مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (1) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (1) 2016

رتبة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات للحقول التربيعية الحقيقية من نمط Rechaud−Degert

الدكتور حسن سنكري*

محمد معلا**

(تاريخ الإيداع 25 / 8 / 2015. قُبِل للنشر في 14 / 1 /2016)

ملخّص

يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة رتبة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات للحقول التربيعية الحقيقية $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=4n^2+2$ عدد صحيح موجب حر من التربيع و n عدد صحيح موجب فردي ، وبشكل خاص سنبرهن أنه لاتوجد حقول K رتبة زمرة صفوف تكافؤ ايديالاتها تساوي 1 وذلك في حالات خاصة .

الكلمات المفتاحية : الحقول التربيعية الحقيقية ، صفوف تكافؤ الايديالات ، نمط Rechaud−Degert ، التابع زيتا .

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

**طالب ماجستير – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (1) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (1) 2016

Order of ideal class group of real quadratic fields of Rechaud-Degert type

Dr. Hasan Sinkarie*
Mohammad Mualla **

(Received 25 / 8 / 2015. Accepted 14 / 1 /2016)

□ ABSTRACT □

This work suggests studying the order of ideal class group of real quadratic fields $K(\sqrt{d})$ with $d = 4n^2 + 2$ a square free integer number and n an odd positive integer number ,especially we prove that there is no such fields with order of it's ideal class group equal 1 , in special cases

Key words: Real quadratic fields, Ideal class group, Rechaud- Degert Type, Zeta function

***Assistant Professor , Department Of Mathematics, Faculty Of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria .**
****Postgraduate student, , Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria .**

مقدمة:

تم تقديم العديد من الأبحاث لدراسة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات للحقول ، و بشكل خاص الحقول التربيعية . تعتمد هذه الأبحاث على عدة طرق منها المنحنيات الاهليلجية ، و التابع زيتا . بداية نعرض بعض ما تم التوصل اليه من قبل بعض الباحثين ، بيّن "Biro في [1] أنه إذا كان $p > 1861$ عدد صحيح فإن $h(4n^2+1) > 1$. وبرهن Jungyun Lee في [2] أنه إذا كان $d \not\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$ حيث d من نمط wide rechaud – degert فإن $h(d) > 1$ إذا و فقط ، إذا كان :

$$d = 3, 6, 7, 11, 14, 23, 33, 38, 47, 62, 83, 167, 227, 398$$

كما بين Lapkova في [3] أنه إذا كان $d = (an)^2 + 4a$ حيث a, n عددين صحيحين موجبين و فرديين ، بحيث أن $43.181.353 | n$ فإن $h(d) > 1$.

سنعرض بداية بعض التعاريف و المبرهنات المساعدة من [4] ، ثم سنقوم بحساب بعض القيم الخاصة للتابع زيتا بطريقة مشابهة لما ورد في [3] و [4] ثم ننتقل إلى المبرهنة الأساسية في هذا البحث .

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في دراسة ساحات التحليل الوحيد و بالتالي البحث فيما إذا كان يمكن تحليل الايديالات بشكل وحيد أم لا في هذه الحقول .

طرائق البحث ومواده:

نبدأ أولاً بعرض موجز للنتائج في [5]، ونعطي بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي سنستخدمها في دراسة رتبة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات للحقل المدروس وذلك بالاعتماد على المراجع [1,2,3,5,6] .

تعاريف و مفاهيم أساسية:

تعريف (1) : $[5]$

تعرف كثيرات حدود برنولي $B_l(x)$ من خلال العلاقة $Te^{Tx}/(e^T - 1) = \sum_{n\geq 0} B_n(x)(T^n/n!)$ وسنعتبر أن $B_l = B_l(0)$.

تعريف(2):[3]

نسمي مميز ديريخليه التابع χ_q المعطى بالعلاقة $\chi_q(m) = \left(\frac{m}{q}\right), m \in \mathbb{Z}$ و حيث $\left(\frac{\bullet}{q}\right)$ رمز جاكوبي

رموز و اصطلاحات :

سنعتمد في هذا البحث على الرموز التالية :

$(x)_q$: أقل باقي موجب لحاصل قسمة x على q.

$P(K)$ أسرة كل الايديالات الرئيسية غير الصفرية في الحلقة O_K.

