مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

قابلية التحكم وقابلية الرصد في الأنظمة الخطية المستمرة زمنيا

الدكتور محمود عثمان*

(تاريخ الإيداع 26 / 1 / 2015. قُبِل للنشر في 26 / 7 /2015)

□ ملخّص □

تم في هذا البحث عرض دراسة مسألة قابلية التحكم وكذلك قابلية الرصد للأنظمة الخطية المستمرة الثابتة مع الزمن والتي تكتب على النحو الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t)\ ,$$
$$x(0) = x_0\ \ , x(t_f) = x_f$$

وتم التوصل إلى إيجاد معايير لقابلية التحكم وقابلية الرصد. وكذلك تم استنتاج متجهة التحكم التي تنقل النظام من الحالة الابتدائية $x(0)$ إلى الحالة النهائية $x(t_f)$ في زمن محدد $t_f>0$ موضحا ذلك بمثال .وكذلك تم وضع خوارزمية جديدة لإيجاد متجهة التحكم والتي تمكننا من نقل النظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية. كما تموضع برنامج لرسم مسار متجهة الحالة ومتجهة الرصد.

الكلمات المفتاحية: قابلية التحكم بالنظام، قابلية الرصد، الأنظمة الخطية المستمرة، متجهة التحكم .

*أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية– سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

Controllability and Observerability of Linear Continuous-Time Systems

Dr. Mahmoud Osman*

(Received 26 / 1 / 2015. Accepted 26 / 7 /2015)

□ ABSTRACT □

In this research, we investigate a problem of controllable and observerable for linear Continuous-time systems of type:

$$\frac{dx}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t)\ ,$$
$$x(0) = x_0\ , x(t_f) = x_f$$

We have foundedcontrollable and observerable conditions for the linearcontinuous-time system. Moreover, we put out a new algorithm for findingcontrolvectorof steps that can enable us to move the state vector from the initial stage x(0) into the final onex(t_f) for finite time t_f>0, the theoretical results is illustratedby an example. Finally,we put program to plot trajectory of state vector x(t) and observer vector y(t).

Key Words: Controllable, Observerable, Linear Continuous-Time Systems, Control Vector .

***professor, mathematics department-faculty of sciences-Tishreen University-Lattakia-Syria.**

مقدمة:

قابلية التحكم والرصد مفهومان أساسيان في نظرية التحكم الحديثة، فقد تم تعريف هذين المفهومين من قبل العالم [2,3]R.kalmanفي عام 1960 وذلك بغية التعرف على مدى إمكانية مراقبة النظام والتحكم به.لذلك ولتحقيق هذين المفهومين في نظام ما يجب علينا مراعاة اختيار أو انتقاء متغيرات متجهة الحالة للنظام بحيث يمكن قياسها أو مراقبتها.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث في الحصول على معايير لقابلية التحكم للنظم الخطية المستمرة، لتصميم نظام تحكم يحقق الهدف المطلوب.

طرائق البحث و مواده:

تم عرض نظريات مشهورة واستنتاج سلسلة من النتائج والخوارزميات مدعومة بالأمثلة لإظهار صحة هذه المعايير.

النتائج والمناقشة:

أ –تعريف قابلية التحكم: [1] نقول عن نظام ما بأنه قابل للتحكم إذا وفقط إذا كان من الممكن عن طريق متجهة التحكم الوصول بالنظام من الحالة الابتدائية $x(t_0)=x_0$إلى أي حالة نهائية $x(t_f)=x_f$وذلك خلال زمن محدد $t>0$.

ب–النموذج الرياضي للنظام:[8]

يمكن توصيف أي نظام ديناميكي باستخدام معادلات تفاضلية عادية على النحو الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)$$

ومعادلة الخرج(الرصد) بالعلاقة :

$$y = y(x,u,t)$$

حيث:

x(t) تمثل متجهة الحالة للنظام

y(t) تمثل متجهة الرصد

u(t) تمثل متجهة التحكم

وفي حالة الأنظمة غير الخطية تأخذ هذه المعادلات الشكل الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)........(1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)......(2)$$

وفي حالة الأنظمة الخطية الثابته مع الزمن تأخذ المعادلات الشكل الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)........(3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).....(4)$$

حيث:

A مصفوفة الحالة من الشكل $n \times n$.

