مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

الزمر التبولوجية وزمر لي واستخدام بعض خواصها لمعالجة بعض المسائل الرياضية

الدكتور أحمد الغصين*
الدكتور زياد قناية**
سلوى يعقوب***

(تاريخ الإيداع 5 / 5 / 2015. قبل للنشر في 8 / 7 / 2015)

□ ملخّص □

نشير أولاً إلى أنّه في هذا المقال جميع الزمر التبولوجية الواردة في السياق هي منطويات تفاضلية تبولوجية ومعظم هذه المنطويات التفاضلية المستخدمة هي مجموعات جزئية مغلقة. الهدف من هذا المقال هو التعرّف على بعض خواص الزمر التبولوجية وزمر لي التي تسهل لنا حل العديد من المسائل الرياضية في هذا المجال وخاصةً بعض المسائل المفتوحة في هذا السياق، وذلك من خلال الفضاءات التبولوجية التي تتصف بصفات محددة كالفضاءات المتراصة والطبيعية والمنتظمة وفضاءات لندلوف وكذلك الفضاءات المترابطة والقابلة للفصل والفضاءات صفرية_البعد والمشكّلة على الزمر التبولوجية. فقد استطعنا إثبات صحة المبرهنة: لتكن $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X، حيث منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ ويشكّل أيضاً فضاءً صفري _ البعد في $I(X)$، عندئذٍ $I(X)$ يكون فضاءً صفري _ البعد وحر جبرياً. وكذلك استطعنا إثبات غيرها من المبرهنات في هذا المقال.

رقم التصنيف الرياضي العالمي لعام 2010: 20N25, 22F30, 54H11, 22A05.

الكلمات المفتاحية: الزمرة التبولوجية، الزمرة التبولوجية الحرّة، زمرة لي، زمرة لي الضبابية.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كليّة العلوم –جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كليّة العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** طالبة دكتوراه – قسم الرياضيات – كليّة العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

Topological groups and Lie groups and using some of its properties for solution some of mathematical problems

Dr. Ahmad Alghoussein*
Dr. Ziad kanaya**
Salwa yacoub***

(Received 5 / 5 / 2015. Accepted 8 / 7 /2015)

☐ ABSTRACT ☐

Throughout this paper all Topological groups are assumed to be Topological differential manifolds and all of this are closed sub sets. The aim of this paper is to use some properties of Topological groups and Lie groups which help us to solution some of the open mathematical problem in this way, that is by study these groups on some spaces as a compact space, normal space, regular space, lindelÖf space, connected space, separable space and Zero- dimensional space, So we can prove on the theorem: If X is a Zero-dimensional closed sub manifold then the free Topological group $I(X)$ is Zero-dimensional and algebraically free. also we can prove on the other results showed in this paper.

2010 mathematics subject classification: 22A05, 54H11, 22F30, 20N25.

Keywords: Topological group, Free topological group, Lie group, Fuzzy Lie group.

***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**
****Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**
*****Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Tishreen, Lattakia, Syria.**

مقدّمة:

تطورت الدراسة في بعض خصائص الزمر التبولوجية وزمر لي حيث عمل الكثير من الباحثين في هذا المجال منهم: Markov الذي برهن أنّه من أجل أي فضاء تيخونوف X توجد زمرة تبولوجية $F(X)$، جبرية حرّة (بالمعنى الجبري) تيخونوف ووحيدة. كما برهن Pfister أنّ أي شبه زمرة تبولوجية متراصة عدّياً ومنتظمة تكون زمرة تبولوجية ، ومن المعلوم من [10,7] أيضاً أنّه إذا كان X فضاءً دالياً هاوسدورف عندئذٍ نصف الزمرة التبولوجية العكوسه $I(X)$ تكون فضاءً دالياً هاوسدورف وتكون جبرية حرّة ، وإذا كان X فضاءً غير مترابط كلّياً عندئذٍ تكون $I(X)$ كذلك. حديثاً وفي الآونة الأخيرة في عام 2010 تمّت دراسة زمر تبولوجية جديدة لِ لندلوف[15]، كما دُرست أيضاً في عام 2013 بعض الخواص العامة المترية لشبه الزمر التبولوجية الحرّة في [10]. وأيضاً قام Jean Gallier في عام 2013 بدراسة تطبيقات لبعض خواص زمرة لي في الهندسة التفاضلية وقد استفاد من ذلك بحل العديد من المسائل في هذا المجال [8].

