مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (3) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (3) 2015

طرائق المؤثرات في دراسة الاهتزازات النظامية لمنظومة m سائل لزج شعري

الدكتور وديع علي*
الدكتور محمّد سويقات**
خضر سليمان***

(تاريخ الإيداع 17 / 3 / 2015. قُبِل للنشر في 19 / 5 /2015)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة الاهتزازات النظامية لمجموعة من السوائل اللزجة الشعرية في أنبوب.

أثبتنا نتائج تصف طبيعة طيف المسألة المدروسة في حالة أنبوب دوّار وأنّ جملة العناصر الجذرية (العناصر الخاصة والعناصر المرتبطة) تشكل قاعدة آبل – ليدسكي.

استخدمنا بعض النتائج من نظرية المؤثرات مترافقة ذاتياً في دراسة طبيعة طيف المسألة المدروسة في حالة أنبوب ثابت.

الكلمات المفتاحية: جمل هيدروديناميكية ، فضاء هلبرت ، مسائل قيم خاصة ، طيف مؤثر، المترك غير المعرّف، معادلات تفاضلية في فضاء هلبرت.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.
***طالب دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (3) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (3) 2015

Operators approaches in studying the problem on normal oscillations of system of m capillary viscous fluid

Dr. Wadee Ali*
Dr. Mohamed Souecatt**
Kheder Souleman***

(Received 17 / 3 / 2015. Accepted 19 / 5 /2015)

☐ ABSTRACT ☐

Our aim of this paper is studying the problem on normal oscillations of system of capillary viscous fluids in vessel.

We prove results about the spectrum of the problem for rotating vessel and prove that the systems of root elements (eigenelements and associated elements) form an Abel-Lidsky basis.

Also , we use some results from the theory of J-self adjoint operators in studying the spectrum of the problem for non-rotating vessel.

Key words: Hydrodynamical systems , Hilbert space, Eigenvalue problems , Operator Spectrum , indefinite metrics , differential equation in Hilbert space.

***Associate professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.**
****professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.**

مقدمة:

قدمت الكثير من الابحاث حول استخدام طرائق التحليل التابعي في ميكانيك السوائل [1,2,3] . أما في هذا البحث فنقوم بدراسة المسألة الطيفية لجملة من السوائل اللزجة الشعرية في أنبوب دوّار باستخدام بعض طرائق نظرية المؤثرات نذكر منها: الإسقاط المعامد وطيف المؤثر...بدايةً ، نعرض بإيجاز ما تم التوصل إليه في [4] من نتائج وخواص لمؤثرات نستخدمها في دراستنا الحالية، ثم ندرس حلول مسألة الاهتزازات النظامية تحت شرط الاستقرار الساكن للجملة أي المسألة التي حلولها من الشكل: $\exp(-\lambda t), \lambda \in \mathbb{C}$ حيث توصلنا إلى المبرهنات $(6),(8),(9),(10)$.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة استقرار الحركات الصغيرة لمجموعة من السوائل اللزجة الشعرية في أنبوب دوّار وتحت شرط معيّن ، وذلك من خلال تشكيل المسألة الطيفية الموافقة لمسألة كوشي التي تم التوصل لها في [4] وباستخدام بعض طرائق نظرية المؤثرات مثل طريقة الإسقاط المُعامد والنظرية الطيفية .

تجدر الاشارة إلى أنّ أهمية البحث تكمن في تطبيقاته العملية في حل الكثير من القضايا العلمية الفيزيائية والهندسية.

طرائق البحث ومواده:

نعرض أهم ما تم التوصل إليه في العمل [4] ، ونعطي بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي سنستخدمها في دراسة المسألة الطيفية للجملة المدروسة وذلك بالاعتماد على المراجع [1,2,3,5,6] .

تشكيل مسألة القيمة الحدية الابتدائية:

نفرض في حالة السكون أنّ أنبوباً مملوءاً بجملة مؤلفة من m من السوائل اللزجة الشعرية التي كثافاتها $\rho_i , i=\overline{1,m}$ بحيث يكون $\rho_1 > \rho_2 > ..... > \rho_m > 0$ وتدور هذه السوائل بشكل منتظم مع بعضها مع الأنبوب بسرعة زاوية $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$ حيث $\vec{e}_3$ متجه الواحدة على محور الدوران $O x_3$، و $O x_1 x_2 x_3$ جملة إحداثية ديكارتية مرتبطة بالأنبوب . ليكن حقل القوى الخارجية $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$ هو حقل الجاذبية . نرمز للمنطقة المملوءة بالسائل في وضع التوازن بـ Ω حيث $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

عندئذٍ نحصل على جملة معادلات $(Navier-Stokes)$ الخطية من أجل حقل السرع $\vec{u}^k(t,x)$ التي تصف حركة السائل k في الجملة الاحداثية $O x_1 x_2 x_3$ و الضغط الديناميكي $p_k(t,x)$: $[2,4]$

$$\frac{\partial \vec{u}^k}{\partial t} - 2\omega_0 \vec{u}^k \times \vec{e}_3 = -\frac{1}{\rho_k}\nabla p_k + \nu\Delta\vec{u}^k + \vec{f} \ , div\, \vec{u}^k = 0 \ in\, \Omega_k \ ,$$

$$\vec{u}^k(t,x) = 0 \ \ on\, S_k \ \ ; k = 1,2,....,m \qquad (1)$$

حيث $S_k = S \bigcap \overline{\Omega_k}$ القسم الموافق لجدار الأنبوب S و $f = f(t,x)$ حقل القوى الخارجية الصغير.

