، وحيث أن:

$$f(x)=\sigma_C(x)\overset{def}{=}\max_{u\in C}\langle x,u\rangle.$$

من أجل كل $x\in S$.

نقول أيضاً إن الدالة $f:H\to\Re$ تحت جمعية على كرة الواحدة S إذا كان:

$$f(x+y)+f(x-y)\geq 2f(x)$$

وذلك من أجل كل $x\in S$ و $y\in H$ مع $\langle x,y\rangle=0$.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة 1: إذا كانت $f:H\to\Re$ دالة مستمرة متجانسة و موجبة فإن العبارات الآتية:

1- f دالة محدبة.

2- f دالة داعمة.

3- f دالة تحت جمعية على كرة الواحدة S.

تكون متكافئة، أي إن $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$.

البرهان: $(1)\Rightarrow(2)$ إذا كانت f مستمرة و متجانسة بشكل موجب ومحدبة فإنها تكون دالة تحت جمعية في H. والمجموعة:

$$C=\left\{x\in H:\ \langle x,y\rangle\leq f(y)\ ,\ y\in H\right\}$$

هي غير خالية ومغلقة ومحددة ومحدبة، ويمكن إثبات ذلك بمساعدة نظرية التمديد Hahn–Banach [8]، علاوة على ذلك، من أجل كل $y\in H$:

$$f(y)=\max_{x\in C}\langle x,y\rangle$$

$(2)\Leftarrow(3)$ إذا كانت الدالة $f:H\to\Re$ دالة داعمة فهي متجانسة بشكل ايجابي و تحت جمعية على H ينتج أنه من أجل $x,y\in H$ يكون لدينا:

$$2f(x)=f(2x)=f(x+y+x-y)\le f(x+y)+f(x-y)$$

$(3)\Leftarrow(1)$ للبرهان على ذلك نقسم البرهان إلى أربع خطوات، بما أن f هي متجانسة بشكل موجب يكفي فقط إثبات أن f تحت جمعية على H.

<u>الخطوة 1</u>: لنعرف، من أجل $a,b\in S$ و $\langle a,b\rangle=0$ المستوي ثنائي الأبعاد:

$$\Pi(a,b)=\left\{\xi_1 a+\xi_2 b:(\xi_1,\xi_2)\in\Re^2\right\}$$

ومن أجل $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\Re^2$:

$$f_{a,b}(\xi)=f(\xi_1 a+\xi_2 b)$$

ويكون من السهل التحقق أن:

$$f(x+y)\le f(x)+f(y)$$

من أجل كل $x,y\in\Pi(a,b)$ شريطة أن تكون $f_{a,b}$ دالة تحت جمعية في $\Re^2$. بالتالي من أجل أي $x,y\in H$ يوجد $a,b\in S$ تحقق $\langle a,b\rangle=0$ وأن $x,y,x+y\in\Pi(a,b)$ وهذا يكفي لإثبات أن كل دالة $f_{a,b}$ هي دالة تحت جمعية وهذا يحقق المطلوب.

<u>الخطوة 2</u>:

لنأخذ $a,b\in S$ وحيث أن $\langle a,b\rangle=0$، نعرف من أجل كل $t\in\Re$:

$$e(t)=(\cos t,\sin t)\ ,\quad p(t)=f_{a,b}(e(t))=f(a\cos t+b\sin t)$$

بالتالي يتطلب منا أن يكون:

$$p(t+\delta)+p(t-\delta)\ge 2p(t)\cos\delta$$

من أجل كل $t\in\Re$ وكل $\delta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، نعرف:

$$x^+=\frac{\cos(t+\delta)}{\cos\delta}a+\frac{\sin(t+\delta)}{\cos\delta}b\ ,\qquad x^-=\frac{\cos(t-\delta)}{\cos\delta}a+\frac{\sin(t-\delta)}{\cos\delta}b$$

$$x=a\cos t+b\sin t,\qquad y=x^+-x$$

حيث $x\in S$، $x^++x^-=2x$ و $\langle x\,,\,y\rangle=0$، ينتج لدينا:

$$\begin{aligned}p(t+\delta)+p(t-\delta)&=f(a\cos(t+\delta)+b\sin(t+\delta))+f(a\cos(t-\delta)+b\sin(t-\delta))\\&=\left(f(x^+)+f(x^-)\right)\cos\delta=\left(f(x+y)+f(x-y)\right)\cos\delta\\&\ge 2f(x)\cos\delta=2p(t)\cos\delta\end{aligned}$$

<u>الخطوة 3</u>:

لنفرض أن (راجع [3]–نظرية 2.1) التوزيع $p+p''$ غير سالب. ولنضع $\varphi\in C_0^\infty(\Re,\Re)$ غير سالب.
لنبين أن:

$$\int_\Re p(t)\left(\varphi(t)+\varphi''(t)\right)dt\ge 0$$

حيث:

$$\int_{\Re} p(t)\varphi''(t)\,dt = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta^2}\int_{\Re} p(t)\,\big(\varphi(t+\delta)+\varphi(t-\delta)-2\varphi(t)\big)dt$$