في الآونة الأخيرة هناك محاولات عديدة لتحويل الدراسة السابقة للزمر التبولوجية وزمر لي وذلك باستخدام المجموعات الضبابية التي ظهرت فكرتها على يد الباحث الإيراني Zadeh عام1965 الذي أدخل مفهوم المجموعات الضبابية والعمليات على المجموعات الضبابية، تبعه باحثون آخرون أضافوا قواعد جديدة على التبولوجية العادية للمجموعات الضبابية وطوروا نظرية الفضاءات التبولوجية الضبابية خلال الفترة 1968−1976. كما قام الباحث Rosenfeld في عام1971 بتحديد صيغة العناصر في نظرية الزمر الضبابية.

أهمية البحث وأهدافه:

يرمي البحث إلى استخدام بعض خصائص الزمر التبولوجية وزمر لي وتحديد بعض الشروط وذلك لتعيين بعض الصفوف من الفضاءات التبولوجية التي تساعدنا في حل المسألتين مجال دراستنا [7].

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقتنا في هذا البحث على الاستفادة من بعض خصائص الزمر التبولوجية وزمر لي وكذلك على بعض الخصائص للفضاءات التبولوجية المبنية عليها تلك الزمر.

1 - الزمرة التبولوجية – زمرة لي:

قبل البدء بإعطاء تعريف زمرة لي لا بد من ذكر أهم النقاط الرئيسية في مكونات التعريف:

– خارطة Chart جوار النقطة m هي الثنائية (U,φ) حيث U جوار النقطة m و $\varphi:U \to \mathbb{R}^n$ تشاكل مستمر من الجوار U على مجموعة جزئية مفتوحة من الفضاء $\mathbb{R}^n$. إنّ مجموعة الخرائط المتوافقة فيما بينها والتي تغطي المنطوي M تدعى أطلساً Atlas على M. إذا كان الفضاء التبولوجي M هو فضاء هاوسدورف ذو n بعداً ويتمتع بقابلية العد الثانية وكان من أجل كل نقطة $m \in M$ توجد خارطة ذات n بعداً في جوار النقطة m عندئذٍ يدعى M منطوياً تفاضلياً تبولوجياً Topological differential manifold. وإنّ الدوال $\varphi_j :U \to R^1$ تسمى نظاماً إحداثياً محدداً بالخارطة (U,φ)، تنقل دراسة المنطوي إلى الفضاء $\mathbb{R}^n$، حيث أنّ معظم المفاهيم للاستمرار والاشتقاق والتفاضل سهلة الدراسة في $\mathbb{R}^n$ [17,16,8].

– يقال عن خارطتين (U,ϕ) , (V,ψ) إنّهما $C^\infty-$ متوافقتان إذا كانت الدالة:

$$\phi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\phi(U\cap V)$$

أو :

$$\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

من النمط C^{∞} ودفيومرفيزم.

كما يقال عن المنطوي M إنّه منطوياً أملساً(smooth manifold) إذا كان منطوياً تبولوجياً مع أطلس أعظمي $F=\{f_{\alpha}:U_{\alpha}\to V_{\alpha}\}$(قابل للمفاضلة عدداً اختيارياً من المرات) ويدعى بنية تفاضلية حيث $\Omega=\{U_{\alpha}\ ;\ \alpha\in A\}$ تغطية مفتوحة لـ M و $U_{\alpha}\cap U_{\beta}\neq\varnothing$ ، حيث $f_{\beta}\circ f_{\alpha}^{-1}:f_{\alpha}(U_{\alpha}\cap U_{\beta})\to f_{\beta}(U_{\alpha}\cap U_{\beta})$ دفيومرفيزم [17,16,8].

مثال (1): لتكن $M=R$ ولنعرّف على المنطوي R الخارطتين الآتيتين:

$$\left(U_1,\varphi_1\right),\left(U_2,\varphi_2\right)$$

حيث $U_1=U_2=M$ وأيضاً:

$$\varphi_1(t)=t\ ,\ \varphi_2(t)=\begin{cases}t\ ,\ t\geq 1\\ 2t\ ,\ t<1\end{cases}$$

وبالتالي:

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:R^1\to R^1\ ;\ t\to\begin{cases}t,t\geq 1\\ 2t,t<1\end{cases}$$

إن هذه الدالة غير مستمرة وبالتالي الخارطتان $\left(U_1,\varphi_1\right),\left(U_2,\varphi_2\right)$ غير متوافقتين وكل منهما يحدد أطلساً أعظمياً.

إذا بدلنا $\varphi_2(t)$ بـِ :

$$\varphi_3(t)=\begin{cases}t^2+t\ ,\ t\geq 0\\ t\ ,\ t<0\end{cases}$$

عندئذٍ الخارطتان $\left(U_1,\varphi_1\right),\left(U_3,\varphi_3\right)$ متوافقتان.