لنأخذ الجملة الإحداثية المنحنية $(Curvilinear)$ $O_i \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$ في جوار السطح Γ_i لإيجاد الشروط الحركية والديناميكية ، فنجد الشروط الديناميكية من أجل كل سائل: $[2,4]$

$$\mu_i(u^i_{j,3}+u^i_{3,j})=\mu_{i+1}(u^{i+1}_{j,3}+u^{i+1}_{3,j}) \ \ on\ \Gamma_i \ ;\ j=1,2,i=1,2,...,m-1 \quad (2)$$

$$(-p_i+2\mu_i u^i_{3,3})-(-p_{i+1}+2\mu_{i+1}u^{i+1}_{3,3})=-L_{\sigma_i}\varsigma_i =: \sigma_i\Delta_{\Gamma_i}\varsigma_i - a_{\Gamma_i}\varsigma_i \quad (3)$$

$$a_{\Gamma_i} := -\sigma_i(k^2_{1,i}+k^2_{2,i})+(\rho_i-\rho_{i+1})[g\cos(\vec{n}_i,\vec{e}_i)-\omega_0^2 r\cos(\vec{n}_i,\vec{e}_r)]$$

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ i=1,2,....,m-1$$

حيث $u^i_{j,3} := \dfrac{\partial u^i_j}{\partial \zeta_3}, u^i_{3,j} := \dfrac{\partial u^i_3}{\partial \zeta_j}, u^i_{3,3} := \dfrac{\partial u^i_3}{\partial \zeta_3}$ ، Δ_{Γ_i} مؤثر لابلاس – بيلترامي التفاضلي على الدوال المعرفة على Γ_i ، و $\vec{n}_i$ الناظم على Γ_i ، $\vec{e}_r$ متجه الوحدة للمحور Or في الجملة الإحداثية الاسطوانية $O\,r\,\theta\,x_3$ المعرّفة من خلال الجملة الإحداثية الديكارتية $O\,x_1x_2x_3$.

و الشروط الحركية :

$$\frac{\partial \varsigma_i}{\partial t}=u^i_{n_i} := \vec{u}^i.\vec{n}_i \ ,\vec{u}^i=\vec{u}^{i+1} \ \ (on\ \Gamma_i)\ ;i=1,2,...,m-1 \quad (4)$$

$$\varsigma_i(t,\hat{\zeta}_i)=0 \ \ (on\ \partial\Gamma_i=\Gamma_i\cap S)\ ,\ \int_{\Gamma_i}\varsigma_i\, d\,\Gamma_i=0$$

حيث $\zeta^3_i := \varsigma_i(t,\hat{\zeta}_i),\ \hat{\zeta}_i := (\zeta^1_i,\zeta^2_i)$ ترمز إلى الإزاحة الرأسية للسطح الحر $\Gamma_i(t)$ من السطح الأفقي المتوازن Γ_i.

والشروط الابتدائية:

$$\vec{u}^k(0,x)=\vec{u}^{k,o}(x)\ ,k=1,2,..,m,\ \varsigma_i(0,\hat{\zeta}_i)=\varsigma^0_i(\hat{\zeta}_i),i=1,2,....,m-1 \quad (5)$$

تعاريف و مفاهيم أساسية:

ليكن H فضاء هلبرت المزود بدالة الجداء الداخلي $(.,.)$، T مؤثراً خطياً محدوداً ، $\lambda\in\mathbb{C}$ ، $n\in\mathbb{N}$.

تعريف (1) : $[1,2]$

نقول عن λ إنّها قيمة خاصة $(Eigen\ value)$ للمؤثر T إذا وجد $0\neq x\in H$ حيث إنّ :

$$(T-\lambda I)x=0$$

وندعو x_0 بالعنصر الخاص الموافق للقيمة الخاصة λ .

تعريف (2) : $[1,2]$

نقول عن x إنّه عنصر جذري $(Root\ element)$ موافق للقيمة الخاصة λ إذا تحقق:

$$(T-\lambda I)^n x=0$$

تعريف (3) : $[1,2]$

نقول عن x_{n-1} إنّه عنصر مرتبط $(Associate\ element)$ بالعنصر الخاص x_0 إذا تحقق:

$$(T-\lambda I)^n x=0\ ,\ (T-\lambda I)^{n-1}x\neq 0\ ,.........., (T-\lambda I)x\neq 0$$

ملاحظة (1):

تشكل العناصر المرتبطة $x_0,x_1,x_2,.........,x_n,...$ سلسلة خطية مرتبطة ندعوها سلسلة جوردان ، وندعو الطول الأعظمي $(Maximal\ length)$ لسلسلة جوردان بعدد التضاعف لـ x_0 .

تعريف $(4):[1,2]$

يعرّف طيف المؤثر T بالشكل:

$$\sigma(T):=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda I \text{ is not invertiable}\}$$

مبرهنة $(1):[1,2]$

إذا كانت λ قيمة خاصة للمؤثر T عندئذٍ $\lambda\in\sigma(T)$.

تعريف $(5):[1,2]$

يعرّف الطيف المنقطع $(disscrete\ spectrum)$ للمؤثر T بأنّه مجموعة جميع القيم الخاصة المنعزلة حيث يكون عدد التكرارات للعناصر الخاصة الموافقة لها منته ، ونرمز له بـ $\sigma_d(T)$.