ومن أجل $\delta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، المساواة:

$$\int_{\Re} p(t)\big(\varphi(t+\delta)+\varphi(t-\delta)-2\varphi(t)\big)dt = \int_{\Re}\big(p(t-\delta)+p(t+\delta)-2p(t)\big)\varphi(t)\,dt$$

$$\geq \big(2\cos\delta-1\big)\int_{\Re} p(t)\varphi(t)\,dt$$

تكون محققة، فنحصل على:

$$\int_{\Re} p(t)\varphi''(t)\,dt \geq 2\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\cos\delta-1}{\delta^2}\int_{\Re} p(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{\Re} p(t)\varphi(t)\,dt$$

<u>الخطوة. 4:</u>

إذاً $p+p''$ هو غير سالب، و $2\pi-$ دوري، (راجع [9] المقترح 3.1 أو النظرية 2 في [4]) يوجد مجموعة متراصة ومحدبة $U \subset \Re^2$، حيث أن:

$$p(t)=\sigma_U \overset{def}{=} \max_{u\in U}\langle u, e(t)\rangle, \qquad t\in\Re$$

من أجل كل $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\Re$ بالتالي يكون لدينا $f_{a,b}(\xi)=\sigma_U(\xi)$ والتي ينتج عنها:

$$f_{a,b}(\xi+\eta) \leq f_{a,b}(\xi)+f_{a,b}(\eta)$$

من أجل كل $\xi,\eta\in\Re^2$.

الاستنتاجات والتوصيات:

إذا فرضنا أن $f:S\to\Re$ دالة مستمرة ومحدودة. فإن f دالة داعمة إذا كان:

$$f\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right)+f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{1+\|y\|^2}}\,f(x)$$

محققة من أجل كل $x\in S$ و $y\in H$، مع $\langle x,y\rangle=0$.

تأتي أهمية هذا البحث من كون فضاء هيلبرت هو الأكثر استخداماً في دراسة المسائل العلمية التطبيقية منها والنظرية، وتزيد هذه الأهمية عند الاعتماد على الدوال الداعمة ضمن شروط مفروضة لتحقيق النتائج المطلوبة، وعند تخفيف هذه الشروط فإن إمكانية تطبيق النتائج تتحسن نحو الأفضل، وهذا ما قدمته النظرية عند دالة $f:H\to\Re$ مستمرة متجانسة و موجبة من تكافؤ العبارات:

f دالة محدبة $\Leftrightarrow$ دالة داعمة $\Leftrightarrow$ دالة تحت جمعية على كرة الواحدة S.

إن إمكانية البحث عن شرط لازم وكافي كي تكون الدالة $f:S^{n-1}\to\Re$ دالة داعمة ما تزال قائمة، على الرغم من أن هناك عدد كبير من الدراسات ما يزال تحت الانجاز.

المراجع:

[1] ROCKAFELLARR. T.*Convex Analysis*. Section 13, Princeton, New jersey University Press, (1970) (pp.112-127).

[2] KRIVAN V, *Technical note On the Intersection of Contingent Cones*، Journal of optimization theory and applications. Vol,70,No.2, (1991).

[3] PRINCE,J. L. and A. S. Willsky, *Reconstructing Convex Sets from Support Line Measurements*. Vol. 12. No. 4 ,April (1990). (pp. 377-389).

[4] PIKUTA P, W. Rzymowski, *Plane convex sets via distributions*, Annales UMCS, LVII. Vol. 8, (2003). (pp. 77-84).

[5] GELFAND I.M, G.E. Shilov, Generalized Functions, vol. 1, second edition, Gos. Izd.Fiz-Mat. Lit. Moscow, Russian (1959).

[6]FIREY M.J. *Support flats to convex bodies*, GeometriaeDedicata 2, (1973). (pp. 225–248).

[7] HÖRMANDER L. *The Analysis of Linear Partial Diferential Operators I, Distrib-ution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg-NewYork-Tokyo, (1983).

[8] MAURIN.K. *Analiza*, TOM 38 , Warszawa,(1971). (p. 360-385).

[9] CHEN .W. R. HOWARD, E. LUTWAK, D. YARD, G. ZHANG, *A generalized Affine isoperimetric inequality*, Journal of Geometric Analysis, vol. 14,No. 4 (2004). (pp. 597-612).

[10] RADEMACHER. H. ¨*Ubereinefunktionale Ungleichung in der Theorie der Onvexen K¨orper*, Math. Z. Bd. ,Vol. 13, (1922). (pp. 18–27).

[11] DRAGOMIR S. S. *Some Trace Inequalities For Operators In Hilbert Spaces*, Mathematics, School of Engineering & Science, Victoria University, Sep (2014).

[12] FECHNER W. *Hlawka's Functional Inequality*, Aequat. Math.87 (2014). (pp. 71–87).