B مصفوفة التحكم من الشكل $n \times m$.

C مصفوفة الخرج من الشكل $1 \times n$.

D مصفوفة النقل المباشر من الشكل $1 \times m$.

n:عدد مركبات متجهة الحالة .

m:عدد مركبات متجهة التحكم .

<u>ج- معايير قابلية التحكم:</u>[5]

باشتقاق المعادلة $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ مرات متعددةنجد:

$$\dddot{x}(t) = A^3x(t) + A^2Bu(t) + AB\dot{u}(t) + B\ddot{u}(t)$$

$$x^{(n)}(t) = A^n x(t) + A^{n-1}Bu(t) + A^{n-2}B\dot{u}(t) + ...Bu^{(n-1)}(t) \qquad (5)$$

يمكننا كتابة جملة المعادلات (5) على النحو الآتي:

$$x^{(n)}(t) - A^n x(t) = [B\ AB\ A^2B\ A^3\ B\ \dots\dots\dots\dots A^{n-1}B]U(t) = RU(t) \dots (6)$$

حيث :

$R=[B\ AB\ A^2B\ A^3\ B\ \dots\dots\dots\dots A^{n-1}B\ ]$ و

$$U(t) = (u^{(n-1)}(t)\ \ u^{(n-1)}(t),........\dot{u}(t),u(t))^T$$

نلاحظ أن جملة المعادلات (6) تكون محققة من أجل $t \in [t_0, t_f]$ بحيث t_f زمن محدد . وهكذا فإن مصفوفة التحكم R غير الشاذة تدل على وجود متجه التحكم U(t) و (n-1) مشتق من أجل $t_0 < t < t_f$

ومن أجل متجهة التحكم $U(t) \in R^M$ فإن:

$$R.\begin{bmatrix} u^{(n-1)}(t) \\ . \\ . \\ u(t) \end{bmatrix} = x^{(n)}(t) - A^n x(t) = \alpha(t) \qquad (7)$$

حيث المصفوفة R تتألف من n سطرا و nm عمودا.

ومن أساسيات الجبرالخطي نعلم أن:

1 - لايوجد لجملة المعادلات (7)حل إذا كان $rank[R] < rank[R \mid \alpha]$.

2 - يوجد حل وحيد إذا كان $rank[R] = rank[R \mid \alpha] = n$.

3 - يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كان: $rank[R] = rank[R \mid \alpha] < n$.

وبالتالي يمكننا أن نضع المعيار الآتي لقابلية التحكم:

تعريف: نقول عن النظام الأتي:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (8)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (9)$$

$x(t_0)=x_0$ الحالة الابتدائية للنظام (10)

$x(t_f)=x_f$ الحالة النهائية للنظام (11)

أنه قابل للتحكم إذا تحقق الشرط الآتي:

Rank(R)=n

<u>برنامج لإيجاد قابلية التحكم:</u>

تم وضع برنامج بلغة الماتلاب لإيجاد قابلية التحكم وتم حفظه تحت اسم *cot* ويتم استخدامه عندما نحتاج إليه:

البرنامج:

```
function co=ctrb(a,b)
n=length(a);
co=ctrb(a,b);
if rank(co)~=n
    disp('no contrable');
else
    disp('contable');
end
end
```

مثال1:هل النظام المعطى على النحو الآتي قابل للتحكم ؟ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التابع السابق ينتج الآتي:

```
>> a=[−1 0 0;−1 −2 0;1 0 0];
>> b=[1;0;0];
>> cot(a,b)
contable

ans =

   1   −1    1
   0   −1    3
   0    1   −1
```

أي أن النظام قابل للتحكم وقيمة المصفوفة R:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال2:هل النظام المعطى على النحو الآتي قابل للتحكم ؟:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

وباستخدام البرنامجcot من أجل المثال 2:نجد

```
>> a=[1 0 1;0 1 0;1 1 1];
>> b=[1;0;1];
>> cot(a,b)
not contrable
```

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

أي أن النظام غير قابل للتحكم وذلك لأن:3>1 =rank(c) .