$P_F(K)$ أسرة كل الايديالات الرئيسية الكسرية غير الصفرية في الحلقة O_K.

$I_F(K)$ أسرة كل الايديالات الكسرية غير الصفرية في الحلقة O_K.

نرمز ب $\beta \gg 0$ أذا كان $\beta \succ 0$ و المرافق الجبري يحقق $\overline{\beta} \succ 0$.

النتائج والمناقشة:

I -حساب بعض القيم الخاصة للتابع زيتا :

تمهيدية $(1):[5]$

ليكن (e,f) –قاعدة للايديال I حيث $I \in I_F(K)$ من أجل أي حقل تربيعي K و t عدد صحيح موجب ، و $e^* = e + tf$ و لنفرض أن o و أن $e,e*$ حيث $w = Ce + Df$ و $o \le C, D < q$ لنضع $c = C/q\ ,d = D/q\ ,\delta = (D - tC)_q / q$ و لنفرض أن $Z_{I,w,q}(s) = Z(s) = \sum_{\beta \in H} (\beta\overline{\beta})^{-s}$ حيث $H = \{\beta \in I : \beta \equiv w \pmod q), \beta = Xe + Ye^* with (X,Y) \in \mathbb{Z}^2, X > 0, Y \ge 0\}$: ، عندئذ :

$$Z(0) = A(1-c) + \tfrac{t}{2}(c^2 - c - \tfrac{1}{6}) + \tfrac{d-\delta}{2} + Tr(\tfrac{-f}{4e^*})B_2(\delta) + Tr(\tfrac{f}{4e})B_2(d)\ ;A = \lceil tc - d \rceil$$

مبرهنة مساعدة (1):

ليكن $l \ge 2$ عدداً صحيحاً ، عندئذ :

$$\sum_{v=0}^{q-1} B_l(\tfrac{v}{q}) \sum_{r=0}^{q-1} \chi_q(r^2 - 2v^2) = qB_l \prod_{p|q} (1 - p^{-l})$$

البرهان:

نفرض أن :

$$R = \sum_{r=0}^{q-1} \chi_q(r^2 - 2v^2) \tag{1}$$

و لنبرهن أنه من أجل $g = (v,q)$ فإن $R = \varphi(g)\mu(q/g)$ حيث φ تابع أولر و μ تابع موبيوس.

من أجل $p|q$ فإن :

$$R = \prod_{p|q} R_p\ \ ;R_p = \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2 - 2v^2) \tag{2}$$

نناقش حالتين :

أولا : إذا كان $p | q/g$ فإن $(p,v) = 1$ و أن $(\frac{r^2 - 2v^2}{p}) = (\frac{2}{p})(\frac{r^2\overline{2v^2} - 1}{p})$ و بالتالي

$$R_p = \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2 - 2v^2) = (\tfrac{2}{p}) \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2\overline{2v^2} - 1) \tag{3}$$

إذا كان $(\frac{v}{p}) = -1$ فإن : $\{vr^2 - 1; 0 \le r \le p-1\} \cup \{r^2 - 1; 0 \le r \le p-1\}$ تعطينا نسختين من نظام بواقي تام بالمقاس p ، و بالتالي : $\sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(vr^2 - 1) + \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2 - 1) = \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r) = 0$ و منه نجد أن :

$$\sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(vr^2 - 1) = -\sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2 - 1) = (\tfrac{v}{p}) \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2 - 1) \tag{4}$$

أما إذا كان $(\frac{v}{p}) = 1$ فإن : $\{vr^2 - 1 \pmod p; 0 \le r \le p-1\} \equiv \{r^2 - 1 \pmod p; 0 \le r \le p-1\}$ و منه نجد أن:

$$\sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(vr^2 - 1) = (\tfrac{v}{p}) \sum_{r=0}^{p-1} \chi_p(r^2 - 1) \tag{5}$$

وحسب (4) و (5) نجد أن (3) تعطي :

$$R_p = (\tfrac{2}{p})(\tfrac{\bar{2}}{p})\sum_{r=0}^{p-1}\chi_p(r^2-1) = \sum_{r=0}^{p-1}\chi_p(r-1)\chi_p(r+1)$$
$$= \sum_{r=0, r\neq 1}^{p-1}\chi_p(\tfrac{r+1}{r-1}) = \sum_{r=0, r\neq 1}^{p-1}\chi_p(1+\tfrac{2}{r-1}) = \sum_{r=0, r\neq 1}^{p-1}\chi_p(1+2r) = -1 \qquad (6)$$