تعريف $(6):[6]$

لتكن $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية من العناصر الجذرية (العناصر الخاصة و العناصر المرتبطة) للمؤثر T الموافقة للقيم الخاصة $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ ، $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ متتالية العناصر المتعامدة مع الجملة $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$.

نقول إنّ مجموعة العناصر $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ تشكل جملة آبل . ليد سكي $(Abel-Lidsky\ System)$ من المرتبة α إذا وجدت متتالية متزايدة من الأدلة $0=m_0<m_1<.......<m_l<...$ بحيث تكون السلسلة

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(t)f\ ,\ P_l(t)f:=\sum_{j=m_l+1}^{m_{l+1}}(f,g_j)e_j(t)f_j\quad ,$$

$$e_j(t):=e_j(t;\alpha):=\exp(-\mu_j^{\alpha}t)\quad (\mu_j\in\Lambda_\theta\ ;\Lambda_\theta:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg\lambda|<\theta\})\ ,\ e_j(t)\equiv 1\ \ (\mu_j\notin\Lambda_\theta)$$

متقاربة من أجل $t>0$ ومجموعها $f(t)\xrightarrow[t\to 0^+]{}f$.

تعريف $(7):[6]$

ليكن $H=H_+\oplus H_-$ المنشور المتعامد للفضاء H و P_+,P_- مؤثرا إسقاط موافقين لهذا المنشور ، و J مؤثراً معرفاً بالشكل : $J:=P_+-P_-$ حيث $J=J^*=J^{-1}\ ,\ J^2=J$.

يقال عن الفضاء H المزوّد بدالة الجداء الداخلي المعرّفة بالشكل $[x,y]:=(Jx,y)$ إنّه $J-$فضاء $(J-Space)$.

تعريف $(8):[1,2]$

يقال عن عنصر x في H إنّه موجب (سالب) إذا كان $[x,x]>0\ ([x,x]<0)$ ، و إنّه محايد $(neutral)$ إذا كان $[x,x]=0$.

تعريف $(9):[1,2]$

يقال عن مؤثر خطي T إنّه $J-$ مترافق ذاتياً إذا كان $(JT)^*=JA^*$.

خاصة $(1):[1,2]$

إنّ الطيف $\sigma(T)$ لمؤثر $J-$ مترافق ذاتياً متناظر بالنسبة إلى المحور الحقيقي .

تعريف $(10):[1,2]$

إذا كان $0<\lambda\in\mathbb{R}$ قيمة خاصة للمؤثر T و x عنصر خاص موافق للقيمة λ عندئذٍ :

يقال عن الزوج (λ,x) إنّه موجب (سالب) من أجل المؤثر T إذا كان $[x,x]>0\ ([x,x]<0)$.

تعريف $(11):[1,2]$

ليكن E,F فضاءين لهلبرت و $A:F\to E$ مؤثراً خطياً. يقال عن المؤثر A إنّه متراص إذا كانت صورة أية متتالية محدودة (x_n) من نقاط F فإنّ (Ax_n) تحوي متتالية جزئية متقاربة في E.

مبرهنة $(2):[1,2]$

ليكن المؤثر المتراص P_+TP_- حيث T مؤثر $J-$ مترافق ذاتياً و $\sigma_{non}(T)=\Lambda\cup\overline{\Lambda}$ الطيف اللا-حقيقي $(non\ real)$ للمؤثر T حيث Λ مجموعة القيم الخاصة اللا حقيقية في نصف المستوي العلوي و $\overline{\Lambda}$ المجموعة العقدية المرافقة لها ، عندئذٍ يوجد فضاء جزئي لا متغير بالنسبة للمؤثر T غير سالب أعظمي $L_+=\{x\in H: x=x_++x_-=x_++Kx_+, x_+\in H_+\}$ حيث $K:H_+\to H_-$ مؤثر زاوي و $\|K\|\le 1$ ، و فضاء جزئي لا متغير النسبة للمؤثر T غير موجب أعظمي $L_-=\{x\in H: x=x_++x_-=Qx_-+x_-, x_-\in H_-\}$ حيث $Q:H_-\to H_+$ مؤثر زاوي و $\|Q\|\le 1$ وتتحقق الشروط الطيفية الآتية:

$$\sigma_{non}\left(\mathcal{A}^{-1}|_{L_+}\right)=\Lambda\ ,\ \sigma_{non}\left(\mathcal{A}^{-1}|_{L_-}\right)=\overline{\Lambda}$$

جملة المعادلات التفاضلية المؤثرية:

تؤول المسألة $(1)-(4)$ باستخدام مسألتي " كرين" حول القيم الحدية [1] و باستخدام مؤثرات الإسقاط إلى المسألة:

$$\frac{d\hat{v}}{dt}+\frac{d\hat{w}}{dt}+\nu\hat{A}\hat{v}-2i\,\omega_0\hat{S}_0(\hat{v}+\hat{w})=\hat{\mathrm{P}}_{0,S}f\ ,\hat{v}(0)=\hat{v}^0 \qquad (6)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dt}+\nu^{-1}\hat{T}\hat{B}_0\hat{\gamma}_n(\hat{v}+\hat{w})=0,\hat{w}(0)=\hat{w}^0 \qquad (7)$$

$$\hat{v}^0=\hat{u}^0-\hat{w}^0\ :\hat{w}^0=-\nu^{-1}\hat{T}\hat{B}_0\hat{\varsigma}^0 \qquad (8)$$

$$:\hat{A}:=diag\{A_k\}_{k=1}^m,\hat{S}_0:=diag\{S_{0k}\}_{k=1}^m,\hat{\gamma}_n:=diag\{\gamma_{n_i}\}_{i=1}^{m-1},\hat{T}:=diag\{T_i\}_{i=1}^{m-1}$$

