

## Mathematical and physical differences between curved and flat surfaces in astrophysical observations

Dr. Jabbour Noufal Jabbour\*  
Dr. Jehad Kamel Mulhem\*\*  
Saadeh Georgos Dayoub\*\*\*

(Received 16 / 9 / 2024. Accepted 19 / 11 / 2024)

### □ ABSTRACT □

The study of cosmology is based on Einstein's "General Theory of Relativity," which leads to the consideration (or imagination) that we live in a curved spacetime. This idea (the idea of spacetime curvature) is by no means simple; in other words, it is not easy to conceptualize. What is being undertaken here represents an initial stage to address and approach certain aspects related to this concept.

There are several challenges in addressing this idea, beginning with imagining a four-dimensional spacetime and then visualizing that spacetime is curved. However, we will focus here on some simpler scenarios: flat space (a flat surface) and curved space (a curved surface) in two and three dimensions. These are very simple cases, involving only space and not spacetime (i.e., space without time), confined to two dimensions and not the three-dimensional space in which we currently live. This simplification makes the situation much easier. In other words, we will employ what is called "cosmology through the ant" or "ant technique," imagining an ant living in a two- or three-dimensional space. In this context, we focus only on space and not time. We will explore the insights that can be gained from studying this, specifically what the ant would observe in its study or, in other terms, what we would see if we were in the ant's position.

This is the first method to understand that we live in a curved space. However, implementing this is not straightforward in practical life, especially in cosmology studies, where the scales involved are immense, on the order of light-years.

Subsequently, a comparison will be made between flat and curved surfaces; we will examine the effect of curvature on the circumference of a circle, which in turn leads to a physical phenomenon or another physical effect, namely the concept of light flux.

The apparent flux of distant sources in a curved space is higher than in a flat space, which has implications for distance estimations and the Hubble constant.

**Key words:** Flat surface, curved surface, coordinate system (Cartesian, polar, cylindrical, spherical), luminous flux, angular dimension, concept of metric.

**Copyright**



:Tishreen University journal-Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

\* Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

\*\*Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

\*\*\*Postgraduate Student, Radiation Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

## الفروق الرياضية والفيزيائية بين السطوح المنحنية والمستوية في عمليات الرصد الفلكية-الفيزيائية

د. جبور نوفل جبور\*  
د. جهاد كامل ملحم\*\*  
سعاده جرجس ديوب\*\*\*

(تاريخ الإيداع 16 / 9 / 2024. قَبِلَ للنشر في 19 / 11 / 2024)

### □ ملخص □

إن دراسة علم الكون (The cosmology) يستند إلى "النظرية النسبية العامة" لأينشتاين، وهذا يقود إلى اعتبار (إلى التخيل) أننا نعيش في وسط في زمان منحني. إن هذه الفكرة (فكرة انحناء الزمكان) ليست سهلة على الإطلاق، بعبارة أخرى ليس من السهل تمثيلها، وإن هذا الذي يتم القيام به هو عبارة عن مرحلة أولى لمعالجة ومقارنة بعض النقاط المتعلقة بتلك الفكرة. هناك عدة صعوبات لمقارنة تلك الفكرة وهي أولاً تخيل زمان رباعي الأبعاد ومن ثم تخيل أن الزمكان منحني. ولكن سنهتم هنا ببعض الأوضاع البسيطة: فضاء مستوي (سطح مستوي) وفضاء منحني (سطح منحني) ببعدين وثلاثة أبعاد. أي أوضاع بسيطة جداً وهو فضاء فقط وليس فضاء وزمن (أي ليس زمان) ببعدين فقط وليس فضاء بثلاثة أبعاد حيث نعيش حالياً، سيكون الوضع أكثر بساطة. إذاً بتعبير آخر سنقوم بما يُدعى بـ "دراسة علم الكون عن طريق النملة أو ما يدعى بتقنية النملة"، أي نملة تعيش في فضاء ببعدين أو بثلاثة أبعاد. وهنا لا نهتم بالزمن، نهتم فقط بالفضاء. وسنرى ما هي النقاط التي يمكن استنتاجها من دراسة ذلك، أي ماذا سنرى النملة عند دراستها ذلك، أو بتعبير آخر، ماذا سنرى لو كنا مكان النملة؟ وهذه أول طريقة لمعرفة أننا نعيش في فضاء منحني. وهذا ليس من السهل القيام به في الحياة العملية، وخاصة عند دراسة علم الكون، حيث المسافات التي نتعامل معها كبيرة جداً، من مرتبة السنة الضوئية. ومن ثم سنتم المقارنة بين السطوح المستوية والسطوح المنحنية؛ وسنرى ما هو تأثير الانحناء على محيط الدائرة وهذا بدوره يؤدي إلى مفعول فيزيائي أو تأثير فيزيائي آخر وهو مفهوم التدفق الضوئي (light flux). التدفق الظاهري للمصادر البعيدة في الفضاء المنحني أعلى مما هو عليه في الفضاء المستوي، مما ينعكس على تقدير المسافات وثابت هابل. الكلمات المفتاحية: سطح مستوي، سطح منحني، جملة إحداثيات (ديكارتيّة، قطبية، أسطوانية، كروية)، تدفق ضوئي، قد زاوي، مفهوم المقياس.

حقوق النشر : مجلة جامعة تشرين- سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص



CC BY-NC-SA 04

\*أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.  
\*\*أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.  
\*\*\*طالب دكتوراه - اختصاص فيزياء إشعاعية - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

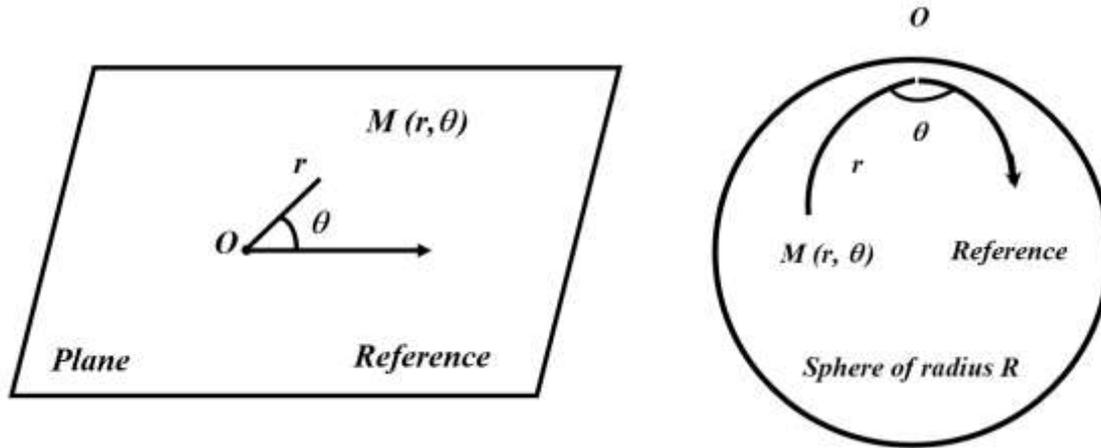
مقدمة: [1, 2, 3]

عندما نقوم بدراسة علم الكون (The cosmology) ندرس تركيب وتطور هذا الكون بمجمله، وذلك باستخدام النظرية النسبية العامة لأينشتاين، وهذا يقودنا إلى اعتبار (إلى التخيل) أننا نعيش في وسط في زمان منحني. إن هذه الفكرة (فكرة انحناء الزمان) ليست سهلة على الاطلاق، بعبارة أخرى ليس من السهل تمثيلها، وإن هذا الذي يتم القيام به هو عبارة عن مرحلة أولى لمعالجة ومقارنة بعض النقاط المتعلقة بتلك الفكرة.

هناك عدة صعوبات لمقارنة تلك الفكرة وهي أولاً تخيل زمان رباعي الأبعاد ومن ثم تخيل أن الزمان منحني. ولكن إذا اهتمينا بوضع بسيط جداً وهو فضاء فقط وليس فضاء وزمن (أي ليس زمان) ببعدين فقط وليس فضاء بثلاثة أبعاد حيث نعيش حالياً، سيكون الوضع أكثر بساطة. إذاً بتعبير آخر سنقوم بما يدعى بـ "دراسة علم الكون عن طريق النملة أو ما يدعى بتقنية النملة"، أي نملة تعيش في فضاء ببعدين. وهنا لا نهتم بالزمن، نهتم فقط بالفضاء. وسنرى ما هي النقاط التي يمكن استنتاجها من دراسة ذلك، أي ماذا سنرى النملة عند دراستها ذلك، أو بتعبير آخر، ماذا سنرى لو كنا مكان النملة؟

2- مقارنة بين سطح مستوي و سطح منحني: [4, 5, 6]

لهذه الغاية سوف نعتبر وضعين بالتوازي: الأول نملة تعيش في فضاء مستوي، ونملة أخرى تعيش في فضاء مستوي منحني، وسنأخذ على سبيل المثال سطح كرة، ليس للتسهيل والتبسيط، ولكن لأن الكون من حولنا هو كون متجانس ومتساوي المناحي، أو نعتبره بشكل تقريبي متجانس ومتساوي المناحي [1-9].