ثانيا : إذا كان $p|g$ فإن $p|v$ و منه نجد أن :

$$R_p = \sum_{r=0}^{p-1}\chi_p(r^2) = p-1 = \varphi(p) \qquad (7)$$

بدمج العلاقتين (6) و (7) و التعويض في (2) نجد أن :

$$R = \mu(\tfrac{q}{g})\varphi(g) \qquad (8)$$

بالتالي :

$$\sum_{v=0}^{q-1}B_l(\tfrac{v}{q})R = \sum_{v=0}^{q-1}B_l(\tfrac{v}{q})\mu(q/g)\varphi(g) = \sum_{g|q}\mu(\tfrac{q}{g})\varphi(g)\sum_{v=0, g=(v,q)}^{q-1}B_l(\tfrac{v}{q})$$

لنفرض أن : $V = v/g$ و أن $Q = q/g$ عندئذ :

$$\sum_{v=0}^{q-1}B_l(\tfrac{v}{q})R == \sum_{g|q}\mu(\tfrac{q}{g})\varphi(g)\sum_{V=0, (V,Q)=1}^{Q-1}B_l(\tfrac{V}{Q}) \qquad (9)$$

لنضع : $\Sigma_1 = \sum_{V=0, (V,Q)=1}^{Q-1}B_l(\tfrac{V}{Q})$ عندئذ:

$$\Sigma_1 = \sum_{V=0, (V,Q)=1}^{Q-1}B_l(\tfrac{V}{Q})\sum_{f|(V,Q)}\mu(f) = \sum_{f|Q}\mu(f)\sum_{V=0}^{Q-1}B_l(\tfrac{V}{Q}) = \sum_{f|Q}\mu(f)\sum_{V/f=0}^{Q-1}B_l(\tfrac{V/f}{Q/f}) \qquad (10)$$

وحسب الخاصة الآتية لكثيرات حدود برنولي [6] :

$$\sum_{N=0}^{k-1}B_l(t+N/k) = k^{-(l-1)}B_l(0)$$

نجد أن

$$\sum_{V/f=0}^{Q-1}B_l(\tfrac{V/f}{Q/f}) = (Q/f)^{-(l-1)}B_l(0) = Q^{-(l-1)}B_l f^{\,l-1} \qquad (11)$$

نعوض (11)في (10) فنجد:

$$\Sigma_1 = Q^{-(l-1)}B_l\sum_{f|Q}\mu(f)f^{\,l-1} = Q^{-(l-1)}B_l\prod_{p|Q}(1-p^{l-1}) \qquad (12)$$

نعوض (12) في (9) فنجد أن

$$\sum_{v=0}^{q-1} B_l(\tfrac{v}{q})R = \sum_{g|q} \mu(\tfrac{q}{g})\varphi(g)Q^{-(l-1)}B_l \prod_{p|Q}(1-p^{l-1})$$
$$= B_l q^{-(l-1)} \sum_{g|q} \varphi(g)g^{l-1}\mu(\tfrac{q}{g})\prod_{p|Q}(1-p^{l-1})$$
$$= B_l q^{-(l-1)} \prod_{p|Q}(\varphi(p)p^{l-1}-1-p^{l-1})$$
$$= B_l q^{-(l-1)} \prod_{p|Q}(p^l-1) = B_l q^{-(l-1)} \prod_{p|Q}(1-p^{-l})$$

مبرهنة مساعدة (2):

ليكن $d = 4n^2+2$ عدداً حراً من التربيع و $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. إذا كان q عدداً صحيحاً موجباً بحيث $q|n$ و $(q,2)=1$ و من أجل مميز ديريخليه فردي χ فان :

$$\zeta_{P(K)}(0,\chi) = 2n\sum_{C,D=0}^{q-1}\chi(C^2-2D^2)B_2(\tfrac{D}{q}) + 2n\sum_{C,D=0}^{q-1}\chi(D^2-2C^2)B_2(\tfrac{D}{q})$$

الإثبات:

نعلم أن $\varepsilon_d = 1-2n\overline{\alpha} > 1$ و بالتالي $0 < \overline{\varepsilon_d} = 1-2n\alpha < 1$ ، ليكن $I \in I_F(K)$ حيث $(I,q)=1$

و لنأخذ التابع زيتا :

$$\zeta_I^+(s,\chi) = \zeta_{Cl(I)}^+(s,\chi) = \sum_a \tfrac{\chi(Na)}{(Na)^s}$$

حيث المجموع مأخوذ من أجل كل الايديالات الصحيحة المكافئة للايديال I .