مبرهنة1.1[2،P 237]: بفرض M منطوي تفاضلي تبولوجي مترابط ولتكن $\varnothing\neq N\subseteq M$ مجموعة جزئية مغلقة في M وبنفس الوقت منطوي تفاضلي جزئي من M، عندئذٍ إذا كان $\dim M=\dim N$ فإنّ $M=N$.

تعريف1.1[1]: لتكن G زمرة ولتكن $S\subset G$. المجموعة S تدعى مجموعة حرّة مولّدة للزمرة G إذا كان كل تطبيق $S\to H$ حيث H أي زمرة اختيارية، يمكن تمديده بطريقة وحيدة فقط إلى تشاكل $G\to H$.

باختصار G تدعى زمرة حرّة إذا كانت تملك مجموعة مولّدة حرّة.

تعريف2.1[16,14,8,7,2]: الزمرة التبولوجية Topological group هي مجموعة غير خالية G بحيث تتحقق الشروط الآتية:

1 - $(G,\circ)$ زمرة (بالمعنى الجبري)

2 - (G,τ) فضاء تبولوجي

3 - التطبيق $f:G\times G\to G;(x,y)\mapsto x\circ y$ مستمر.

4 - التطبيق $f:G\to G;x\mapsto x^{-1}$ مستمر.

ويمكن التعبير عن الشرطين الثالث والرابع بالشكل المكافئ: $f:G\times G\to G;(x,y)\mapsto x\circ y^{-1}$

يقال عن G إنّها نصف زمرة تبولوجية Semi topological group إذا كان f في الشرط الثالث مستمراً انفصالياً كما يقال عن G إنّها نصف زمرة تبولوجية عكوسه Topological inverse semi group إذا كانت G فضاء تبولوجياً هاوسدورف وتطبيق الجداء والمعكوس مستمرين و لكل عنصر $x \in G$ نظير وحيد $x^* \in G$. تدعى الزمرة G المزوّدة بالتبولوجية τ شبه زمرة تبولوجية Para topological group إذا كان تطبيق الجداء مستمراً.

تعريف3.[10,7]: لتكن G زمرة تبولوجية وليكن X فضاء جزئياً مولّداً للزمرة G ، عندئذٍ الثنائية (G,i) المؤلّفة من الزمرة التبولوجية G والتطبيق المتباين تبولوجياً $i: X \longrightarrow G$ تدعى زمرة تبولوجية حرّة Free topological group على X إذا كان من أجل أي تطبيق $f: X \to H$ ، حيث H زمرة تبولوجية، يوجد هومورفيزم وحيد $\bar{f}: G \to H$ بحيث يكون $f = \bar{f} \circ i$ ، كما تدعى الثنائية (G,i) نصف زمرة تبولوجية حرّة على X (أو شبه زمرة تبولوجية حرّة على X) إذا كان كل من G و H نصف زمرة تبولوجية (أو شبه زمرة تبولوجية). ويرمز $I(X)$ للزمرة التبولوجية الحرّة على X.

مثال (2): $GL(n,R)$ مجموعة جميع المصفوفات الحقيقية المربعة القابلة للقلب (غير الشاذة) والتي تدعى بالزمرة الخطية العامة تكون زمرة تبولوجية بالنسبة لعملية جداء المصفوفات، وبنفس الوقت تكون منطوياً تبولوجياً ذو n^2 بعداً. وبشكل مشابه $GL(n,\mathbb{C})$ مجموعة جميع المصفوفات العقدية المربعة القابلة للقلب بالنسبة لعملية جداء المصفوفات تشكل زمرة تبولوجية، كما تكون منطوياً تبولوجياً ذو $2n^2$ بعداً.

تعريف4.[16,14,8,7,2]: لتكن G و H زمرتين تبولوجيتين وليكن $f: G \to H$ تابعاً:

- يدعى f هومومرفيزم زمر تبولوجية إذا كان هومومرفيزم زمر جبرية ومستمراً.
- ويدعى إيزومورفيزم زمر تبولوجية إذا كان إيزمورفيزم زمر جبرية وتشاكلاً مستمراً.

– ومن المعلوم أنّ كل زمرة تبولوجية تكون فضاء متجانساً ومنتظماً تماماً، وكذلك كل زمرة جزئية من الزمر التبولوجية إمّا داخليتها خالية أو تكون مغلقة ومفتوحة بآن واحد، كما أنّ كل زمرة جزئية مفتوحة في G تكون مغلقة وكذلك كل زمرة تبولوجية حرّة تكون زمرة تبولوجية [16,14,8,7,2].