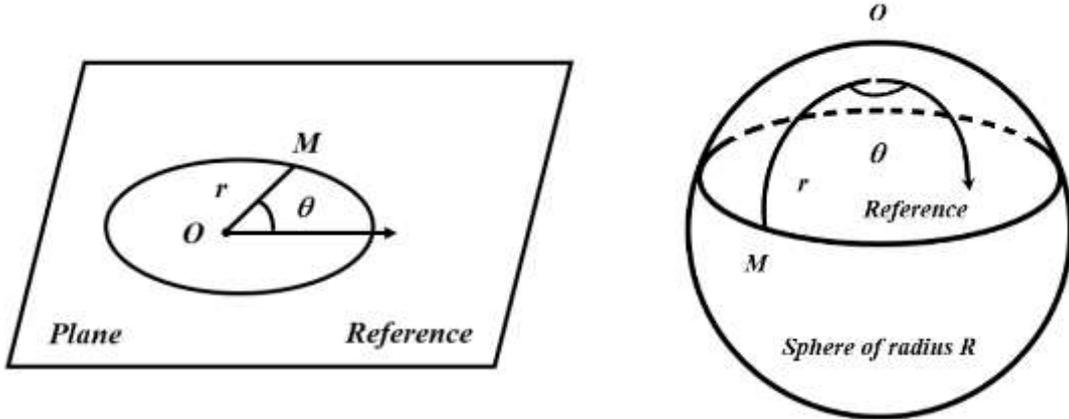
نملة تعيش على مستوي  
(جملة مرجعية مستوية)

نملة تعيش على سطح كرة (النملة لا تعرف أنها تعيش  
على سطح منحني) لكن نحن نعرف

شكل (1): مقارنة بين سطح مستوي و سطح منحني. [4, 5, 6]

مستوي (Plane)، جملة مرجعية (reference)،  $R$  نصف قطر الكرة (sphere of radius R).

النقطة  $M$  معينة بالإحداثيين  $M(r, \theta)$ .



نرسم دائرة مركزها  $O$  في المستوي

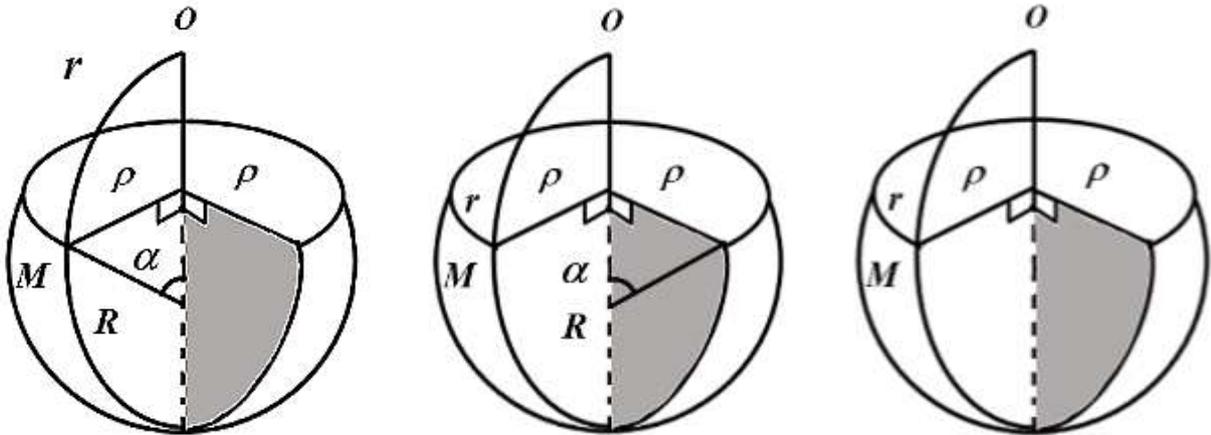
نرسم دائرة مركزها  $O$  على سطح الكرة

شكل (2): مقارنة بين سطح مستوي و سطح منحنى. [4, 5, 6]

إن محيط الدائرة في المستوي يساوي:

$$C = 2\pi r$$

لكن ما هو محيط الدائرة على سطح الكرة؟ نُعطي في الشكل (3) بعض الأشكال التوضيحية لكرة نصف قطرها  $R$  ودائرة نصف قطرها  $\rho$ .



كرة نصف قطرها  $R$ ، ودائرة نصف قطرها  $\rho$

كرة نصف قطرها  $R$ ، ودائرة نصف قطرها  $\rho$

كرة نصف قطرها  $R$ ، ودائرة نصف قطرها  $\rho$

شكل (3): بعض الأشكال التوضيحية لكرة نصف قطرها  $R$ ، ودائرة نصف قطرها  $\rho$ .

إن الزاوية  $\alpha$  تُعطى بالعلاقة الآتية مقدرة بالراديان:

$$\alpha = \frac{r}{R}$$

بينما المسافة  $\rho$  فتعطى بالعلاقة:

$$\rho = R \sin \alpha = R \sin \left( \frac{r}{R} \right)$$

إن الدائرة التي نصف قطرها  $\rho$  محيطها يساوي:

$$C = 2\pi\rho = 2\pi R \sin \left( \frac{r}{R} \right)$$

إذاً محيط الدائرة في الحالتين يساوي:

| سطح مستوي    | سطح منحني (سطح كرة)                                   |
|--------------|---|
| $C = 2\pi r$ | $C = 2\pi \rho = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$ |

وهذه أول طريقة لمعرفة أننا نعيش في فضاء منحني. وهذا ليس من السهل القيام به في الحياة العملية، وخاصة عند دراسة علم الكون، حيث المسافات التي نتعامل معها كبيرة جداً، من مرتبة السنة الضوئية. وعادة يُستخدم في القياسات الفلكية وحدات خاصة مثل: الوحدة الفلكية (Astronomical Unit)، السنة الضوئية، والبارسيك، انظر الجدول (1).

جدول (1): يبين بعض الوحدات المستخدمة في فيزياء الفلك.

| الوحدة - Unit                            | التعريف - definition   | القيمة - Value  |
|--|--|---|
| الوحدة الفلكية<br>Astronomical Unit (AU) | واحدة طول تستخدم في فيزياء الفلك، وهي عبارة عن نصف القطر الوسطي لمدار الأرض حول الشمس، المسافة ما بين الشمس (Sun) والأرض (Earth)   | $1 AU = 14959787 \times 10^4 m$<br>$\cong 150 \times 10^6 km$   |
| السنة الضوئية<br>light Year (lyr)        | هي واحدة طول تستخدم في فيزياء الفلك، وهي المسافة التي يقطعها الضوء في الفضاء في سنة واحدة أي أن: $(365,25 \text{ days}) \times ((24 \text{ hours}) \times (3600s))$ حيث سرعة الضوء تساوي $c = 3 \times 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)$                      | $1 \text{ lyr} = 3 \times 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)$<br>$\times (365,25 \times 24 \text{ days})$<br>$\times 3600s$<br>$= 9,46 \times 10^{15} m$   |
| البارسيك<br>Parsec (pc)<br>أو            | البارسيك هي واحدة طول تستخدم في فيزياء الفلك، وهي عبارة عن المسافة $d$ التي نرى من خلالها نصف القطر الوسطي لمدار الأرض حول الشمس ضمن زاوية تساوي ثانية واحدة، أي قوس مقابل لزاوية تساوي ثانية واحدة. (الدرجة تُقسم لـ 60 دقيقة والدقيقة تقسم إلى 60 ثانية) | لدينا $(3600'')$ في درجة واحدة. وبما أن الراديان يساوي $(57,3)$ درجة، فيكون هناك حوالي $(206265'')$ في الراديان الواحد. ويكون لدينا المعادلة الآتية:<br>$d = \frac{206265''}{1''} AU$<br>$1 \text{ parsec (pc)} = 30,86 \times 10^{12} km$<br>$= 3,26 \text{ ly}$ |
|  |  |   |

$d = (1/p[\text{arcsec}]) \text{ parsec}$

$B = 1 AU = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$

$1 pc = 3.26 LY = 3 \times 10^{18} \text{ cm}$

Sun ←  $d$  in parsec → star

↑ 1 AU ↓

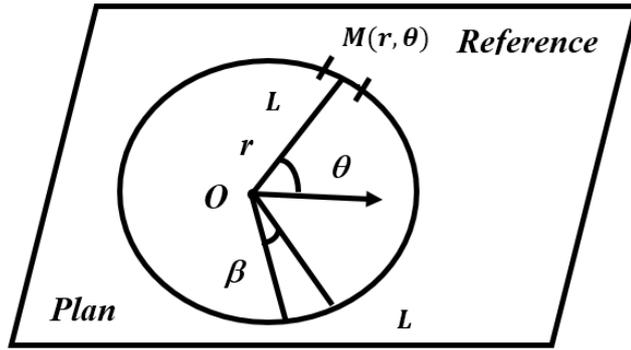
Earth

angle in seconds of arc

كما هو ملاحظ فإننا نرى تأثير الانحناء على محيط الدائرة وهذا بدوره يؤدي إلى مفعول فيزيائي أو تأثير فيزيائي آخر. ومن أجل ذلك فمن المفيد التكلم قليلاً عن مفهوم التدفق الضوئي (light flux). [7, 8, 9]

### 3- مفهوم التدفق الضوئي (light flux): [7, 8, 9]

لنفترض أن النملة موجودة في المستوي، في النقطة  $M$ ، وتنتظر إلى منبع ضوئي في النقطة  $O$ ، الشكل (4). إن التدفق الضوئي للمنبع الضوئي يساوي إلى الاستطاعة مقسومة على محيط الدائرة [10-12]:



$$\mathfrak{F} = \frac{P}{2\pi r} = \frac{P}{C}$$

$$P_r = \mathfrak{F}L$$

شكل (4): نملة في النقطة  $M$  تنتظر لمنبع ضوئي في النقطة  $O$ .