نحصل بعد إجراء تغيير على المتحولات :

$$\hat{v}=\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{\xi}\quad ,\ \hat{w}=\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{\eta} \qquad (9)$$

و تطبيق المؤثر $\hat{A}$ على طرفي المعادلات $(6),(7)$ على مسألة كوشي الآتية:

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt}+\nu\hat{A}\hat{\xi}-2i\,\omega_0\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{S}_0(\hat{\xi}+\hat{\eta})-\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}_{0,S}f \qquad (10)$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt}+\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=0,\ \hat{\eta}(0)=-\nu^{-1}\hat{Q}^*\hat{B}_0\hat{\varsigma}^0\ ,\ \hat{\xi}(0)=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{u}^0-\hat{\eta}(0) \qquad (11)$$

$$\hat{B}:=\hat{Q}^*\hat{B}_0\hat{Q}\ ,\hat{Q}:=\hat{\gamma}_n\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\ ,\ \hat{Q}^*:=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{T} \qquad (12)$$

نعرض فيما يلي خواص المؤثرات الموجودة في المسألة $(10),(11)$:

تمهيدية (1): $[1]$

المؤثر $B_{0i}:D(B_{0i})\subset \vec{L}_{2,\Gamma_i}\to \vec{L}_{2,\Gamma_i}$ غير محدود ومترافق ذاتياً حيث
$B_{0i}\varsigma_i:=\mathrm{P}_{\Gamma_i}L_i\mathrm{P}_{\Gamma_i}\varsigma_i\ ;\ \varsigma_i\in D(B_{0i}):=\vec{H}_0^2(\Gamma_i)\bigcap \vec{L}_{2,\Gamma_i}$ و $\mathrm{P}_{\Gamma_i}:\vec{L}_2(\Gamma_i)\to \vec{L}_{2,\Gamma_i}$ مؤثر إسقاط عمودي.

مبرهنة (3): $[4]$

المؤثر $\hat{B}_0:=diag(B_{0i})_{i=1}^{m-1}:D(\hat{B}_0)\subset \hat{L}_{2,\Gamma}\to \hat{L}_{2,\Gamma}$ غير محدود ومترافق ذاتياً ، وصيغته التربيعية معرّفة بالشكل: $[2]$

$$(\hat{B}_0\hat{\varsigma},\hat{\varsigma})_{\hat{L}_{2,\Gamma}}:=\sum_{i=1}^{m-1}\sigma_i\int_{\Gamma_i}\left[\nabla_{\Gamma_i}(\varsigma_i,\varsigma_i)+a_i\left|\varsigma_i\right|^2\right]d\Gamma_i \qquad (13)$$

تمهيدية (2): $[4]$

المؤثر $\hat{S}_0\hat{u}:=\{S_{0k}\,\vec{u}^k\}_{k=1}^m:=iP_{0,S}\{\vec{u}^k\times\vec{e}_3\}_{k=1}^m$ هو مؤثر محدود ومترافق ذاتياً .

تمهيدية (3): $[2]$

للفضاء $\hat{J}_{0,S}^1(\Omega)$ المنشور المتعامد :

$$\hat{J}_{0,S}^1(\Omega)=\hat{N}_1(\Omega)\oplus\hat{M}_1(\Omega) \qquad (13)$$
حيث:

$$\hat{N}_1(\Omega):=\bigoplus_{k=1}^{m}N_1(\Omega_k):=\{\hat{v}=\{v^k\}_{k=1}^m\in\hat{J}_{0,S}^1(\Omega);\hat{\gamma}_n\hat{v}=\} \qquad (14)$$

والفضاء $\hat{M}_1(\Omega)$ هو فضاء جزئي من الحلول الضعيفة للمسألة $(10),(11)$.

وللفضاء $\hat{J}_{0,S}(\Omega)=A^{\frac{1}{2}}\hat{J}_{0,S}^1(\Omega)$ المنشور الآتي:

$$\hat{J}_{0,S}(\Omega)=\hat{N}_0(\Omega)\oplus\hat{M}_0(\Omega):=A^{\frac{1}{2}}\hat{N}_1(\Omega)\oplus A^{\frac{1}{2}}\hat{M}_1(\Omega) \qquad (15)$$

تمهيدية (4): $[4]$

المؤثران

$$\hat{Q}:=\hat{\gamma}_n\hat{A}^{-\frac{1}{2}}:\hat{J}_{0,S}(\Omega)\to\hat{L}_{2,\Gamma}\ ,\ \hat{Q}^*:=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{T}:\hat{L}_{2,\Gamma}\to\hat{J}_{0,S}(\Omega) \qquad (16)$$
المعرفان في العلاقة (16)مترافقان ومتراصان.

تعريف (12): $[2]$

يقال إنّ الجملة المدروسة في حالة توازن مستقر بالتقريب الخطي إذا كان المؤثر $\hat{B}_0$ موجباً.