تعريف5.[16,8,2]: يقال عن المجموعة G إنّها تشكل زمرة لي(Lie group) إذا كانت تحقق:

1 - G زمرة تبولوجية

2 - G منطوي تفاضلي (منطوي أملس من الصنف C^∞)

3 - التطبيق $\mu: G \times G \to G \,;\, (g,h) \mapsto g \circ h^{-1}$ أملس (مستمر وقابل للمفاضلة عدد لانهائي من المرات)

تعريف6.[16,8,2]: لتكن G و H زمرتي لي وليكن التطبيق $\varphi: G \to H$ ، يدعى φ هومومرفيزم زمر لي إذا كان هومومرفيزم زمر جبرية وأملساً. ويدعى إيزومورفيزم بين زمرتي لي إذا كان هومومرفيزماً بين زمرتي لي وتقابلاً والتطبيق العكسي له أيضاً هومومرفيزم بين زمرتي لي لذلك فهو دفيومرفيزم.

مبرهنة2.[16,8,2]: إذا كانت G زمرة لي و H زمرة جزئية في Gعندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان:

1− H مغلقة بالمعنى التبولوجي.

2− H منطوي جزئي.

- ومن المعلوم من خواص زمرة لي أنّ كل زمرة لي جزئية H من زمرة لي G هي زمرة لي، كما أنّ كل زمرة جزئية مغلقة في زمرة لي G هي زمرة لي، كذلك الجداء لزمرتي لي $G \times G$ هو زمرة لي مع تبولوجيا الجداء. ومن

المعلوم أيضاً أنّ زمرة لي (أو الزمرة التبولوجية) تأخذ تسميتها من الفضاء التبولوجي المُبنى عليها. فنقول مثلاً أنّ زمرة لي متراصة إذا كان الفضاء التبولوجي متراصاً، مترابطة إذا كان الفضاء مترابطاً، صفرية –البعد إذا كان الفضاء صفري–البعد وهكذا...[16,8,2].

مثال(3):

$GL(n,R)$– مجموعة جميع المصفوفات الحقيقية المربعة القابلة للقلب (غير الشاذة) والتي تدعى بالزمرة الخطية العامة تكون زمرة لي بالنسبة لعملية جداء المصفوفات.

$SL(n,R)$– مجموعة جميع المصفوفات الحقيقية المربعة القابلة للقلب والتي محددها يساوي الواحد تكون زمرة جزئية من الزمرة $GL(n,R)$ بالنسبة لعملية جداء المصفوفات، كما أنّها تشكّل أيضاً زمرة لي مترابطة ومتراصة[12,5,2].

– **المجموعات الضبابية:**

تعريف7.[13,9,6]: لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $I=[0,1]$، نعرّف المجموعة الضبابية (Fuzzy set) μ من X بأنّها الدالة $\mu: X \to I$ التي تربط كل عنصر في X بعدد حقيقي يقع ضمن المجال $I=[0,1]$. ويرمز بِ $I^{\times}$ لمجموعة كل الدوال $\mu: X \to I$، كما يرمز بِ $\mu(x)$ لدرجة انتماء العنصر x إلى المجموعة الضبابية μ.

مثال(4): لتكن المجموعة $X=\{1,2,3,4,5\}$ عندئذٍ يمكن تكوين مجموعة ضبابية μ على الشكل الآتي:

$$\mu=\left\{(1,0),\ (2,1),\ \left(3,\frac{1}{2}\right),(4,0),\left(5,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

تعريف8.[13,9,6]: النقطة الضبابية (Fuzzy point) x_p تعني المجموعة الضبابية من X التي تأخذ القيمة p عند النقطة x والقيمة 0 فيما عدا ذلك، حيث $p\in[0,1]$ و $x\in X$.

تعريف9.[13,9,6]: إذا كان $\lambda\in I^{\times}$ و $\mu\in I^{Y}$ عندئذٍ $\lambda\times\mu\in I^{X\times Y}$ حيث:

$$(\lambda\times\mu)(x,y)=\min\{\ \lambda(x)\ ,\ \mu(y)\ \},\ \forall(x,y)\in X\times Y.$$

تعريف 10. [6,9,13]: لتكن G زمرة نقول عن I^{G} إنّها زمرة جزئية ضبابية (Fuzzy subgroup) من G إذا تحقق:

$$1)\ \mu(x\circ y)\geq\min\{\mu(x),\mu(y)\}$$

$$2)\ \mu(x^{-1})\ \geq\mu(x)\ ;\ \forall x,y\in G$$

يمكن التعبير عن الشرطين السابقين بالشكل:

$$\mu(x\circ y^{-1})\ \geq\min\{\mu(x),\mu(y)\}$$

ومن المعلوم أنَّه ليست كل زمرة هي زمرة جزئية ضبابية.

مثال(5) : إذا كانت لدينا الزمرة:

$$G:=\mathbb{Z}_5^{*}=\{1,2,3,4\}$$

وكانت لدينا المجموعة الضبابية:

$$\mu=\left\{(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{3}{4}\right),(4,1)\right\}$$

فإنّ هذه المجموعة الضبابية ليست زمرة جزئية ضبابية.