وإذا كانت النملة تستخدم منظار فلكي (telescope) ذات فتحة  $L$  (سعة فتحة المنظار)، فإنها ستستقبل استطاعة  $P_r$  مقدارها  $P_r = \mathfrak{F}L$ . وفي الحالتين نجد أن الوضع مختلف، لدينا علاقتان مختلفتان:

| سطح مستوي                         | سطح منحنى (سطح كرة)  |
|-----------------------------------|--|
| $\mathfrak{F} = \frac{P}{2\pi r}$ | $\mathfrak{F} = \frac{P}{2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)}$ |

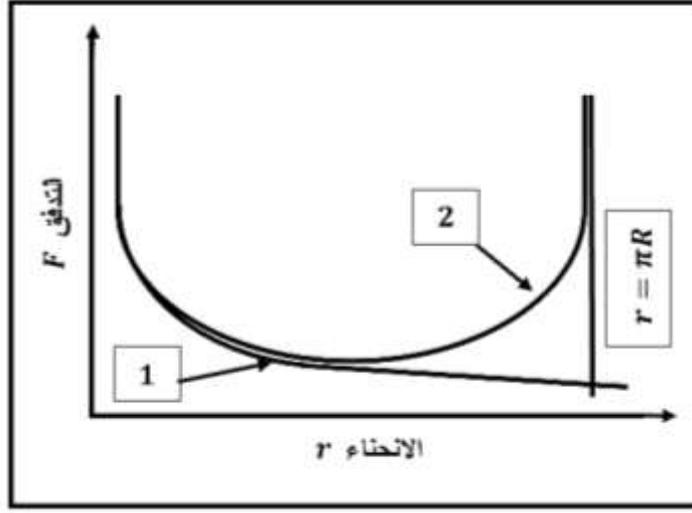
وهنا يمكن إبداء الملاحظة الآتية: في حال  $r \ll R \rightarrow \frac{r}{R} \ll 1$  (أي أن الزاوية صغيرة جداً، فالجيب يُستبدل بالزاوية ولكن مقدرة بالراديان) نجد في حالة سطح الكرة أن:

$$\mathfrak{F} = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right) \approx 2\pi R \left(\frac{r}{R}\right) \approx 2\pi r$$

أي في حالة  $r \ll R$  نجد علاقة تتجه نحو علاقة التدفق في المستوي.

وفي حال القيام بقياسات موضعية (محلية) حول النقطة  $O$  على سطح الكرة (التغيرات ستكون صغيرة حول تلك النقطة)، بتعبير آخر المسافة تكون صغيرة بالمقارنة مع نصف قطر الانحناء، ففي الواقع فإن النسبة بين المحيط ونصف القطر تقريباً نفسها في حالة المستوي. وهذه الملاحظة يمكن إبداءها بالنسبة للتدفق والمسافة. أي أن النسبة بين

التدفق والمسافة، في الحالتين (حالة المستوي وحالة الكرة)، قريبتين من بعضهما، أي عندما نبقى بالقرب من المنبع وعندما نبتعد نرى الفرق. ويمكن أن نمثل بيانياً تغير التدفق بتابعية المسافة فنجد الشكل الآتي، الشكل (5).



الشكل (5): يمثل تغير التدفق  $F$  بتابعية الانحناء  $r$ .

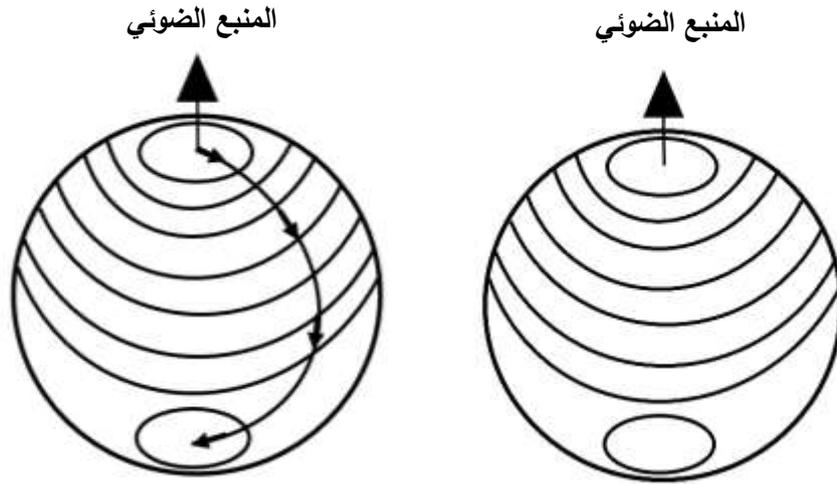
المنحني رقم (1) يمثل حالة سطح مستوي، بينما المنحني رقم (2) يمثل حالة سطح منحني (سطح كرة).

|   |  |
|---|--|
| <p>سطح مستوي</p> $F = \frac{P}{2\pi r}$ | <p>سطح منحني (سطح كرة)</p> $F = \frac{P}{2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)}$ |
|---|--|

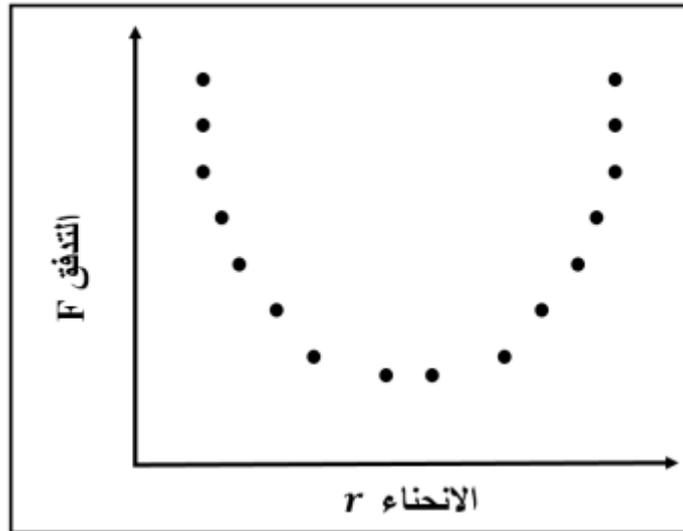
في حالة المستوي التدفق يتناقص باستمرار بتابعية المسافة  $r$ . أما بالنسبة للكرة، فنرى أن هناك شيئاً مفاجئاً غير متوقع (حالة فردية متميزة)، وهي عندما ينعدم المقدار  $\sin\left(\frac{r}{R}\right)$  فإننا نحصل على قيمة ملحوظة متميزة، وهذا عندما  $\frac{r}{R} = \pi$  أي أن  $r = \pi R$ ، ومنه فيكون  $\sin \pi = 0$ . ومن أجل هذه القيمة فالتدفق يتناهي إلى اللانهاية، انظر الشكل (5). عند القيم الصغيرة لـ  $r$  العلاقتان تسلكان نفس السلوك (تُعطيان نفس النتائج)، وعند ازدياد  $r$  فإن التباعد يبدأ، ويزداد بين العلاقتين كلما اقتربنا من قيمة  $R$ .

وكما ذكرنا أعلاه، فإن هناك شيء مفاجئ، وهو في حالة الكرة فإن التدفق يتناقص بتابعية  $r$  ثم يصل إلى قيمة صغرى، ومن ثم يبدأ بالزيادة عند ازدياد قيمة  $r$ ، أي أنه عند اجتياز مسافة معينة فإن المنابع البعيدة جداً تصبح أكثر إضاءة، أي أنها كلما كانت بعيدة كلما كانت أكثر إضاءة، فهذا غريب جداً، وهذا معاكس لإحساسنا وشعورنا. ومن الواضح أنه عندما نأخذ مصباح وتُبعدة عنا، نلاحظ أنه كلما كان بعيداً كلما كانت إضاءته ضعيفة (أقل لمعناً). في فضاء منحني فهذا يصبح خطأ، فالمنبع يصبح أكثر فأكثر إضاءة كلما ابتعدنا عنه.