د- استنتاج العلاقة بين متجهة التحكم والحالتين الابتدائية والنهائية للنظام[4]

بضرب طرفي المعادلة الآتية ب e^{-At}:

$$\dot{x}\,(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

نحصل على:

$$e^{-At}\dot{x}\,(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$
$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

وبإجراء التكامل على طرفي المعادلة السابقة نحصل على:

$$\int_{t_0=0}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = \int_{t_0=0}^{t_f} e^{-At}Bu(t)dt$$
$$e^{-At_f}\,x(t_f) - x(0) = \int_{t_0=0}^{t_f} e^{-At}Bu(t)dt$$
$$x(t_f) = e^{At_f}\,x(0) + \int_{t_0=0}^{t_f} e^{-A(t-t_f)}Bu(t)dt$$
$$x(t_f) = e^{At_f}\,x(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-t)}Bu(t)dt \qquad (12)$$

ملاحظة :بمعرفة الحالة الابتدائية والنهائية للنظام يمكننا الحصول على متجهة التحكم.

مبرهنة1:

إذا كان النظام (11-8) قابل للتحكم فإن متجهة التحكم U(t) والتي تنقل النظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية تعطى بالعلاقة الآتية:

$$U(t) = -B'e^{(A'-t)}W^{-1}[e^{At_f}x(0) - x_f] \qquad (13)$$

حيث W تعطى بالعلاقة الآتية:

$$W = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-t)}BB'u(t)e^{A'(t_f-t)}\,dt$$

البرهان:

نأخذ الطرف الثاني من العلاقة (12) وبالتعويض عن U(t) من العلاقة (13)نجد:

$$e^{At_f}\,x(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-t)}B(-B'e^{(A'-t)}W^{-1}\left[e^{At_f}x(0) - x_f\right])dt =$$

$$e^{At_f}\,x(0) - \int_0^{t_f} e^{A(t_f-t)}BB'e^{(A'-t)}dt(W^{-1}[e^{At_f}x(0) - x_f]) =$$

$$e^{At_f}\,x(0)-W\left(W^{-1}\left[e^{At_f}-x_f\right]\right)=e^{At_f}\,x(0)-\left[e^{At_f}x(0)-x_f\right]=x_f$$

حيث x_f هو الطرف الأول من العلاقة *(12)*وهو المطلوب .

ملاحظة:نعني *بالنظام*(8−11) جميع العلاقات من 8 وحتى 11 .

هـ−خوارزمية لإيجاد متجهة التحكم للنظام:[7]

المدخلات:**m,n,x(0),x(t_f)** وكذلك المصفوفة **A** من المرتبة **nXn**والمصفوفة **B** *من المرتبة* ***nXm*** .

المخرجات: متجهة التحكم ***U(t)*** .

خطوة **(1)** : *نتحقق من النظام إذا كان قابل للتحكم باستخدام البرنامج* ***cot*** فإذا كان قابل للتحكم ننتقل إلى الخطوة**(2)** وإلا نذهب إلى الخطوة ***(10)***

خطوة **(2)** *:* بالاكتفاء بثلاثة حدود من منشور الدالة e^x *المعطى بالعلاقة:*

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots$$

نحسب :

$$E1=e^{A(t_f-t)}=\mathbf{I_n}+A(t_f-t)+\frac{(t_f-t)^2A^2}{2!}$$

خطوة *(3)*:نحسب :

$$E2=e^{A'(t_f-t)}=\mathbf{I_n}+A'(t_f-t)+\frac{(t_f-t)^2A'^2}{2!}$$

خطوة *(4)*:نحسب :

$$W0=E1*B*B'*E2$$

خطوة *(5)*:نحسب :