النتائج والمناقشة:

استناداً لما تقدّم من تعاريف ومبرهنات أساسية تمّ إثبات النتائج الآتية:

- ليكن P صفاً من الفضاءات التبولوجية، ونظراً لتعدد هذه الفضاءات فقد تمّت المناقشة وفق المبرهنات الآتية، والتي تعطي حلولاً للمسائل المفتوحة المطروحة في المقال [7]، وخاصةً المسألتين رقم (7) و(8).

مبرهنة(3): لتكن $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X، حيث X منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ من الصف P ويشكّل أيضاً فضاءً صفري _ البعد في $I(X)$، عندئذٍ $I(X)$ يكون فضاءً صفري _ البعد.

البرهان:

من الفرض X منطوي جزئي مغلق في $I(X)$، وهو أيضاً مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء $I(X)$، حيث كل نقطة منه تنتمي إلى مجموعة جزئية مفتوحة في $I(X)$محتواة في X، ولدينا فرضاً أنّ X فضاء صفري _ البعد ،إذاً فهو يملك قاعدة من الشكل $\{(A_\alpha \cap X)\}_{\alpha\in I}$ عناصرها مجموعات مغلقة ومفتوحة بآن واحد في X بحسب[12,11,4] ، وحيث $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ قاعدة لِ $I(X)$، ومن المعلوم من [12,5] أنّ المجموعة $A_\alpha \cap X$ تكون مفتوحة (مغلقة) بآن واحد في X إذا وفقط إذا كانت A_α مجموعة مفتوحة (مغلقة) في $I(X)$، ومنه عناصر القاعدة في $I(X)$تكون مجموعات مغلقة ومفتوحة بآن واحد وبالتالي $I(X)$ فضاء صفري _ البعد.

مبرهنة(4): إذا كانت $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X من الصف P مترابطة وتيخونوف و هوميومورفية مع الزمرة التبولوجية الحرّة $I(Y)$ على الفضاء التبولوجي Y ، حيث كل من Xو Yمنطوي جزئي مغلق في $I(X)$ و $I(Y)$ على الترتيب، عندئذٍ يكون: $Y \in P$، X.

البرهان:

بحسب الفرض X منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ وحيث أنّه أيضاً مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء $I(X)$ كما بينّا سابقاً في المبرهنة (3)، وبما أن $I(X)$ فضاء مترابط فإنّ المجموعتين المفتوحتين والمغلقتين فيه هما $I(X)$و $\varnothing$ بحسب [12,5]، وبحسب المبرهنة(1) فإنّ $X = I(X)$، ومنه $X \in P$. ولدينا أيضاً $I(X)$ فضاء لتيخونوف إذاً فهو T_1- فضاء، وبما أنّ هذه الصفة هي صفة تبولوجية إذاً الفضاء التبولوجي $I(Y)$ الهوميومورفي معه يكون أيضاً T_1 – فضاء وهو أيضاً فضاءً منتظماً تماماً بحسب خواص الزمر التبولوجية [14]، وبالتالي $I(Y)$ فضاءً لتيخونوف وكذلك فضاءً مترابطاً من كون هذه الصفة هي أيضاً صفة تبولوجية. ومن ناحية ثانية، الفضاء الجزئي Y هو أيضاً مجموعة مغلقة ومفتوحة بآن واحد في $I(Y)$ (كما وجدنا في المبرهنة السابقة) ، وبماأنّ $I(Y)$ فضاءً مترابطاً، فبحسب ما سيق مسبقاً في الجزء الأول من هذا البرهان، فإنّ $Y = I(Y)$ ، ومنه $Y \in P$.

مبرهنة(5): لتكن $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X من الصف P قابلة للفصل وتيخونوف و هوميومورفية مع الزمرة التبولوجية الحرّة $I(Y)$ على الفضاء التبولوجي Y ، حيث كل من Xو Y منطوي جزئي من $I(X)$ و $I(Y)$ على الترتيب، عندئذٍ كل من $X \ , Y \in P$.