يمكن توضيح ذلك على الرسم الآتي: لنتخيل أن منبع يُصدر ضوء، ونرسم انتشار الضوء في لحظات مختلفة. فنرى أنه بالتتابع مع زيادة المسافة التي يقطعها الضوء، أي محيط الدائرة يكبر بالتدرج حتى يصل إلى قيمة عظمى عند خط الاستواء، أي عند زيادة محيط الدائرة فإن التدفق يتناقص، وعند تجاوز خط الاستواء محيط الدائرة يبدأ بالتناقص ويصبح أصغر فأصغر، أي أن التدفق يزداد، لكي يصبح حالة فردية في لحظة الوصول إلى النقطة الواقعة على الجهة المقابلة من الكرة الأرضية (أي الجهة المعاكسة)، انظر الشكل (6). عند الوصول إلى الجهة المقابلة نجد عندها أن التدفق يأخذ قيمة لانهاية.



الشكل (6): يوضح تغير الإضاءة بتابعة محيط الدائرة. المنبع في الأعلى وتغير الإضاءة باتجاه الأسفل. كل الضوء الصادر عن المنبع يتموضع أو يتواجد في نقطة وحيدة حيث التدفق لانتهائي. الضوء في نقطة، فإن كمية الضوء في واحدة المساحة تصبح لانتهائية، أي أن التدفق في واحدة الطول يصبح لانتهائي، انظر الشكل (6). إذا أرادت النملة القيام بالكوسمولوجي، أي بدراسة علم الكون، في الفضاء حيث تعيش (فضاء مستوي أو فضاء منحنى)، فهذا الذي يمكنها القيام به هو اختيار (انتقاء) مجموعة من المصادر التي لها استطاعة معينة... كالشمعات المعيارية (Standard Candles) [18-22] حيث يكون لها نفس قيمة الاستطاعة  $P$ ، ومن ثم نرسم من أجل المصادر التي لها مسافات مختلفة (على أبعاد مختلفة) التدفق الظاهري الذي تستقبله، فسوف نحصل على نقط تتوزع بتلك الطريقة، انظر الشكل (7)، بشكل تقريبي. وإذا رأت النملة هذا، وبتمرير منحنى من النقاط نلاحظ منحنى مماثل للمنحنى المرسوم في الشكل (5). إن الشكل العام للمنحنى يسمح للنملة تحديد نصف قطر انحناء الفضاء الذي تعيش به النملة، وهذا ببساطة بمراقبة فلكية.

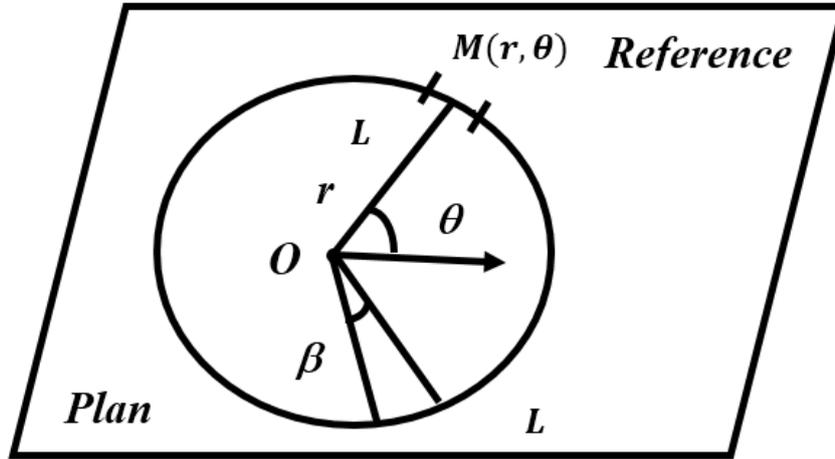


شكل (7): احتمال توزع النقاط المقاسة تجريبياً، أي بمراقبات فلكية-فيزيائية، وهذا مشابه للشكل العام للمنحنى رقم (2) المعطى في الشكل (6).

**ملاحظة:** يمكن تحديد المسافة بالاعتماد أو الاستناد إلى العلاقة بين التدفق والمسافة. إن استخدام "الشموع المعيارية" يستند في الحقيقة إلى أن التدفق يتغير وفق النسبة  $(\frac{1}{r^2})$ ، وإذا النملة طبقت تلك المحاكمة على فضاءها فإن التدفق يتغير وفق النسبة  $(\frac{1}{r})$ . وهكذا نربط التدفق بالمسافة. والعلاقة  $\mathcal{F} = \frac{P}{2\pi r}$  لا يمكن تطبيقها إلا في فضاء مستوي. وإذا كان الفضاء منحنى، التدفق والمسافة يتغيران. لا يمكن الخروج من هذه الدائرة المغلقة ليس أن نمثل التدفق بتابعية المسافة لكن بتابعية مقدار آخر وهو الانزياح نحو الأحمر (Redshift) [23-26]. كلما ابتعدت الأجسام الفلكية كلما كان الضوء الذي نستقبله منها سيكون منزاحاً نحو الأحمر (الكون في تمدد). وعادة نقوم بتحديد المسافة عن طريق دراسة تغير التدفق بتابعية الانزياح نحو الأحمر.

### 5- مفهوم القد الزاوي (the angular size):

وهناك طريقة أخرى لتحديد المسافة وذلك بالاستناد إلى مفهوم القد الزاوي للجسم. نذكر هنا أن القد الزاوي يرتبط بالمسافة بالعلاقة الآتية (سطح مستوي) [12-18]، الشكل (8).



شكل (8): توضيح مفهوم القد الزاوي:  $L$  قد الجسم أو قياس الجسم، الزاوية الظاهرية للجسم من النقطة  $O$ .

$$\beta = \frac{L}{r}$$

أما بالنسبة لسطح منحنى (سطح كرة)، بفرض أنه لدينا جسم قياسه  $L$  فالسؤال الذي يُطرح هو: ما هي الزاوية الظاهرية للجسم من النقطة  $O$ ؟ نسمي الزاوية  $\beta$ ، انظر الشكل (9)، فالعلاقة التي تسمح بحساب الزاوية  $\beta$  هي (انطلاقاً من القاعدة الثلاثية):

$$\frac{L \text{ (قد الجسم)}}{C \text{ (محيط الدائرة)}} = \frac{\beta}{2\pi} \rightarrow \beta = 2\pi \frac{L}{C} = \frac{2\pi L}{2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)}$$

$$\rightarrow \beta = \frac{L}{R \sin\left(\frac{r}{R}\right)}$$

وهكذا نجد سلوك (تغير)  $\beta$  بتابعية المقدار  $\sin\left(\frac{r}{R}\right)$ ، وفي حال  $r \ll R$  نجد أن:

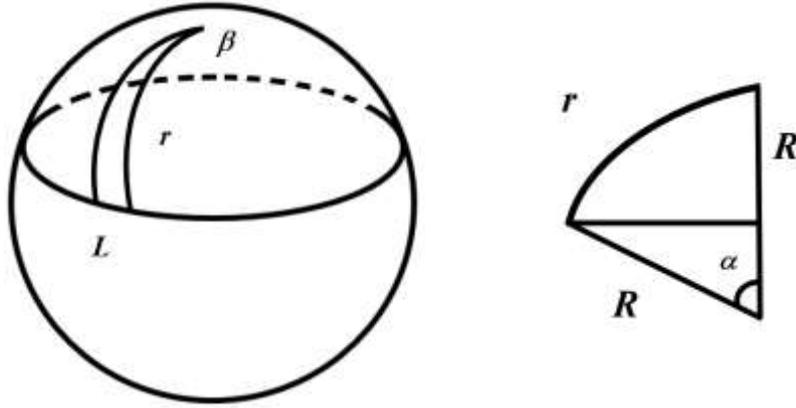
$$\sin\left(\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R}$$

فنجد العلاقة في حالة السطح المستوي:

$$\beta = \frac{L}{R \left(\frac{r}{R}\right)} = \frac{L}{r}$$

وإذا رسمنا سلوك  $\beta$  بتابعة  $r$  نجد منحنيين مشابهين لما رأيناه سابقاً، انظر الشكل (5). أي أن للنملة عدة طرق لتحديد انحناء الفضاء الذي تعيش فيه. وهذه طريقة أخرى لدراسة القدر الزاوي لجسم الذي يعتبر جسم فيزيائي في الحالتين.

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| سطح مستوي<br>$\beta = \frac{L}{r}$ | سطح منحنى (سطح كرة)<br>$\beta = \frac{L}{R \sin\left(\frac{r}{R}\right)}$ |
|------------------------------------|---|



شكل (9): توضيح مفهوم القدر الزاوي:  $L$  قد الجسم أو قياس الجسم، الزاوية الظاهرية للجسم من النقطة  $O$ .