W=int(w0,0,t_f)

خطوة *(6)*:نحسب :

W1=W^{-1}=inv(w)

خطوة *(7)*:نحسب :

$$E3=e^{At_f}=\mathbf{I}_n+At_f+\frac{A^2t_f^{\,2}}{2!}$$

خطوة *(8)*:نحسب :

U(t)= − B'*E2*W1*(E3*x(0) −x_f)

خطوة *(9)* نطبع ***U(t)***

خطوة *(10)* :النهاية .

مثال 3: ليكن النظام معطى على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} , \qquad x_f = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.07 \\ -1.0201 \end{bmatrix}$$

وذلك من أجل: $t \in [0,1]$

المطلوب:

إيجاد متجهة التحكم U(t) والتي تنقل النظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية.

<u>الحل:</u>

1 - نتأكد من قابلية التحكم للنظام

```
>> a=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
>> b=[1;1;1];
>> cot(a,b)
contable


ans =


     1     1     1
     1     1   -23
     1   -23   121
```

أي أن النظام قابل للتحكم وقيمة المصفوفة R:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -23 \\ 1 & -23 & 121 \end{bmatrix}$$

2-نوجد E1:

```
>> E1=eye(3)+(tf-t)*a+(1/2)*(tf-t)^2*a^2

E1 =
```

```
[                  1,                 1-t,          1/2*(1-t)^2]
[          -3*(1-t)^2,       1-11/2*(1-t)^2,       1-t-3*(1-t)^2]
[  -6+6*t+18*(1-t)^2, -11+11*t+30*(1-t)^2, -5+6*t+25/2*(1-t)^2]
```

3-نوجد E2:

```
>> E2=eye(3)+(tf-t)*a'+(1/2)*(tf-t)^2*a'^2

E2 =

[                  1,          -3*(1-t)^2,   -6+6*t+18*(1-t)^2]
[                1-t,       1-11/2*(1-t)^2, -11+11*t+30*(1-t)^2]
[        1/2*(1-t)^2,        1-t-3*(1-t)^2, -5+6*t+25/2*(1-t)^2]
```

4 - نحسب W0:

```
W0=E2*b*b'*E2
```

5 - نحسب W:

```
>> W=int(W0,0,1)

W =
[    89/30,  -157/30,   629/30]
[  -157/30,   461/30, -1777/30]
[   629/30, -1777/30,  6929/30]
```

6 - نحسب W1:

```
>> w1=inv(W)

w1 =
[ 203/192,  -83/96, -61/192]
[  -83/96,  307/48,   55/32]
[ -61/192,   55/32,  91/192]
```

7-نحسب E3:

```
>> E3=eye(3)+a*tf+(1/2)*tf^2*a^2

E3 =
    1.0000    1.0000    0.5000
   -3.0000   -4.5000   -2.0000
```

12.0000   19.0000   7.5000

8- نحسب متجهة التحكم U(t):

```
>> u=-b'*E2*w1*(E3*x0-xf)
u =
-7155690283091781 93/140737488355328 00+2416781093628385 91/351
8437208883200*t+74835927979922563/1407374883553280*(1-t)^2
```

أي أن قيمة متجهة التحكم بعد الاكتفاء بأربع أرقام بعد الفاصلة العشرية:

U(t) = -50.8442+68.6891t+53.1741(1-t)^2

<u>ملاحظة</u> : يمكننا التحقق من الحالة النهائية للنظام وفق الخطوات الآتية:

نحسب W2=E1*B*u ومن ثم نحسب x_f من العلاقة:

```
>> xf=E3*x0+int(w2,0,tf)

xf =
3/2
307/100
 -71783155935635/70368744177664
```

أي أن :

$$x_f = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.07 \\ -1.0201 \end{bmatrix}$$