البرهان:

وجدنا في المبرهنة(3) أنّ المنطوي الجزئي X يكون مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء القابل للفصل $I(X)$، إذاً وبحسب[12,5] فإنّ الفضاء الجزئي X يكون فضاءً قابلاً للفصل و أيضاً فضاءً لتيخونوف، من كون هذه الصفة هي صفة وراثية بحسب[12,3]، ومنه $X \in P$. وبما أنّ الفضاء $I(X)$ هوميومورفياً مع الفضاء $I(Y)$، فإنّ التطبيق $f : I(X) \longrightarrow I(Y)$ يكون مستمراً وغامراً وبالتالي الفضاء $I(Y)$يكون فضاءً قابلاً للفصل من كون $I(X)$

فضاءً قابلاً للفصل بحسب [12,5]، وكذلك $I(X)$ فضاءً لتيخونوف، إذاً فهو T_1- فضاء وبالتالي الفضاء الهوميومورفي معه $I(Y)$ يكون T_1- فضاء أيضاً من كون هذه الصفة هي صفة تبولوجية، وأيضاً $I(Y)$ فضاءً منتظماً تماماً بحسب خواص الزمر التبولوجية [14]، وبالتالي $I(Y)$ يكون فضاءً لتيخونوف، وبطريقة مشابهة للجزء الأول من هذا البرهان فإنّ الفضاء الجزئي منه Y يكون أيضاً فضاءً لتيخونوف و قابلاً للفصل، وبالتالي $Y \in P$.

<u>مبرهنة(6)</u>: إذا كانت $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X من الصف P متراصة وقابلة للفصل وهوميومورفية مع الزمرة التبولوجية الحرّة $I(Y)$ على الفضاء التبولوجي Y، حيث كل من X و Y منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ و $I(Y)$ على الترتيب، عندئذٍ: $X, Y \in P$.

<u>البرهان</u>:

ليكن التطبيق $f: I(X) \longrightarrow I(Y)$ هوميومورفيزماً من الفضاء $I(X)$ على الفضاء التبولوجي $I(Y)$. من الفرض X منطوي جزئي من المنطوي التبولوجي $I(X)$، وحيث أنّه أيضاً (وكما وجدنا سابقا في المبرهنة (3)) يكون مجموعة جزئية مغلقة ومفتوحة أيضاً في $I(X)$. علاوة على ذلك X مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص $I(X)$، فحسب [12,5] تكون مجموعة متراصة وبالتالي الفضاء الجزئي X يكون فضاء متراصاً، وكذلك X مجموعة مفتوحة في الفضاء القابل للفصل $I(X)$ إذاً بحسب [12,5] فإنّ الفضاء الجزئي X يكون فضاءً قابلاً للفصل أيضاً ومنه $X \in P$. وبما أنّ f تطبيقاً مستمراً وغامراً فرضاً فإن $I(Y)$ يكون فضاءً متراصاً وأيضاً قابلاً للفصل استناداً لِ [12,5]، وكذلك بما أنّ Y مجموعة مفتوحة في الفضاء القابل للفصل $I(Y)$ (كما وجدنا في المبرهنة (3))، فإنّ الفضاء الجزئي منه Y يكون فضاءً قابلاً للفصل ومتراصاً أيضاً من كون Y مجموعة مغلقة في الفضاء المتراص $I(Y)$ فرضاً، وبالتالي $Y \in P$.

<u>مبرهنة(7)</u>: بفرض $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X من الصف P متراصة و لندلوف وهوميومورفية مع الزمرة التبولوجية الحرّة $I(Y)$ على الفضاء التبولوجي Y، وبفرض كل من X و Y منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ و $I(Y)$ على الترتيب، عندئذٍ يكون: $X, Y \in P$.

<u>البرهان</u>:

بما أنّ X منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ فرضاً، وبما أنّ أي فضاء جزئي يُبنى على مجموعة جزئية مغلقة في فضاء متراص(أو لندلوف) يكون فضاءً متراصاً(أو لندلوف)، فإنّ الفضاء الجزئي X يكون فضاءً متراصاً و لندلوف بحسب[12,5,3]، ولدينا من الفرض أيضاً أنّ التطبيقَ $f: I(X) \longrightarrow I(Y)$ هوميومورفيزم من الفضاء الجزئي $I(X)$ على الفضاء الجزئي التبولوجي $I(Y)$ إذاً فهو مستمر وغامر وبالتالي الفضاء $I(Y)$ يكون فضاءً متراصاً و لندلوف بحسب [5، 15,12]، وبطريقة مشابهة لما سبق في هذا البرهان فإنّ الفضاء الجزئي Y من الفضاء $I(Y)$ يكون فضاء متراصاً ولندلوف، حيث Y منطوي جزئي مغلق في $I(Y)$ فرضاً، ومنه $Y \in P$.

<u>مبرهنة(8)</u>: إذا كانت $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X من الصف P متراصة وطبيعية و هوميومورفية مع الزمرة التبولوجية الحرّة $I(Y)$ على الفضاء التبولوجية Y حيث كل من X و Y منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ و $I(Y)$ على الترتيب، عندئذٍ: $X, Y \in P$.