أما الآن فيتم التطرق إلى أمور أكثر تقنية للغاية. سنأخذ الآن بدل النقطة نقطتين والسؤال الذي يطرح هو: ما هي المسافة بين النقطتين؟ وهذا يقودنا للتكلم عن مفهوم المقياس بين نقطتين في الفضاء.

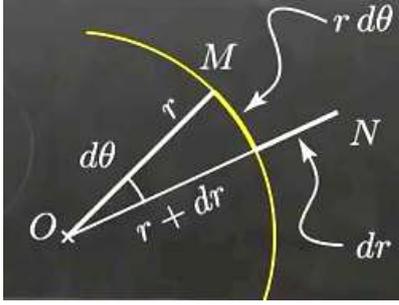
### 6- مفهوم المقياس (the metric) (المسافة بين نقطتين في الفضاء):

إذاً، الآن فيتم التطرق إلى أمور ذات طابع أكثر تقنية للغاية. سنأخذ الآن بدل النقطة نقطتين إحداثياتهما وفق الإحداثيات القطبية هما [1-9]:

$$M(r, \theta) \text{ \& } N(r + dr, \theta + d\theta)$$

ولنسمي المسافة بين النقطتين  $d\ell$ ، وسنهتم بعلاقة  $d\ell$  بكل من الإحداثيات  $(r, dr, \theta, d\theta)$ ، انظر الشكل (10).

سطح مستوي



$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

بحسب فيثاغورث

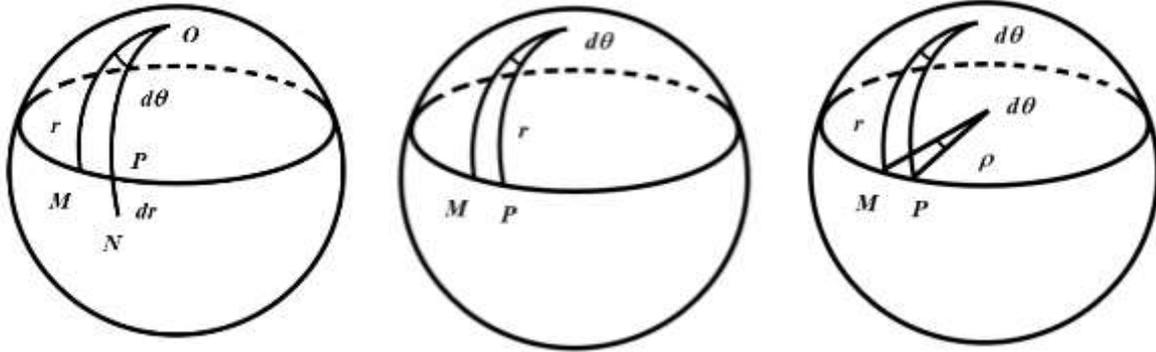
شكل (10): توضيح آلية حساب المسافة بين نقطتين في الإحداثيات القطبية (سطح مستوي).

عندما تكون النقطتان قريبتان من بعضهما البعض فالمسافة بينهما تكون صغيرة جداً، والوتر يصبح تقريباً قطعة مستقيمة. إذا كبرنا الشكل فيكون لدينا الشكل (10). والذي يهنا هو المسافة  $MN$ . بحسب نظرية فيثاغورث يكون لدينا:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

وهذه العلاقة بين  $d\ell$  والإحداثيات  $(r, dr, \theta, d\theta)$ .

الآن سنقوم بنفس الشيء بالنسبة للكرة، انظر الشكل (11). نرسم الدائرة المارة بالنقطة  $M$ . والذي يهنا هنا هو المسافة  $MP$ . انطلاقاً من القاعدة الثلاثية (كما رأينا سابقاً)، أي نقوم بنفس المحاكمة السابقة، فنجد:



$$\frac{MP}{C} = \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow MP = \frac{C}{2\pi} d\theta = R \sin\left(\frac{r}{R}\right) d\theta = \rho d\theta$$

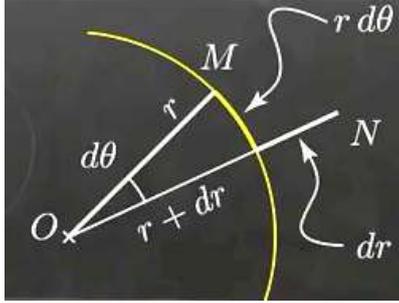
حيث  $MP$  قوس من دائرة نصف قطرها  $\rho$

شكل (11): توضيح آلية حساب المسافة بين نقطتين في الإحداثيات القطبية (سطح كروي).

وعندما تكون المسافة بين النقطتين  $M$  و  $N$  صغيرة فالقوس يتناهي إلى قطعة مستقيمة وتصبح الزاوية في النقطة  $P$  قائمة بين  $MN$  و  $dr$ ، أي أن المثلث  $(MPN)$  قائم الزاوية في  $P$ . وبحسب نظرية فيثاغورث يكون لدينا:

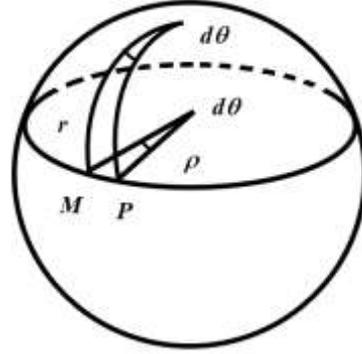
$$d\ell^2 = dr^2 + \rho^2 d\theta^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$$

وهي علاقة  $d\ell^2$ . وهذه العلاقة بين المسافة  $d\ell$  والإحداثيات، وتسمى بالعلاقة المقياسية (Metric relation) التي تسمح بمعرفة المسافة انطلاقاً من معرفة الإحداثيات، والعوامل أو المعاملات. أما كل من  $dr^2$  و  $d\theta^2$  تُدعى بعوامل أو معاملات المقياس (Metric coefficient) حيث تلعب دوراً مهماً جداً في "النظرية النسبية العامة" لأينشتاين، التي تقول إن الجاذبية هي التي تحدد هذه العوامل، أو بشكل أقوى من ذلك، يمكن القول فيزيائياً إن الجاذبية هي تلك العوامل. إذن، هذه العوامل تلعب دوراً مهماً جداً إذا استطعنا معرفتهم في الفضاء الذي نعيش به، وهذا يشير إلى هندسة تلك الفضاء. ونعطي في الشكل (12) مقارنة بين قيمة  $d\ell^2$  في حالة مستوي وفي حالة كرة.



مستوي - Plane

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$



كرة - Sphere

$$d\ell^2 = dr^2 + \rho^2 d\theta^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$$

شكل (12): مقارنة بين قيمة  $d\ell^2$  في حالة مستوي وفي حالة كرة.

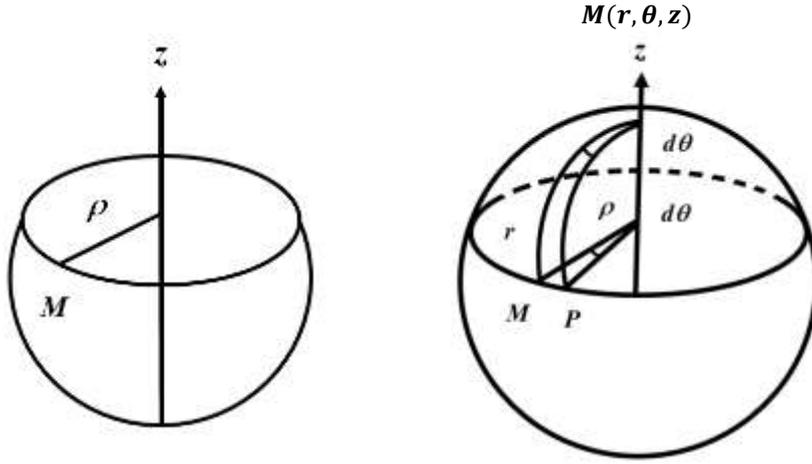
بالمقارنة بين العلاقتين السابقتين نجد أن المقدار  $r^2$  في المستوي تم استبداله في الفضاء المنحني بالمقدار  $R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)$ ، في الكرة (السطح المنحني). ومعرفة المقدارين مهم جداً لمعرفة إذا كنا في فضاء مستوي أو فضاء منحني.

والآن في حالة فضاء ثلاثي الأبعاد فماذا يكون لدينا؟ في هذه الحالة تكون لدينا المسافة بين النقطتين  $M$  و  $N$  في الإحداثيات الديكارتية على الشكل:

$$MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2$$

ويجب الانتباه هنا إلى أن المسافة  $MN$  التي تجتازها النملة لا تُعطى بالعلاقة السابقة، حيث تلك العلاقة تعطي قيمة الوتر وليس القوس. فالمسافة التي تجتازها النملة بين النقطتين  $M$  و  $N$  هي القوس وليس الوتر  $MN$ . وإذا كانت النقطتان قريبتان من بعضهما البعض فإن الفرق بين الوتر والقوس مهم، أي أن حساب إحداثيهما يكفي، أي يعود نفس الشيء.