علما أن:

```
>> -71783155935635/70368744177664

ans =   -1.0201
```

<u>برنامج لرسم مسا ر متجهة</u>   -

<u>التحكم x(t) ومسار متجهة الخرج (الرصد) y(t)</u>

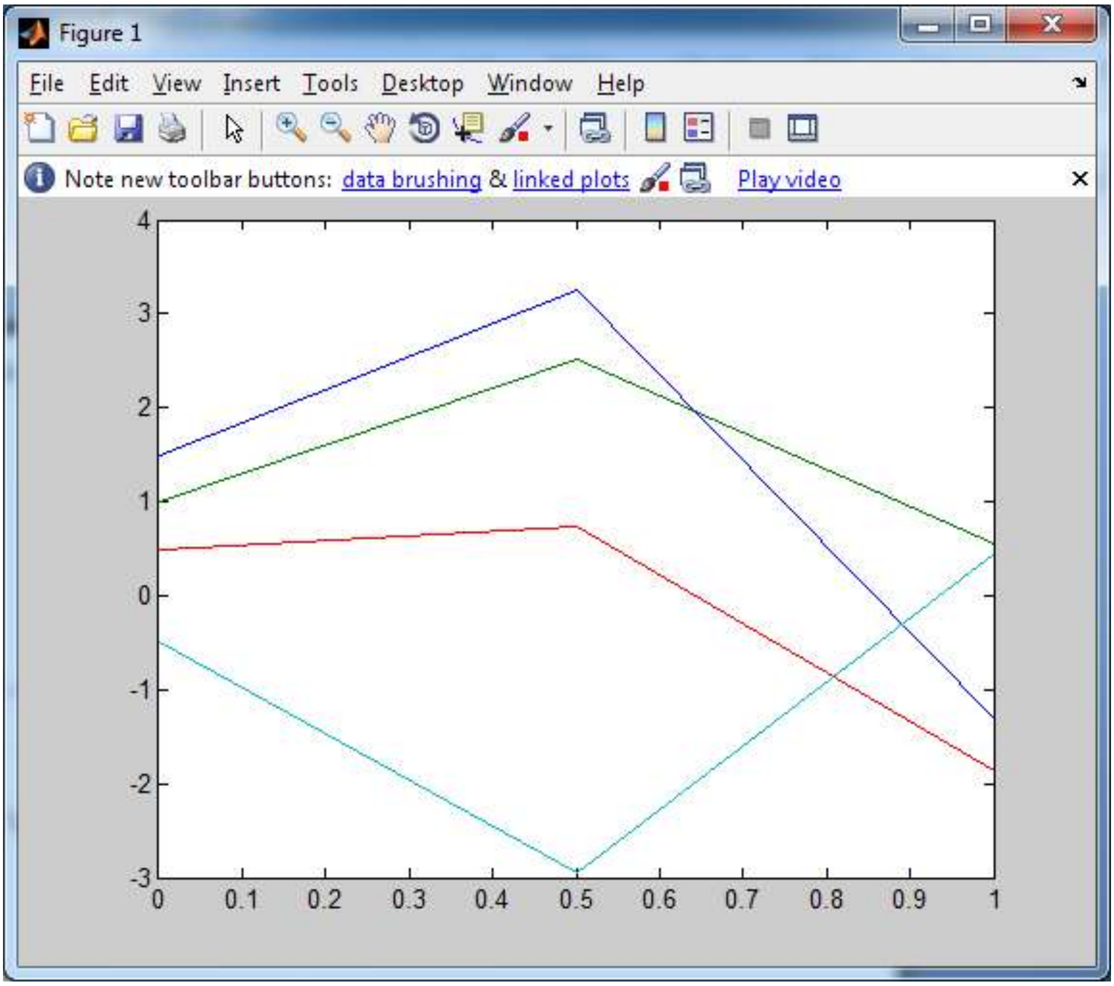
لتحقيق الهدف المطلوب نستخدم دالة محفوظة تحت اسم   lsim.m[6]ومتجهة التحكم التي حصلنا عليها من الخوارزمية السابقة.