مبرهنة (4): $[4]$

المؤثر $\hat{B}$ المعرف في العلاقة (12) مترافق ذاتياً حيث $D(\hat{B})\subset\hat{J}_{0,S}(\Omega)$ و $\hat{B}\,|_{\hat{M}_0(\Omega)}$ قابل للعكس ومتراص و يكفي لكي يكون موجباً أن تكون الجملة في حالة توازن مستقر فيما يتعلق بالتقريب الخطي.

يُعرّف المؤثران:

$$\hat{V}:=\hat{B}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}\hat{A}^{-\frac{1}{2}}:\hat{J}_{0,S}(\Omega)\to\hat{M}_0(\Omega)\quad,\ \hat{\mathrm{P}}:\hat{J}_{0,S}(\Omega)\to\hat{M}_0(\Omega) \qquad (17)$$

$$\hat{V}^+:=\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}\hat{B}^{\frac{1}{2}},D(\hat{V}^+):=D(\hat{B}^{\frac{1}{2}})\subset\hat{M}_0(\Omega) \qquad (18)$$

تمهيدية $(5):[4]$

المؤثر $\hat{V}$ متراص ، المؤثر $\hat{V}^{+}=\hat{V}^{*}\Big|_{D(\hat{B}^{\frac{1}{2}})}$،المؤثر $\overline{\hat{V}^{+}}=\hat{V}^{*}$ متراص.

تكتب المسألة $(6),(7)$ بعد تبديل $\hat{\omega}=\nu^{-1}\mathcal{V}^{+}\hat{z}$ بالشكل:

$$\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)\frac{dy}{dt}+\left(\mathcal{I}+\mathcal{F}\right)\mathcal{A}_0 y=f_0(t),\ y(0)=y^0 \tag{19}$$

$$\mathcal{F}:=\nu^{-1}\mathcal{V}-2i\,\omega_0 S=\nu^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\ \hat{V}&0\end{pmatrix}-2i\,\omega_0\begin{pmatrix}\nu^{-1}\hat{S}_0\hat{A}^{-1}&\hat{S}_0\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{B}^{-\frac{1}{2}}\\ 0&0\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\mathcal{A}_0:=\begin{pmatrix}\nu\hat{A}&0\\ 0&\nu^{-1}\hat{B}\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}\hat{v}\\ \hat{z}\end{pmatrix},f_0(t)=\begin{pmatrix}\hat{\mathrm{P}}_{0,S}\vec{f}\\ 0\end{pmatrix},\ y^0=\begin{pmatrix}\hat{v}^0\\ \hat{z}^0\end{pmatrix} \tag{21}$$

أو بالشكل:

$$\frac{dy}{dt}+\left(\mathcal{I}+\mathcal{T}\right)\mathcal{A}_0 y=f_0(t),\ y(0)=y^0 \tag{22}$$

$$\left(\mathcal{I}+\mathcal{T}\right):=\left(\mathcal{I}-\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)\left(\mathcal{I}+\mathcal{F}\right)\ ,\left(\mathcal{I}-\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)f_0(t)=f_0(t)$$

مبرهنة $(5):[4]$

لتكن $\vec{f}(t,x)\in C^{\alpha}\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega)\right)$ في المسألة $(1)-(5)$ و

$$\hat{u}^0\in\hat{J}_{0,S}(\Omega),\ \hat{u}^0=\hat{v}^0+\hat{w}^0,\hat{v}^0\in D(\hat{A})\subset\hat{J}^1_{0,S}(\Omega),\ \hat{w}^0\in\hat{M}_1(\Omega)\subset\hat{J}^1_{0,S}(\Omega) \tag{23}$$

عندئذٍ للمسألة (22) حل قوي وحيد $y(t)$ على المجال $[0,T]$.

النتائج والمناقشة:

I- دراسة الاهتزازات النظامية للجملة في حالة أنبوب دوّار:

ندرس في هذا القسم مسألة الاهتزازات النظامية لـ m سائل لزج شعري دوّار وبفرض أنّ شرط الاستقرار الساكن بالنسبة للتقريب الخطي محقق.

نفرض أنّ حلول المسألة المتجانسة $(10)-(11)$ لها الشكل $\exp(-\lambda t)$ ، وتدعى هذه الحلول بالاهتزازات النظامية للجملة الهيدروديناميكية ، عندئذٍ تؤول $(10)-(11)$ إلى الشكل الطيفي التالي:

$$\nu\hat{A}\hat{\xi}-2i\,\omega_0\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{S}_0\hat{A}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\xi}+\hat{\eta})-\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\lambda\hat{\xi}\ \ ,\hat{\xi}\in D\left(A\right) \tag{24}$$

$$\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\lambda\hat{\eta},P(\hat{\xi}+\hat{\eta})\in D\left(B\right) \tag{25}$$

حيث $P:\hat{J}_0(\Omega)\rightarrow\hat{M}_0(\Omega)$ مؤثر إسقاط عمودي.

وبالشكل نفسه تؤول المسألة $(24)-(25)$ إلى المسألة الطيفية بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\left(\mathcal{I}+\mathcal{F}\right)\mathcal{A}_0 y=\lambda\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{+}\right)y\ ,y=(\hat{v},\hat{z})^t\in D\left(\mathcal{A}_0\right) \tag{26}$$

مبرهنة (6):

تتمتع حلول المسائل $(24)-(25)$ ، (26) بالخاصتين الآتيتين:

1. $\lambda = 0$ ليست قيمة خاصة لأي من هذه المسائل.
2. تتوضع جميع القيم الخاصة λ في نصف المستوي العقدي الأيمن.