لهذه الغاية سنأخذ الإحداثيات الأسطوانية بدلاً من الإحداثيات الديكارتية، حيث نأخذ المحور  $OZ$  موجهاً نحو الأعلى انظر الشكل (13)، محور قطبي للكرة المعتبرة. فيكون لدينا إحداثيات  $M(r, \theta, z)$ ، حيث  $(r, \theta)$  إحداثيات قطبية عمودية على المحور  $OZ$  الذي يمثل أيضاً محور الكرة. فتكون المسافة في فضاء ثلاثي الأبعاد مساوية:



إحداثيات أسطوانية - Cylindrical coordinates

شكل (13): فضاء ثلاثي الأبعاد. النقطة  $M$  تقع على محيط الدائرة الذي نصف قطرها  $\rho$  (مستوى الدائرة عمودي على المحور  $oz$ ).

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$$

والمقدار  $d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$  هو المقدار الذي وجدناه سابقاً. من جهة أخرى، فإن  $\rho$  و  $z$  مرتبطان ببعضهما وفق العلاقة  $\rho^2 + z^2 = R^2$ ، وذلك لأن النقطتين  $M$  و  $N$  تقعان على سطح الكرة. بمفاضلة العلاقة (نصف قطر  $R$  الكرة ثابت):

$$\rho^2 + z^2 = R^2 \rightarrow 2\rho d\rho + 2z dz = 0 \rightarrow dz = -\frac{\rho d\rho}{z}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\rho^2 d\rho^2}{z^2}$$

وبتعويض  $z^2 = R^2 - \rho^2$  وبالتبسيط نجد:

$$d\ell^2 = \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 d\theta^2$$

وهذه هي العلاقة التي تُعطي المسافة  $d\ell$  في الإحداثيات الأسطوانية. وهذه العلاقة غير عملية بالنسبة للنملة لأنها تحتوي على  $\rho$  حيث النملة ليس لها القدرة للوصول إليها لأن  $\rho$  يقع داخل الكرة بينما النملة على سطحها. ولكن الغاية من ذلك هو أنه يمكننا التعبير عن  $d\ell^2$  بأكثر من طريقة؛ في الإحداثيات القطبية للكرة وللمستوي وجدنا ما يلي:

|   |                         |
|---|-------------------------|
| $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$  | مستوي (إحداثيات قطبية)  |
| $d\ell^2 = dr^2 + \rho^2 d\theta^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$ | كرة (إحداثيات قطبية)    |
| $d\ell^2 = \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 d\theta^2$                           | كرة (إحداثيات أسطوانية) |

بالمقارنة نجد أن العامل أمام كل من  $dr^2$  و  $d\theta^2$  يتغير من حالة لأخرى. إذاً يمكننا حساب هذا المقياس في حالة الكرة الذي يربط المسافة بتغير الإحداثيات، أي أن المقياس يصف الفضاء حيث نعيش.

فلنتقل الآن إلى الفيزياء النسبية حيث سنهتم بما يدعى بالمجال. ويُعرّف المجال في النظرية النسبية الخاصة بالعلاقة:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2$$

حيث  $ds$  يُدعى بـ "المجال النسبي" الذي يلعب دور مهم في النظرية النسبية الخاصة، وأيضاً في النسبية العامة لأنها بدورها تعتمد على النظرية النسبية الخاصة.  $c$  سرعة الضوء في الخلاء، و  $t$  الزمن.

فالنملة التي تقوم "بالكوسمولوجي النسبية" في الكون الذي تعيش به، وفي حالة كرة على سبيل المثال نجد [13-17]:

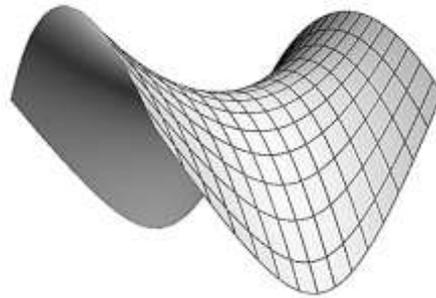
|  |                    |
|--|--------------------|
| $ds^2 = c^2 dt^2 - \left[ dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2 \right]$ | نملة في فضاء منحنى |
| $ds^2 = c^2 dt^2 - \left( \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 d\theta^2 \right)$ |                    |

فالسؤال الذي يمكن طرحه، أو الذي يمكن أن تطرحه النملة على نفسها هو: نحن نعيش في كون متجانس ومتساوي المناحي، فما هو الشكل الأكثر شمولية (أو الأكثر عمومية) للعلاقة بين  $ds^2$  والإحداثيات  $(r, \theta, t)$ ؟ نلاحظ أن الشكل العام له الشكل السابق والذي يمكننا كتابته على النحو الآتي:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + f(r)^2 d\theta^2]$$

يمكننا البرهان أنه والحالة هكذا حيث لدينا ثلاثة خيارات من أجل  $f(r)$ :

|          |                                   |   |
|----------|-----------------------------------|---|
| $f(r) =$ | $R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$  | حالة كرة  |
|          | $r$                               | حالة مستوي  |
|          | $R \sinh\left(\frac{r}{R}\right)$ | حالة رياضياً ممكنة وهي حالة هندسياً مختلفة قليلاً عن الكرة وهي حالة سرج حصان، انظر الشكل (14) |



شكل (14): حالة سرج حصان.

ندور القوس لرسم دائرة على الشكل (14)، حيث على تلك السطح الذي هو عبارة عن سرج حصان نلاحظ أن محيط الدائرة أكبر من المقدار  $2\pi r$ ، حيث هنا السطح يمتلك انحناء سالب، وهذا يمكن أن يحدث في حالة فضاء بيديين. وإذا ترجمنا الحالات الثلاث في إحداثيات فيها  $\rho$  فيغير هذا فقط إشارة المقدار  $R^2 - \rho^2$ .

|  |  |
|--|--|
| $ds^2 = c^2 dt^2 - \left( \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 d\theta^2 \right)$ | كرة  |
| $ds^2 = c^2 dt^2 - (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)$                                       | مستوي: نحصل عليها من الحالة السابقة (حالة كرة) من أجل: |

|  |   |
|--|---|
|  | $R \rightarrow \infty \rightarrow \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} \rightarrow d\rho^2$ |
| $ds^2 = c^2 dt^2 - \left( \frac{R^2 d\rho^2}{R^2 + \rho^2} + \rho^2 d\theta^2 \right)$ | تُستبدل الإشارة السالبة في حالة الكرة بإشارة موجبة                                      |

آخر ملاحظة حول كل ذلك: يمكن أن نتخيل حالة دون كسر التناظر، أي باعتبار الكون متجانس ومتساوي المناحي، النملة يمكنها أن تتخيل أن نصف قطر الكرة التي تعيش عليها يتعلق بالزمن  $t$ ، أي استبدال  $R^2(t)$ :

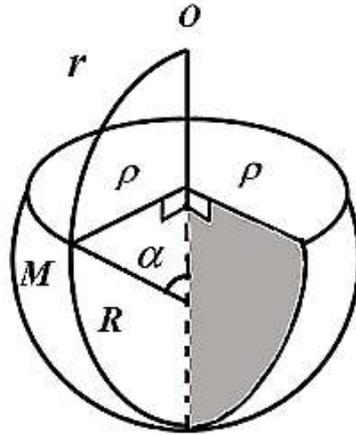
$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left( \frac{R^2(t) d\rho^2}{R^2(t) - \rho^2} + \rho^2 d\theta^2 \right)$$

هذا يعني أن الكرة التي تعيش عليها النملة (أي تتواجد على سطحها) يمكن أن تغير نصف قطرها مع الزمن، أي يمكن أن تتمدد أو تنقلص مع كون متجانس ومتساوي المناحي.

وأخيراً، فإن المقياس (the metric) الأكثر شمولية أو عمومية التي يمكن للنملة كتابته في كونها المتجانس والمتساوي المناحي (من هذا النوع أو النموذج)، يمكن كتابته بشكل آخر كما يلي:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2(t)} + \frac{\rho^2}{R^2(t)} d\theta^2 \right)$$

وبالنهاية سوف نغير المتحولات، أي ندخل متحول قطري آخر هو  $\rho$  (إحداثيات قطرية)، انظر الشكل (15).



شكل (15): كرة نصف قطرها  $R$ .