<u>البرنامج:</u>

```
a=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6]
```

```
b=[1; 1; 1]
c=[1 1 0]
d=0
x0=[1;0.5;-0.5]
  t=0:0.5:1
  f =inline(' -50.8442+ 68.6891*t+ 53.1741*(1-t)^2','t')
u=[f(0)  f(0.5) f(1)]
[x y]=lsim(a,b,c,d,u,t,x0)
plot(t,x,t,y)
```

وبعد تنفيذ البرنامج تظهر لنا شاشة النتائج كما يأتي:



<u>و– قابلية الرصد للنظم الخطية المستمرة[7]</u>

ليكن النظام معطى على النحو الآتي:

$\dot{x}(t) = Ax(t)$;$x(t_0)=x_o$ غير معلومة (14)

مع المقاييس المرافقة:

$y(t)=Cx(t)$ (15)

$x(t) \in R^n \;, y(t) \in R^p \; A \in R^{nXn}, C \in R^{pXn}$

من العلاقة (15) نستطيع أن نكتب:

$y(t_0)=Cx(t_0)$

$\rightarrow \dot{y}\,(t_0) = C\dot{x}(t_0) = CAx(t_0)$

$\ddot{y}\,(t_0) = CA\dot{x}(t_0) = CA^2\, x(t_0)$

$\vdots$

$\vdots$

$y^{(n-1)} = CA^{(n-1)}x(t_0)$

ونستطيع كتابة جملة المعادلات السابقة على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} y(t_o) \\ \dot{y}\,(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} x(t_0)(16)$$

بفرض:

$$Y(t_0)=\begin{bmatrix} y(t_o) \\ \dot{y}(t_0) \\ \ddot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ و } O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

تكتب جملة المعادلات (16) على النحو الآتي:

$Ox(t_0)=Y(t_o)$ (17)

نسمي المصفوفة O مصفوفة الرصد، فإذا كان $Y(t_0)$ معلوما فيمكننا تحديد الحالة الابتدائية للنظام $x(t_0)$ بشكل وحيد من جملة المعادلات (17) إذا وفقط إذا كانت مصفوفة الرصد O لها رتبة تامة .وبالتالي نستطيع صياغة قابلية الرصد للنظم الخطية المستمرة وفق النتيجة الآتية:

نتيجة:النظم الخطية المستمرة [14]مع القياسات المرافقة (15) تكون قابلة للرصد إذا وفقط إذا كانت مصفوفة الرصد O تملك رتبة تامة أي rank(O)=n .

-برنامج لإيجاد قابلية الرصد:[6]

تم وضع برنامج بلغة الماتلاب لإيجاد قابلية الرصد وتم حفظه تحت اسم obsvable ويتم استخدامه عندما نحتاج إليه:

البرنامج:

```
function  o = obsvable(A,C)
%' The  function 0=obsvable(A,C) returns the transformation matrix  '
%' o = [C; CA; CA^2; . . . CA^(n−1)]. The system is completely state'
%' observable if and only if o has a rank of n.
```

```
n=length(A);
  for i=1:n;
  o(n+1-i,:) = C*A^(n-i);
  end
  if rank(o)~=n
  disp('System is not state observable')
  else
  disp('System is state observable')
  end
```

مثال 4: ليكن النظام معطى على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y(t)=[1\ \ 1\ \ 1] \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

لدينا: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ و $C=[1\ \ 1\ \ 1]$

وبتطبيق البرنامج الفرعيobsvable على المصفوفتين Aو C نجد:

```
>> a=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
>> c=[1 1 1];
>> obsvable(a,c)
System is state observable
ans =

    1     1     1
   -6   -10    -5
   30    49    20
```

أي أن النظام قابل للرصد وقيمة المصفوفة O:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & -10 & -5 \\ 30 & 49 & 20 \end{bmatrix}$$