<u>البرهان</u>:

من الفرض X منطوي جزئي من المنطوي التفاضلي التبولوجي $I(X)$ وحيث أنّه أيضاً مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء المتراص $I(X)$ فبحسب[12,5]، تكون مجموعة متراصة وبالتالي الفضاء الجزئي X يكون فضاءً متراصاً

وطبيعياً أيضاً استناداً لِـ [12,5]، ومنه $X \in P$. وبما أنَّ التطبيق $f : I(X) \longrightarrow I(Y)$ هوميومورفيزماً من الفضاء الجزئي $I(X)$ على الفضاء الجزئي التبولوجي $I(Y)$ إذاً فهو مستمراً وغامراً وبالتالي فإنّ $I(Y)$ يكون فضاءً متراصاً أيضاً، وبما أنّ كل من الزمرتين $I(X)$ و $I(Y)$ هي زمرة تبولوجية، فحسب خواص الزمر التبولوجية يكون كلاً منهما فضاءً منتظماً تماماً وبالتالي فهو فضاءٌ منتظمٌ، وبماأنّ الفضاء المنتظم والمتراص يكون فضاءً طبيعياً[12,5]، إذاً كلٌّ من الفضائيين $I(X)$ و $I(Y)$ يكون فضاءً طبيعياً وبالتالي الفضاء الجزئي Y (بطريقة مشابهة لما سبق في هذا البرهان) يكون فضاءً متراصاً وطبيعياً أيضاً لكونه مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء $I(Y)$ ومنه $Y \in P$.

__ملاحظة(1)__: إنّ المبرهنة (8) تبقى صحيحة إذا كان P صفاً من الفضاءات المتراصة والمنتظمة.

__مبرهنة(9)__: لتكن $I(X)$ زمرة تبولوجية حرّة على X من الصف P فضاءً لِ لندلوف وطبيعية وهوميومورفية مع الزمرة التبولوجية الحرّة $I(Y)$ على الفضاء التبولوجية Y حيث كل من X و Y منطوي جزئي مغلق في $I(X)$ و $I(Y)$ على الترتيب، عندئذٍ: $X , Y \in P$.

__البرهان:__

لدينا فرضاً أنّ X مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي $I(X)$ إذاً بحسب [15,12,3] يكون الفضاء التبولوجي الجزئي X فضاء لندلوف وطبيعياً أيضاً ومنه $X \in P$. وكذلك لدينا التطبيق $f : I(X) \longrightarrow I(Y)$ هوميومورفيزمٌ من الفضاء التبولوجي $I(X)$ على الفضاء التبولوجي $I(Y)$ فرضاً، إذاً فهو مستمر وغامر وبالتالي بحسب [12,5] يكون الفضاء الجزئي Yفضاء لندلوف أيضاً. ومن ناحية ثانية، إنّ $I(Y)$يكون فضاءً منتظماً وذلك بحسب خواص الزمر التبولوجية، مما سبق وبحسب المبرهنة(16.25) [P256, 12]، ينتج أن $I(Y)$يكون أيضاً فضاءً طبيعياً، وبالتالي الفضاء الجزئي منه Y (بحسب ما سيق في الجزء الأول من هذا البرهان) يكون فضاء لندلوف وطبيعياً بآن واحد، حيث Y مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء $I(Y)$ فرضاً، إذاً $Y \in P$.

__ملاحظة(2)__: إنَّ المبرهنة (9) أيضاً تبقى صحيحة إذا كان P صفاً من الفضاءات التبولوجية تتمتع بأنّها فضاءات لندلوف ومنتظمة بآن واحد.

- هذا ويمكن تعميم بعض خصائص الزمر التبولوجية إلى زمر لي:

__مبرهنة(10)__: بفرض G_1 زمرة لي متراصة و G_2 زمرة لي لندلوف وبفرض H و F زمرتا لي جزئيتان من G_1 و G_2 على الترتيب، عندئذٍ $F \times H$ تكون زمرة لي لندلوف و طبيعية.

__البرهان:__

من المعلوم أنّ أي زمرة لي جزئية من زمرة لي هي زمرة لي استناداً لِـ [16,8,2] وبالتالي فإنّ $F \times H$ تكون أيضاً زمرة لي بحسب [16,8,2]، وكما أنّ كلاً منهما يكون منطوياً جزئياً مغلقاً في G_1 و G_2 على الترتيب بحسب المبرهنة(2)، وبما أنّ المجموعة المغلقة في الفضاء المتراص تكون مجموعة متراصة إذاً H تكون فضاء متراصاً ، وكذلك أي فضاء جزئي يُبنى على مجموعة جزئية مغلقة في فضاء لندلوف يكون فضاءً لِ لندلوف أيضاً، إذاً F فضاء لِ لندلوف، وبحسب المبرهنة(16.23)[255 P, 12] يكون $F \times H$ فضاء لِ لندلوف، ومن المعلوم من خواص الزمر التبولوجية أنّ $F \times H$ يكون فضاءً منتظماً تماماً أيضاً وبالتالي فهو فضاء منتظم، وبما أنَّ أي فضاء لِ لندلوف ومنتظم يكون فضاءً طبيعياً، فأنّ $F \times H$ يكون فضاءً طبيعياً.