الإثبات:

1. نضع $\lambda = 0$ في العلاقة (26) نجد أنّ : $(\mathcal{I}+\mathcal{F})\mathcal{A}_0 y = 0$ ،

وهذا يقتضي بدوره أنّ $\mathcal{A}_0 y = 0$ وبالتالي $y = 0$ لكون المؤثرين $(\mathcal{I}+\mathcal{F})$ و $\mathcal{A}_0$ قابلين للعكس.

2. بفرض أنّ $\lambda \neq 0$ عندئذٍ نحصل من المسألة $(24)-(25)$ على الجملة الآتية:

$$\nu\hat{\xi} = 2i\,\omega_0 \hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_0\hat{A}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\xi}+\hat{\eta}) + \lambda A^{-1}(\hat{\xi}+\hat{\eta}) \;\;, \nu\hat{\eta} = \lambda^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta}) \qquad (27)$$

نجمع طرفي الجملة (27) ثم نجري التبديل $\hat{\delta} := \hat{\xi}+\hat{\eta}$ و $\hat{S} := \hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{S}_0\hat{A}^{-\frac{1}{2}}$ فنحصل على المعادلة:

$$\nu\hat{\delta} = 2i\,\omega_0\hat{S}\,\hat{\delta} + \lambda\hat{A}^{-1}\hat{\delta} + \lambda^{-1}\hat{B}\,\hat{\delta} \qquad (28)$$

نضرب طرفي المعادلة (28) داخلياً بـ $\hat{\delta}$ فنجد:

$$\nu\left(\hat{\delta},\hat{\delta}\right) = 2i\,\omega_0\left(\hat{S}\,\hat{\delta},\hat{\delta}\right) + \lambda\left(\hat{A}^{-1}\hat{\delta},\hat{\delta}\right) + \lambda^{-1}\left(\hat{B}\,\hat{\delta},\hat{\delta}\right)$$

والتي تكتب بالشكل:

$$\nu\left\|\hat{\delta}\right\|^2 = 2i\,\omega_0\left(S\,\hat{\delta},\hat{\delta}\right) + \lambda\left\|A^{-1/2}\hat{\delta}\right\|^2 + \lambda^{-1}\left\|\hat{B}^{1/2}\hat{\delta}\right\| \qquad (29)$$

وهذا يقتضي أنّ:

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{\nu\left\|\hat{\delta}\right\|^2}{\left\|A^{-1/2}\hat{\delta}\right\|^2 + |\lambda|^{-2}\left\|\hat{B}^{1/2}\hat{\delta}\right\|} > 0 \qquad (30)$$

لكون المؤثر $\hat{S}$ مترافق ذاتياً، وبذلك يتم المطلوب.

نقوم فيما يلي بإيجاد الخاصة الأساسية للعناصر الجذرية ، والسلوك المقارب للقيم الخاصة للمسألة الطيفية (26) . من أجل ذلك نعيد كتابة المسألة (26) بشكل آخر مكافئ ثم نعرض بعض النظريات الهامة:

في الحقيقة ، إنّ المسألة (26) مكافئة للمسألة الطيفية

$$y = \lambda\mathcal{A}_0^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{F})^{-1}\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{+}\right)y \;,\; y\in H \qquad (31)$$

من أجل أعداد مميزة للمؤثر المتراص

$$\mathcal{A}_0^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{F})^{-1}\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{+}\right) = \mathcal{A}_0^{-1}(\mathcal{I}+\mathcal{T}) \qquad (32)$$

حيث $\mathcal{T}$ مؤثر متراص.

مبرهنة (7): [6]

بفرض انّ L مؤثر له طيف منقطع $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ و $A = L^{-1}$ له التمثيل $A = A_0(I+T)$ حيث T مؤثر متراص ، بينما A_0 مؤثر مترافق ذاتياً ومتراص. عندئذٍ القضايا الآتية محققة:

1. إنّ جملة العناصر الجذرية (العناصر الخاصة والعناصر المرتبطة) للمؤثر A تشكل قاعدة $Abel-lidskii$ من المرتبة $\alpha > p^{-1}$.

2. إذا كانت القيم المميزة للمؤثر A_0 لها السلوك المقارب

$$\mu_j(A_0)=c_{A_0} j^p + o(j^p)\ ,\ j \to \infty,\ \ c_{A_0} \neq 0 \qquad (33)$$

عندئذٍ القيم المميزة μ_j للمؤثر A يكون لها السلوك المقارب نفسه.

مبرهنة (كيليدش) $Kelydsh$: $[3]$

إذا كان $Ker\,B=\{0\}$ و المؤثر A متراص في التمثيل $B=A(I+S)$ حيث S متراص عندئذٍ:

1. تشكل العناصر الجذرية للمؤثر B جملة تامة في فضاء هلبرت E.
2. تتوضع القيم الخاصة للمؤثر B في القطاع $\Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\}$.

مبرهنة (8):

1- إنّ الطيف $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ للمسألة (31) منقطع وله السلوك المقارب :

$$\lambda_j = \sigma \nu^{-1}\left(\frac{1}{\pi} mes\,\Gamma\right)^{-\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}}[1+o(1)]\ ,\ j \to \infty$$

2- تشكل العناصر الجذرية (العناصر الخاصة والعناصر المرتبطة) للمسألة (31) قاعدة $Abel-lidskii$ من المرتبة $\alpha > 2$.