مبرهنة 2:إذا كان النظام المعطى بالعلاقتين (14) و (15) قابل للرصد فإن الحالة الابتدائية $x(t_0)$ تعطى بالعلاقة الآتية:

$$x(t_0) = W^{-1} \int_0^{t_f} e^{A' t} C' y(t) dt \quad (18)$$

حيث W تعطى بالعلاقة الآتية:

$$W = \int_0^{t_f} e^{A' t} C' C e^{At} dt$$

البرهان:

تكتب العلاقة (14) على النحو الآتي:

$$\frac{dx(t)}{\mathrm{dt}} = Ax(t) \to \frac{dx(t)}{x(t)} = Adt \to x(t) = c_1 e^{At}$$

ومن أجل $t=t_0$ نحصل على:

$$x(t_0) = c_1 e^{At_0} \to c_1 = e^{-At_0} x(t_0)$$

وبالتالي:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\, x(t_0)$$

ومن أجل $t_0=0$ نكتب المعادلة السابقة على النحو الآتي:

$$x(t) = e^{At}\, x_0 \quad (19)$$

وبالتالي فإن المعادلة (15) تكتب كما يأتي:

$$y(t) = Ce^{At}\, x_0 \quad (20)$$

بضرب طرفي المعادلة (20)بالعلاقة:

$$\mathrm{e}^{A' t}\mathrm{C}'$$

نحصل على:

$$\mathrm{e}^{A' t}\mathrm{C}'\, y(t) = \mathrm{e}^{A' t}\mathrm{C}' C e^{At}\, x_0$$

وبأخذ الطرف الثاني من العلاقة (18) واستبدال $\mathrm{e}^{A' t}\mathrm{C}'\, y(t)$ بقيمتها نجد

$$W^{-1}\int_0^{t_f} e^{A^{'}t}\,C^{'}y(t)dt = W^{-1}\int_0^{t_f} e^{A^{'}t}\,C^{'}Ce^{At}\;dt\,x_0 = \;W^{-1}Wx_0 = x_0$$

وهو الطرف الأول من العلاقة (18)

الاستنتاجات والتوصيات :

لقد تم التوصل إلى إيجاد الشروط والمعاييراللازمة لقابلية التحكم والرصد وكذلك تم إيجاد متجهة التحكم ، ووضعت خوارزمية لإيجادها.ويمكننا مستقبلا دراسةإمكانية إيجاد متجهة التحكم بوجود شروط حدية على هذه المتجهة.

المراجع:

1. GAJIC, Z. and LELIC, M., *Modern Control Systems Engineering*. Prentice Hall International, London, (1996), 241–247.
2. HOU, M. and MÜLLER P. C., *Design of Observers for Linear Systems With Unknown Inputs*. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-37, (1992), 871-875.
3. DAVIS J. M., I. A. GRAVAGNE, B. J. JACKSON, R. J. MARKS II., *Controllability, Observability, Realizability, And Stability of Dynamic Linear Systems*,Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 37, pp. 1–32.
4. FAUSETT L. and K. MURTY. *Controllability, Observability, and Realizability Criteria on Time Scale Dynamical Systems*. Nonlinear Stud. 11 (2004), 627–638.
5. YAN-MING FU; GUANG-REN DUAN; SHEN-MIN SONG, *Design of Unknown Input Observer for Linear Time-delay Systems*. International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 2, No. 4, 2004, 530-535.
6. SAADAT H., *ComputationalAids in Control Systems Using MATLAB*, Copyright-McGraw-Hill inc (1993).
7. BEMPORAD A.*Automatic Control Discrete-time linear systems*,University of TrentoAcademic year 2010-2011.
8. BARTOSIEWICZ Z., PIOTROWSKA E., M. WYRWAS, *Stability, Stabilization And Observers of Linear Control Systems on Time Scales*, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, New Orleans, LA, December 2007, 2803–2808.