إذا كان لدينا كرة تتمدد تنتفخ، فإن نصف قطرها يكبر  $R$  وهذا يؤدي إلى زيادة  $\rho$  بنفس النسبة، وبالتالي فإن إحداثيات  $R$  تتغير عند انتفاخ الكرة. ويمكن ادخال إحداثيات بطريقة تشير إلى أن وضع النقطة  $M$  أكثر ثباتاً، أي يصبح غير حساس لنصف قطر الكرة. ومن أجل ذلك نأخذ:

$$\rho' \equiv \frac{\rho}{R}$$

أي أن النسبة معطاة بالزاوية  $\alpha$ . عندما يتغير نصف قطر الكرة (زيادة أو نقصاناً)، نقطة مرتبطة بالكرة (على سطح الكرة غير متحركة ملتصقة بها) مثل  $M$  فإن إحداثياتها  $\rho$  و  $\alpha$  لا تتغير، وهذه الإحداثيات تدعى بإحداثيات comobile [27-36]. هذا يعني إذا كان الجسم مرتبط أو ثابت أو ملتصق بطريقة ما في الفضاء حيث هو موجود

(يعيش) فإن إحدائياته ستكون غير حساسة لتمدد أو لتقلص السطح، أي غير حساسة لتغير نصف قطر الكرة في حالتنا هذه. وإذا أدخلنا تلك الإحداثيات في المعادلة الأخيرة نجد:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{d\rho'^2}{1 - \rho'^2} + \rho'^2 d\theta^2 \right)$$

وهكذا يكون لدينا علاقة جاذبية لأنه نجد الحد:

$$\left( \frac{d\rho'^2}{1 - \rho'^2} + \rho'^2 d\theta^2 \right)$$

الذي يُعطي هندسة الكرة بنصف قطر أولي (بدائي مُعطى أو معروف)، وكل ما يتعلق أو يخص القدر الفيزيائي (physical size) للكرة التي نعيش فيها، محتوى في الحد  $R^2(t)$ . وهكذا، في الكون الذي نعيش فيه، يمكننا أيضاً كتابة المقياس بهذا الشكل، وكوننا نعيش في كون يتمدد أم لا فهو مُحدد بالعامل  $R^2(t)$  الذي يُسمى بالعامل الزمني (time factor) الذي يصف تطور أو تغير الكون بتابعية الزمن.

### الانزياح نحو الأحمر:

1. الانزياح نحو الأحمر والمسافة [23, 27]:

العلاقة التقليدية بين الانزياح نحو الأحمر  $Z$  والمسافة في فضاء مستوي هي:

$$d_{\text{flat}} = \frac{cZ}{H_0}$$

- $c$  سرعة الضوء.
- $H_0$  ثابت هابل.

في فضاء منحنى، يتم تعديل المسافة باستخدام نصف قطر الانحناء  $R$

$$d_{\text{curved}} = \left( \frac{d_{\text{flat}}}{R} \right) R \arcsin$$

بإعادة صياغة العلاقة

$$d_{\text{curved}} = n \left( \frac{cZ}{H_0 R} \right) R \arcsin$$

يتم دمج العلاقة الناتجة للمسافة المنحنية مع معادلة التدفق:

التدفق الظاهري هو العلاقة بين الاستطاعة المطلقة  $P$  للمنبع الضوئي والمسافة بين المصدر والمراقب. في الفضاء المستوي:

$$F_{\text{curved}} = \frac{P}{4\pi d^2}$$

- التدفق الظاهري.  $(W/m^2)$   $F$
- الاستطاعة المطلقة.  $(W)$   $P$
- المسافة إلى المصدر.  $(m)$   $d$

$$F_{\text{curved}} = \frac{P}{\left( \frac{d_{\text{flat}}}{R} \right)^2 4\pi R^2 \sin} = \frac{P}{\left( \frac{cZ}{H_0 R} \right)^2 4\pi R^2 \sin}$$

يتم حساب التدفق باستخدام العامل الزاوي  $\sin \left( \frac{d_{\text{flat}}}{R} \right)$  الذي يُظهر تأثير الانحناء.

أهمية هذا الدمج:

. تفسير الانزياح نحو الأحمر بتأثير الانحناء:

$$F_{\text{curved}} \approx F_{\text{flat}} \text{ أي } \left(\frac{cz}{H_0 R}\right)^2 \sin \approx \left(\frac{cz}{H_0 R}\right)^2 \text{ صغير } (z)$$

عند مسافات الصغيرة (z) :  $\left(\frac{cz}{H_0 R}\right)^2 \sin$  : يصبح أصغر، مما يُظهر تأثير الانحناء على التدفق بشكل أوضح مقارنة بالفضاء المستوي.

يُصبح تأثير الانحناء ملحوظاً، حيث يؤدي  $\sin^2$  إلى تقليل التدفق مقارنة بالنموذج المستوي، مما يُظهر طبيعة الفضاء المنحني.

استخدام العلاقة المعدلة يساعد في تحسين المسافات المحسوبة بناءً على الانزياح نحو الأحمر، مما يؤدي إلى تحسين تقدير ثابت هابل  $H_0$ . [27-32]

برنامج الحسابات بلغة الفورتران 90

```
PROGRAM CurvedSpaceFlux
  IMPLICIT NONE
  INTEGER, PARAMETER :: n = 100
  REAL(8) :: c, H0, R, P
  REAL(8), DIMENSION(n) :: z, d_flat, d_curved, F_flat, F_curved
  INTEGER :: i
  REAL(8) :: pi

  ! Constants
  c = 3.0D8      ! Speed of light (m/s)
  H0 = 70.0D0    ! Hubble constant (km/s/Mpc)
  R = 1.0D27     ! Curvature radius (m)
  P = 1.0D26     ! Absolute power of source (W)
  pi = 3.141592653589793D0

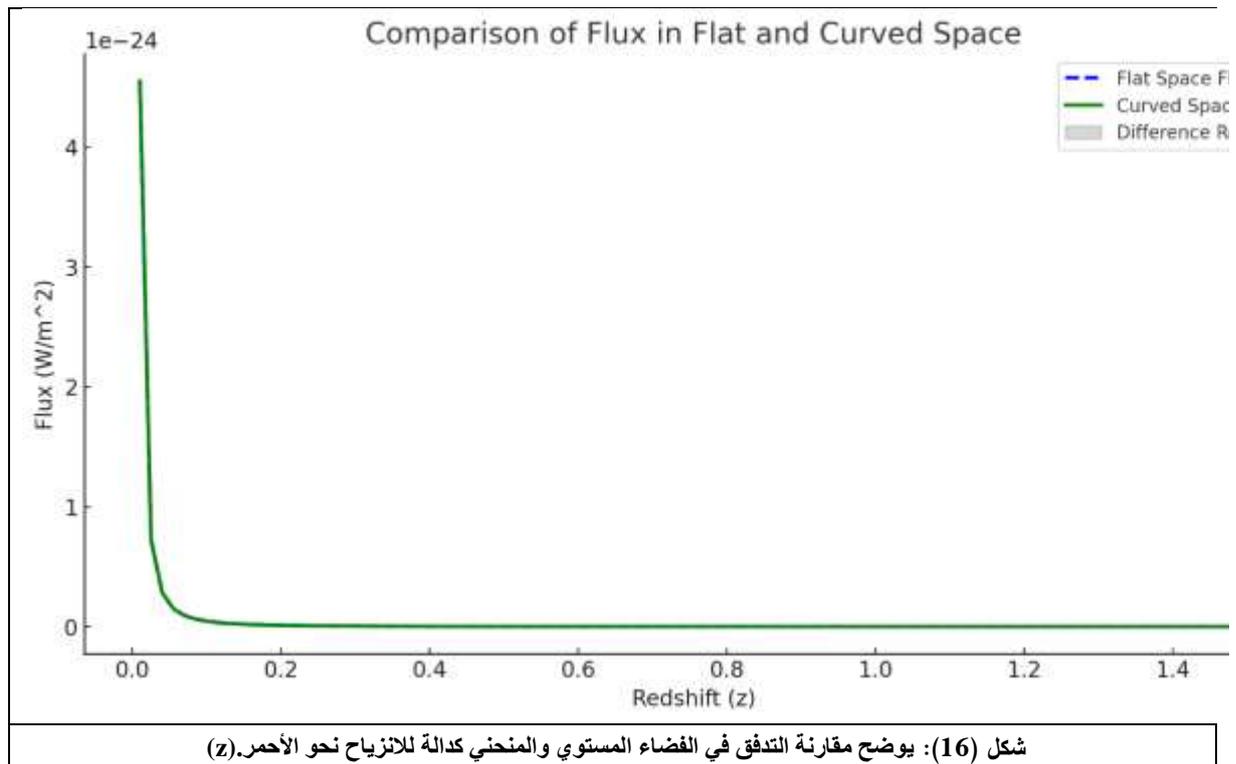
  ! Generate redshift values
  DO i = 1, n
    z(i) = 0.01D0 + (1.5D0 - 0.01D0) * REAL(i - 1) / REAL(n - 1)
  END DO

  ! Calculate distances and fluxes
  DO i = 1, n
    d_flat(i) = c * z(i) / (H0 * 1.0D3 / 3.086D22) ! Flat distance (meters)
    d_curved(i) = R * ASIN(d_flat(i) / R) ! Curved distance (meters)
    F_flat(i) = P / (4.0D0 * pi * d_flat(i)**2) ! Flat space flux
    F_curved(i) = P / (4.0D0 * pi * R**2 * SIN(d_curved(i) / R)**2) ! Curved space flux
  END DO

  ! Output results
  PRINT *, " Redshift   d_flat (m)   d_curved (m)  F_flat (W/m^2)  F_curved (W/m^2)"
  DO i = 1, n
    PRINT "(F10.3, 3E20.8)", z(i), d_flat(i), d_curved(i), F_flat(i), F_curved(i)
  END DO

END PROGRAM CurvedSpaceFlux
```