3- تتوضع القيم الخاصة λ في القطاع Λ_ε من أجل أي عدد موجب ε.

الإثبات:

1. نلاحظ أنّ المؤثر $\mathcal{A}_0^{-1} = diag\left(\nu^{-1}\hat{A}^{-1};\nu\hat{B}^{-1}\right)$ في الفضاء $\hat{H} = \hat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \hat{M}_0(\Omega),$ مؤثر متراص وموجب ، وللقيم الخاصة $\lambda_j(\hat{A})$ السلوك المقارب :

$$\lambda_j(\hat{A}) = \left(\frac{mes\,\Omega}{3\pi^2}\right)^{-\frac{2}{3}} j^{\frac{2}{3}}[1+o(1)]\ ,\ j \to \infty \qquad (34)$$

بينما القيم الخاصة $\lambda_j(\hat{B})$ لها السلوك المقارب:

$$\lambda_j(\hat{B}) = \sigma\left(\frac{1}{\pi} mes\,\Gamma\right)^{-\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}}[1+o(1)]\ ,\ j \to \infty \qquad (35)$$

لتكن

$$n(r,G) := \sum_{\mu_j(G) \le r} 1 \qquad (36)$$

حيث ترمز $n(r,G)$ لدالة توزيع الأعداد المميزة لمؤثر متراص موجب. عندئذٍ ينتج من العلاقتين (34) , (35) أنّ:

$$\lim_{r\to\infty} n\left(r,A^{-1}\right) r^{-3/2} = \frac{mes\,\Omega}{3\pi^2}, \lim_{r\to\infty} n\left(r,B^{-1}\right) r^{-2} = \sigma^{-2}\left(\frac{1}{\pi} mes\,\Gamma\right). \qquad (37)$$

لذلك

$$n\left(r,\mathcal{A}_0^{-1}\right) = n\left(r,\nu^{-1}A^{-1}\right) + n\left(r,\nu B^{-1}\right), \qquad (38)$$

ينتج من العلاقة (38) أنّ :

$$\lim_{r\to\infty} n\left(r,\mathcal{A}_0^{-1}\right)r^{-2} = \lim_{r\to\infty} n\left(r,\nu B^{-1}\right)r^{-2} = \nu^2\sigma^{-2}\left(\frac{1}{\pi}mes\Gamma\right) > 0. \qquad (39)$$

وبالتالي للقيم المميزة للمؤثر $\mathcal{A}_0^{-1}$ السلوك المقارب:

$$\lambda_j\left(\mathcal{A}_0^{-1}\right) = \lambda_j\left(\nu B^{-1}\right)[1+o(1)] = \sigma\nu^{-1}\left(\frac{1}{\pi}mes\Gamma\right)^{\frac{1}{2}} j^{-\frac{1}{2}}[1+o(1)]\ ,\ j\to\infty \qquad (40)$$

ينتج من القضية الثانية في المبرهنة (7) أنّ طيف المسألة (32) منقطع وله السلوك المقارب :

$$.\ \lambda_j = \sigma\nu^{-1}\left(\frac{1}{\pi}mes\Gamma\right)^{-\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}}[1+o(1)]\ ,\ j\to\infty \qquad (41)$$

2. ينتج من العلاقة (41) أنّ المؤثر $\mathcal{A}_0^{-1}\in\mathcal{S}^{(p)}$ من أجل $p=1/2$ ، ولكون $\mathcal{V}$ مؤثر متراص في المسألة $(31)-(32)$ نجد أنّ العناصر الجذرية للمسألة (32) تشكل قاعدة $Abel-lidskii$ من المرتبة $\alpha > p^{-1}=2$ وذلك استناداً إلى القضية الأولى في المبرهنة (7).

3. واضح تماماً من مبرهنة (كيليدش) $Kelydsh$.

II-دراسة الاهتزازات النظامية للجملة في حالة أنبوب ثابت:

ندرس في هذا القسم خواص حلول المسألة $(24)-(25)$ في حالة $\omega_0=0$ ، وذلك اعتماداً على نتائج في نظرية المؤثرات $J-$ مترافقة ذاتياً .

نضع $\omega_0=0$ في المسألة $(24)-(25)$ نجد أنّ:

$$\nu\hat{A}\hat{\xi}-\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\lambda\hat{\xi}\ \ ,\hat{\xi}\in D\left(\hat{A}\right) \qquad (42)$$

$$\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\lambda\hat{\eta},P(\hat{\xi}+\hat{\eta})\in D\left(\hat{B}\right) \qquad (43)$$

أو :

$$\mathcal{A}y=\lambda y \qquad (44)$$

حيث :

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\nu\hat{A}-\nu^{-1}\hat{B} & -\nu^{-1}\hat{B}\\ \nu^{-1}\hat{B} & \nu^{-1}\hat{B}\end{pmatrix}\ ,\ y=\begin{pmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}$$

تبيّن المبرهنة الآتية خواص المؤثر $\mathcal{A}$ في المعادلة (44):

مبرهنة (9):

إذا كان المؤثر $\mathcal{A}$ المعرّف وفق الصيغة $\mathcal{A}y=\lambda y$

فإنّ المؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ موجود و متراص ومترافق ذاتياً و له الصيغة الآتية:

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\nu^{-1}\hat{A}^{-1} & \nu^{-1}\hat{A}^{-1}P\\ -\nu^{-1}P\hat{A}^{-1} & \nu^{-1}\hat{B}^{-1}-\nu^{-1}P\hat{A}^{-1}P\end{pmatrix} \qquad (45)$$

الإثبات:

لإثبات أنّ المؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ موجود يكفي أن نثبت أنّه إذا كان $\mathcal{A}\,y=0$ فإنّ $y=0$ ، وهذا محقق لأنّ المؤثرين $\hat{A}^{-1},\hat{B}^{-1}$ موجودان.