لدينا $N(\varepsilon_d) = +1$ عندئذ $\zeta_I(s,\chi) = \zeta_I^+(s,\chi) + \zeta_{(\alpha)I}^+(s,\chi)$ و $\zeta_{Cl(I)}^+(s,\chi) = \zeta_{Cl(I^{-1})}^+(s,\chi)$ و

أن $\zeta_{I^{-1}}^+(s,\chi) = \sum_{b\in P_1}\tfrac{\chi(N(bI^{-1}))}{(N(bI^{-1}))^s} = (N(I^{-1}))^{-s}\sum_{b\in P_1}\chi(\tfrac{N(b)}{N(I)})(N(b))^{-s}$ حيث :

$$P_1 = \{b \in P_F(K); b = (\beta) for\ some\ \beta \in I, \beta >> 0\}$$

لنأخذ

$$V = \{v\,(\mathrm{mod} q); v \in I\ and\ (v,q)=1\}$$
$$P_{I,v,q} = \{b \in P_F(K); b = (\beta) for\ some\ \beta \in I, \beta = v\,(\mathrm{mod} q), \beta >> 0\}$$

بما أن $q\,|\,n$ فإن $\varepsilon_d \equiv 1(\mathrm{mod} q)$ و بالتالي كل $p \in P_1$ معطى بالعلاقة $b = (\beta) = (\beta\overline{\varepsilon_d}^{\,j})$ ينتمي الى صف تكافؤ واحد فقط مثل $v \in V$. وبالتالي لدينا :

$$\zeta_I^+(s,\chi) = (N(I^{-1}))^{-s}\sum_{b\in P_1}\chi(\tfrac{N(b)}{N(I)})(N(b))^{-s} = (N(I^{-1}))^{-s}\sum_{v\in V}\sum_{b\in P_{I,v,q}}\chi(\tfrac{N(b)}{N(I)})(N(b))^{-s}$$

إذا أخذنا بالحسبان أن $(I,q)=1$ فإن $(N(I),q)=1$ و أن $N(b) = \beta\overline{\beta}$ عندئذ :

$$\zeta_I^+(s,\chi) = (N(I^{-1}))^{-s}\sum_{v\in V}\chi(\tfrac{v\bar{v}}{N(I)})\sum_{b\in P_{I,v,q}}((\beta\overline{\beta}))^{-s}$$

نفرض أن $(e,f); e>0, e \in \mathbb{Z}$ قاعدة للإيديال الكسري I و ليكن $0 \neq$ $e^* = e\varepsilon_+ = e + tf$ عندئذ من أجل كل ايديال رئيسي $b \in P_{I,v,q}$ يوجد عنصر واحد β بحيث : $b = (\beta) = (\beta\varepsilon_+^j); j \in \mathbb{Z}, \varepsilon_+^2 < \beta/\overline{\beta} \le 1$.

بما أن ε_+ عدد غير كسري ، فمن أجل كل عنصر $\beta \in K$ يوجد زوج وحيد $(X,Y) \in \mathbb{Q}^2$ بحيث :

$$\beta = Xe + Ye\varepsilon_+ = e(X + Y\varepsilon_+)$$

و بما أن $\overline{\beta}\varepsilon_+^2 < \beta \leq \overline{\beta}$ فأن $(X + Y\varepsilon_d)\varepsilon_+^2 < X + Y\varepsilon_+ \leq X + Y\varepsilon_d$ ومنه نجد أن $X > 0, Y \geq 0$
و بالتالي أي عنصر $p \in P_{I,v,q}$ يمثل بشكل وحيد كما يلي :

$$b = (\beta)\ \ for\ \ \beta = e(X + Y\varepsilon_+)\ with\ X > 0\ , Y \geq 0$$

نلاحظ أنه من أجل $0 \leq C, D \leq q-1$ فان العنصر $v = Ce + Df \in I$ يعطي نظام بواقي تام(بالمقاس q)،عندئذ لدينا

$$\zeta_I^+(0,\chi) = \sum_{C,D=0}^{q-1} \chi\left(\tfrac{(Ce+Df)\overline{(Ce+Df)}}{N(I)}\right) Z_{I,v,q}(0)$$

حيث $Z_{I,v,q}(0)$معطاة حسب التمهيدية (1) .