| $(W/m^2)_{\text{curved}} F'$ | $(W/m^2)_{\text{flat}} F'$ | $(m)_{\text{curved}} d$ | $(m)_{\text{flat}} d$ | (z) Redshift |
|------------------------------|----------------------------|-------------------------|-----------------------|--------------|
| $23-10 \times 4.47$          | $23-10 \times 4.47$        | $23 10 \times 4.23$     | $23 10 \times 4.23$   | 0.01         |
| $25-10 \times 4.41$          | $25-10 \times 4.47$        | $24 10 \times 4.19$     | $24 10 \times 4.23$   | 0.10         |
| $26-10 \times 1.05$          | $26-10 \times 1.12$        | $25 10 \times 2.06$     | $25 10 \times 2.12$   | 0.50         |
| $27-10 \times 2.47$          | $27-10 \times 2.79$        | $25 10 \times 4.07$     | $25 10 \times 4.23$   | 1.00         |
| $27-10 \times 1.03$          | $27-10 \times 1.24$        | $25 10 \times 5.99$     | $25 10 \times 6.35$   | 1.50         |



### الاستنتاجات والتوصيات:

إن التحليل الرياضي والفيزيائي للتدفق في حالة المستوي يتناقص باستمرار بتابعة المسافة  $r$ . أما بالنسبة للكرة، فنرى أن هناك شيئاً مفاجئاً غير متوقع (حالة فردية متميزة)، وهي عندما ينعدم المقدار  $\sin\left(\frac{r}{R}\right)$  فإننا نحصل على قيمة ملحوظة متميزة، وهذا عندما  $\frac{r}{R} = \pi$  أي أن  $r = \pi R$ ، ومنه فيكون  $\sin \pi = 0$ . ومن أجل هذه القيمة فالتدفق يتناهي إلى اللانهاية، انظر الشكل (4). عند القيم الصغيرة لـ  $r$  العلاقتان تسلكان نفس السلوك (تُعطيان نفس النتائج)، وعند ازدياد  $r$  فإن التباعد يبدأ، ويزداد بين العلاقتين كلما اقتربنا من قيمة  $R$ .

وكما ذكرنا أعلاه، فإن هناك شيء مفاجئ، وهو في حالة الكرة فإن التدفق يتناقص بتابعة  $r$  ثم يصل إلى قيمة صغرى، ومن ثم يبدأ بالزيادة عند ازدياد قيمة  $r$ ، أي أنه عند اجتياز مسافة معينة فإن المنابع البعيدة جداً تصبح أكثر إضاءة، أي أنها كلما كانت بعيدة كلما كانت أكثر إضاءة، فهذا غريب جداً، وهذا معاكس لإحساسنا وشعورنا. ومن

الواضح أنه عندما نأخذ مصباح ونُبَعده عنا، نلاحظ أنه كلما كان بعيداً كلما كانت إضاءته ضعيفة (أقل لمعاناً). في فضاء منحنى فهذا يصبح خطأ، فالمنبع يصبح أكثر فأكثر إضاءة كلما ابتعدنا عنه. ونشير هنا إلى إن المراقبات الفلكية، ببساطة، تسمح بتحديد نصف قطر انحناء الفضاء الذي نعيش به.

إن حساب المسافة بين نقطتين أي مفهوم المقياس (the metric) في فضاء منحنى يلعب دور مهم في معرفة هندسة الكون الذي نعيش فيه، أي هندسة الكرة بنصف قطر أولي (بدائي مُعطى أو معروف)، وكل ما يتعلق أو يخص القدر الفيزيائي (physical size) للكرة التي نعيش فيها، محتوى في الحد  $R^2(t)$ . وكوننا نعيش في كون يتمدد أم لا فهو مُحدد بالعامل  $R^2(t)$  الذي يُسمى بالعامل الزمني (time factor) الذي يصف تطور أو تغير الكون بتابعية الزمن.

يصبح تأثير الانحناء واضحاً عند الانزياحات العالية. ( $z > 0.5$ )

التدفق الظاهري للمصادر البعيدة في الفضاء المنحني أعلى مما هو عليه في الفضاء المستوي، مما ينعكس على تقدير المسافات وثابت هابل.

يمكن استخدام هذه النتائج لتحديد نصف قطر الانحناء (R) بدقة أعلى عن طريق مقارنة التدفقات المرصودة بالتماذج النظرية.

## References

1. Peebles PJ. Principes de la cosmologie physique. Princeton: Presses universitaires de Princeton; 1993.
2. Hogg DW. Mesures de distance en cosmologie. 2000.
3. Etherington IMH. LX. Sur la définition de la distance dans la relativité générale. Philosophical Magazine. 1933;15(7):1-12.
4. Dodelson S. Cosmologie moderne. Paris: Presse académique; 2003.
5. Bourguignon JP. Espaces courbes. In: Michaud Y, editor. Qu'est-ce que l'univers? Vol. 4. Paris: Odile Jacob; 2001. p. 152-63.
6. Bridson M, Haefliger A. Metric spaces of non-positive curvature. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 319. Berlin: Springer; 1999.
7. Gromov M. Sign and geometric meaning of curvature. Rend Sem Mat Fis Milano. 1994;61:9-123.
8. de la Harpe P. Topics in geometric group theory. Chicago: University of Chicago Press; 2000.
9. Monastyrsky M. Riemann, topology, and physics. 2nd ed. Basel: Birkhäuser; 1999.
10. Taillet R, Villain L, Fevre P. Dictionnaire de physique. Bruxelles: De Boeck; 2013.
11. Chandrasekhar S. The mathematical theory of black holes. Oxford: Oxford University Press; 1983.
12. Gregory R. L'œil et le cerveau: la psychologie de la vision [Eye and Brain: The Psychology of Seeing]. 1st ed. Bruxelles: De Boeck Université; 2000.
13. Derek J, Raine E, Thomas G. Une introduction à la science de la cosmologie. 2001.
14. Barrau A, Grain J. Relativité Générale. Paris: Dunod; 2011.
15. RJH, Haldik. Introduction à la Relativité Générale. Paris: Ellipses; 2006.
16. Hobson M, Efstathiou G, Lasenby A. Relativité Générale. Bruxelles: De Boeck; 2010.
17. Schutz B. A first course in General Relativity. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2009.

18. Luizet M. Les Céphéides considérées comme étoiles doubles, avec une monographie de l'étoile variable @ Céphée. Lyon: A. Rey; 1912.
19. Benedict GF, McArthur BE, Feast MW, Barnes TG, Harrison TE, Patterson RJ, et al. Hubble Space Telescope Fine Guidance Sensor Parallaxes of Galactic Cepheid Variable Stars: Period-Luminosity Relations. *Astronomical Journal*. 2007;133(4):1810-27.
20. Majaess DJ, Turner DG, Lane DJ. Assessing potential cluster Cepheids from a new distance and reddening parametrization and Two Micron All Sky Survey photometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2008;390(4):1539-48.
21. Mould JR, Ford HC, Huchra J, Kennicutt RC Jr, et al. A Database of Cepheid Distance Moduli and Tip of the Red Giant Branch, Globular Cluster Luminosity Function, Planetary Nebula Luminosity Function, and Surface Brightness Fluctuation Data Useful for Distance Determinations. *Astrophysical Journal Supplement Series*. 2000;128(2):1-14.
22. Freedman WL, Madore BF, Hatt D, Hoyt TJ, Jang IS, et al. The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch. *Astrophysical Journal*. 2019;882(1):1-20.
23. Hubble E. *The Realm of the Nebulae*. New Haven: Yale University Press; 1936.
24. Harrison ER. *Cosmology, The Science of the Universe*. Cambridge: Cambridge University Press; 1981. p. 275-6.
25. Roos M. *Introduction to Cosmology*. 4th ed. Chichester: Wiley; 2003. p. 92.
26. Davis TM, Lineweaver CH. Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*. 2004;21(1):97-109.
27. Webb S. *Measuring the Universe: The Cosmological Distance Ladder*. Berlin: Springer; 1999. p. 263.
28. Lachièze-Rey M, Gunzig E. *The Cosmological Background Radiation*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.
29. Wright EL. Homogeneity and Isotropy. 2009. Available from: URL. Accessed 28 February 2015.
30. Petkov V. *Relativity and the Nature of Spacetime*. Berlin: Springer; 2009. p. 219.
31. Baez J, Bunn E. Preliminaries. University of California; 2006. Available from: URL. Accessed 28 February 2015.
32. Weinberg S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: Wiley-VCH; 1972. p. 415.