__مبرهنة(11)__: لتكن G زمرة لي، ولتكن μ نقطة ضبابية من G، عندئذٍ الجداء $\mu \times \mu$ يكون أيضاً نقطة ضبابية من زمرة لي $G \times G$.

البرهان:

بما أنّ μ نقطة ضبابية من G، فبحسب تعريف النقطة الضبابية فإنّه توجد نقطة ضبابية $x \in G$ بحيث:

$$f(x)=p\neq 0 ، f(y)=0 \;\; ; \;\; \forall y\neq x\in G \quad , p\in]0,1]$$

وبما أنّ الجداء لمجموعتين ضبابيتين هو مجموعة ضبابية من $G\times G$ بحسب[13,P 2]، حيث $G\times G$ هي أيضاً زمرة لي مع تبولوجيا الجداء بحسب [16,2]، فإنّه من أجل أي نقطة $(x,y)\in G\times G$ يكون:

$$(\mu\times\mu)(x,y)=\min\{\mu(x),\mu(y)\}=0 \;\; ; \;\; \forall\, x\neq y\in G$$

وكذلك:

$$(\mu\times\mu)(x,x)=\min\{\mu(x),\mu(x)\}=p\neq 0$$

وبالتالي بحسب تعريف النقطة الضبابية فإنّ المجموعة الضبابية $\mu\times\mu$ تكون نقطة ضبابية.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تمّ في هذا البحث تعيين بعض الصفوف من الفضاءات التبولوجية والتي تساعدنا في حل بعض المسائل الرياضية المفتوحة، كما تمّت دراسة بعض الخواص لزمر لي.

نوصي بمتابعة البحث في زمر لي الضبابية، وذلك من خلال تعميم المبرهنات على فضاءات جديدة وبشروط مختلفة، علماً أنّه ليست كل زمرة لي هي زمرة لي ضبابية.

المراجع:

[1] ANDRZEJ, B. *Zarys algebry*. BM. tom 63, Warszawa, 1987, 479P.

[2] BAKER, A. *Matrix group: An introduction to lie group theory*. Springer – verlag, London, 2002, 330P.

[3] BESHIMOV, R. B. *Hereditary properties of Hyperspaces*. Tashkent, vol.16, no.1, 2010, PP. 1-5.

[4] DI CONCILIO, A. *Group action on zero- dimensional spaces*. University of Salerno, 2007, PP. 2051-2055.

[5] ENGELKING, R ؛ SIEKLAK, K. *wstep do to topology*. BIBIOTEKA MATEMATYCZNA. tom 62, Warszawa, 1986, 458P.

[6] FOSTER, D. H. *Fuzzy Topological Groups*, Keele, England, Vol. 67, No. 2, 1979, pp. 549-563.

[7] GURAN, I. *some open problems in the theory of Topological groups and semi groups*. Mathematychnistudii, v.10, 1998, PP. 223-225.

[8] GALLIER, J. *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*. University of Pennsylvania, 2013, 666P.

[9] KHAN, F ؛ SARMIN, N ؛ KHAN, A. *Some Study of (α,β) – Fuzzy ideals in ordered semi groups*, Annals of Fuzzy Math, Vol. 3, No. 2, 2012, PP. 213-227.

[10] LIN, F. *A Note on free Para topological groups*. arxiv: 1302. 4193, V. 1, math. GN, 2013, 12P.

[11] LOGUNOV, S. *On hereditary normality of zero- dimensional spaces*. Udmurt state_University, 2000, PP. 53-58.

[12] MURDESHWAR, M. G. *general topology*. second edition, Wiley Eastern, Canada, 1990, 357P.

[13] NADJAFIKHAH, M ؛ BAKHSHANDEH CHAMAZKOTI,R. *Fuzzy Lie groups*. Iran university of science and Technology, Vol. 2, No. 2, 2009, PP. 193-206.

[14] PAULSEN, V. *An introduction to the theory of topological groups and their represementations*. press, 2011, 72P.

[15] REPOVS, D ؛ ZDOMSKY, L. *A new lindelÖf topological group*. Math.GN, 2010, PP. 1-8.

[16] VANDENBAN, P. E. *Lie Groups*. Lecture Notes, 2010, 115P.

[17] WANG, Z. *Notes on smooth manifolds*. B: Term projects, 2013, 185p.