لدينا $\zeta_{P(K)}(s,\chi) = \zeta_{O_K}(s,\chi)$ و بأخذ $I = O_K = \mathbb{Z}[1,-\alpha]$ و بما أن $(O_K, q) = 1$ فحسب التمهيدية (1) نجد أن $e^* = \varepsilon_+ = 1 - 2n\overline{\alpha}$ و بالتالي:

$$t = 2n\ , N(O_K) = 1\ , v\overline{v} = (C - D\alpha)(C - D\overline{\alpha}) = C^2 + 4nCD - 2D^2, \alpha + \overline{\alpha} = -4n$$

بما أن $q \mid t$ فإن :

$$\delta = (D - tC)_q / q = D/q = d$$
$$\lceil tc - d \rceil = tc/q = tc$$
$$tr\left(\alpha / 4\varepsilon_+\right) = n$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned} Z_{O_K,v,q} &= 2nc(1-c) + \tfrac{2n}{2}(c^2 - c - \tfrac{1}{6}) + 0 + nB_2(d) \\ &= -nB_2(c) + nB_2(d) \end{aligned}$$

و منه نجد أن :

$$\begin{aligned} \zeta_I^+(0,\chi) &= \sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(c^2 - 2D^2)(-nB_2(c) + nB_2(d)) \\ &= -n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(c^2 - 2D^2)B_2(c) + n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(c^2 - 2D^2)B_2(d) \end{aligned}$$

نجري في المجموع الأول التغيير $C \leftrightarrow D$ و نأخذ بالحسبان أن$\chi(-1) = -1$ فنجد

$$\begin{aligned} \zeta_I^+(0,\chi) &= n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(-D^2 + 2C^2)B_2(d) + n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(c^2 - 2D^2)B_2(d) \\ &= n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(2C^2 - D^2)B_2(D/q) + n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(c^2 - 2D^2)B_2(D/q) \end{aligned}$$

سنحسب الأن المقدار $\zeta_{(\alpha)I}^+(0,\chi)$ و ذلك باستخدام المبرهنة المساعدة (1) :
من أجل الايديال $(\alpha)I$ لدينا

$$((\alpha)O_K, q) = 1,\ (2,q) = 1,\ \alpha\overline{\alpha} = -2$$

لنأخذ $O_K = [-\overline{\alpha}, -1]$ عندئذ: $(\alpha)O_K = \mathbb{Z}[-\alpha\overline{\alpha}, -\alpha] = \mathbb{Z}[2, -\alpha]$ و منه يكون :

$$v\bar{v} = 2(2C^2 + 4nCD - D^2)$$
$$N((\alpha)O_K) = |\alpha\bar{\alpha}| = 2$$
$$\chi(v\bar{v}/N((\alpha)O_K)) = \chi(2C^2 - D^2)$$

و منه نجد أن

$$Z_{(\alpha)O_K,v,q} = 2nc(1-c) + \tfrac{2n}{2}(c^2 - c - \tfrac{1}{6}) + 0 + nB_2(d)$$
$$= -nB_2(c) + nB_2(d)$$

و بالتالي نجد :

$$\zeta^+_{(\alpha)O_K}(0,\chi) = \sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(2C^2 - D^2)(-nB_2(c) + nB_2(d))$$
$$= -n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(c^2 - 2D^2)B_2(c) + n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(D^2 - 2C^2)B_2(d)$$

نجري في المجموع الأول التغيير $C \leftrightarrow D$ فنجد :

$$\zeta^+_{(\alpha)O_K}(0,\chi) = n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(C^2 - 2D^2)B_2(d) + n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(D^2 - 2C^2)B_2(d)$$

ومنه نجد أن :

$$\zeta_{P_K}(0,\chi) = 2n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(C^2 - 2D^2)B_2(D/q) + 2n\sum_{C,D=0}^{q-1} \chi(D^2 - 2C^2)B_2(D/q)$$

مبرهنة (1):

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d = 4n^2 + 2\ ; n \in \mathbb{N}$ و $5.359.541 | n$ عندئذ $h(d) > 1$

البرهان :

لنفرض أن $h(d) = 1$ عندئذ جميع الايديالات رئيسية ومن أجل تابع زيتا ديدكند نجد أن :

$$\zeta_K(s,\chi) = \sum_{a \in O_K} \tfrac{\chi(Na)}{(Na)^s}$$

و لدينا $\zeta_K(s,\chi) = \zeta_{P(K)}(s,\chi)$ و نعلم من 4.3 في[6] أن $\zeta_K(s,\chi) = L(s,\chi)L(s,\chi\chi_d)$ و ذلك حسب صيغة صف الأعداد للحقول التخيلية في [3] و حسب 4.3 في [6].

و بما أن $q | n\ ; q \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)\ ; \chi_q(-1) = -1$ فإن $-L(0,\chi_q) = \sum_{x=1}^{q-1} \tfrac{x}{q}\left(\tfrac{x}{q}\right) = h(-q)$

لدينا أيضا $d \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ و بالتالي $\chi_d(-1) = -1$ و منه χ_d مميز فردي ، و بالتالي $\chi_d\chi_q$ مميز زوجي و بالتالي : $L(0,\chi_q\chi_d) = -h(-qd)$.

ومنه نجد أن

$$\zeta_{P(K)}(0,\chi_q) = L(0,\chi_q)L(0,\chi_q\chi_d) = h(-q)h(-qd)$$

لنفرض أن $5.359.541 | n$ و أن $5,359,541 < n$ عندئذ $h(d) = 1$ فقط إذا كان $(\tfrac{2}{5}) = (\tfrac{2}{359}) = (\tfrac{2}{541}) = -1$ لنأخذ الوسيط $q = 5.359.541$ عندئذ $\chi_q(-1) = -1$ و حسب المبرهنة (1) نجد أن

$$qh(-q)h(-qd) = \tfrac{4}{6}n\prod(p^2 - 1)$$

لنأخذ $B=\frac{4}{6}n\prod_{p|q}(p^2-1)=2^{11}(294692175)$ عندئذ : $2^{11}\,|\,B$

لنفرض أن n عدد فردي عندئذ : $2n^2+1\equiv 3(mod\ 4)$ و لدينا $h(-qd)=2^4\ ;\ h(-q)=2^9$ و هذا تناقض لأن الطرف الأيمن يقبل القسمة على 2^{13} .

الاستنتاجات والتوصيات:

إنّ أهم النتائج التي توصلنا إليها هي :

- دراسة زمرة صفوف تكافؤ الايديالات للحقول التربيعية $K=\mathbb{Q}(\sqrt{4n^2+2})$ حيث $(5)(359)(541)\,|\,n$ والبرهان أن الرتبة أكبر من 1.
- حساب قيمة غاوس المعممة للحقل K.
- حساب قيمة التابع زيتا عند النقطة 0.

ونوصي بالاستفادة من هذه النتائج و استخدام هذه الطريقة في دراسة رتبة الزمرة الحقول التربيعية من نمط Rechaud−Degert .

المراجع:

[1] BIR´O,A .*Chowla's conjecture*, Acta Arith. 107 (2003), no. 2, 179–194 .

[2] BIR´O,A ; Granville ,A. *Zeta function for ideal classes in real quadratic fields, at s=0*, J. Number Theory *Volume 132, Issue 8, August 2012, Pages 1807-1829* .

[3] HECKE ,E. *Lectures on the Theory of Algebraic Numbers*, Springer, 1981 .

[4] LEE,J. *The complete determination of wide Richaud-Degert types which are not 5 modulo 8 with class number one*, Acta Arith. 140 (2009), no. 1, 1–29 .

[5] LAPKOVA ,K. *Class number one problem for real quadratic fields of certain type*, Acta Arith.153 (2012), no.3, 281-298 .

[6] WASHINGTON,L.C. *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer, 1996 .