نوجد الآن صيغة المؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ ، وذلك بإثبات أنّ المسألة $(42)-(43)$ مكافئة للمسألة الآتية:

$$\nu^{-1}\hat{A}^{-1}\hat{\xi}+\nu^{-1}\hat{A}^{-1}P\hat{\eta}=\lambda^{-1}\hat{\xi} \qquad (46)$$

$$-\nu^{-1}P\hat{A}^{-1}\hat{\xi}+(\nu^{-1}\hat{B}^{-1}-\nu^{-1}P_1\hat{A}^{-1}P_1)\hat{\eta}=\lambda^{-1}\hat{\eta} \qquad (47)$$

1. في الحقيقة ، نستطيع أن نكتب الجملة $(46)-(47)$ وفق الشكل الآتي:

$$\hat{A}\hat{\xi}=\lambda(\hat{\xi}+\hat{\eta})\ ,\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\lambda\hat{\eta}\quad ,\hat{\xi}\in D(\hat{A})\quad ,(P\hat{\xi}+\hat{\eta})\in D(\hat{B}_1) \qquad (48)$$

نحصل بتطبيق المؤثر $\hat{A}^{-1}$ على طرفي المعادلة الأولى في الجملة (48) على المعادلة الآتية:

$$\lambda\hat{A}^{-1}\hat{\xi}+\lambda\hat{A}^{-1}\hat{\eta}=\hat{\xi}$$

والتي تؤدي بدورها إلى المعادلة (46) $\nu^{-1}\hat{A}^{-1}\hat{\xi}+\nu^{-1}\hat{A}^{-1}P\hat{\eta}=\lambda^{-1}\hat{\xi}$.

للحصول على المعادلة (47) نطبق مؤثر الإسقاط P على طرفي المعادلة الأخيرة ، فنجد:

$$.\nu^{-1}P\hat{A}^{-1}\hat{\xi}+\nu^{-1}P\,\hat{A}^{-1}P\,\hat{\eta}=\lambda^{-1}P\,\hat{\xi} \qquad (49)$$

نحصل من المعادلة الثانية في الجملة (48) على المعادلة:

$$.\nu^{-1}P\hat{\xi}=\lambda\hat{B}^{-1}\hat{\eta}-\nu^{-1}\hat{\eta} \qquad (50)$$

نبدل المعادلة (50) في (49) فنجد المعادلة (47).

2. لنبرهن الآن أنّ حلول الجملة $(46)-(47)$ تحقق المسألة $(42)-(43)$ أيضاً.

نلاحظ من الاتجاه الأوّل أنّ المعادلة (48) تؤدي إلى العلاقة (49) ، عندئذٍ تؤول (47) إلى العلاقة $\lambda\hat{B}^{-1}\hat{\eta}-\nu^{-1}P\hat{\xi}=\nu^{-1}\hat{\eta}$

ومع الأخذ بالحسبان أنّ $\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\hat{B}(P\,\hat{\xi}+\hat{\eta})$ نحصل على (42).

ينتج من العلاقة (42) أنّ $\hat{\xi}\in D\left(\hat{A}\right)$ و $\hat{A}\hat{\xi}=\lambda(\hat{\xi}+\hat{\eta}) \Leftrightarrow \nu^{-1}(\hat{\xi}+P\hat{\eta})=\lambda^{-1}\hat{A}\hat{\xi}$.

أخيراً نحصل باستخدام (42) على (43) من $\hat{A}\hat{\xi}=\lambda(\hat{\xi}+\hat{\eta})$.

بما أنّ المؤثرين $\hat{A}^{-1},\hat{B}^{-1}$ متراصان وموجبان نجد أنّ المؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ متراص ومترافق ذاتياً.

مبرهنة (10):

تتمتع حلول المسألة $\mathcal{A}\,y=\lambda\,y$ بالخواص الآتية:

1. إنّ الطيف متناظر نسبياً بالنسبة إلى المحور الحقيقي.
2. إنّ العناصر الخاصة الموافقة للقيم الخاصة غير الحقيقية $\lambda=\lambda_0$ هي محايدة (حيادية) فقط.
3. ليس لأزواج الحلول (λ_0,y_0) الموجبة أو السالبة الموافقة للمؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ عناصر مرتبطة .
4. إنّ للمؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ فضاء جزئي أعظمي غير سالب لا متغير $E\supset L_+$ ، وفضاء جزئي أعظمي غير موجب لا متغير $E\supset L_-$ حيث :

$$.\sigma_{non}\left(\mathcal{A}^{-1}|_{L_+}\right)=\Lambda\ ,\ \sigma_{non}\left(\mathcal{A}^{-1}|_{L_-}\right)=\overline{\Lambda}$$

الإثبات:

1. نستطيع أن نكتب المسألة (44) بالشكل الآتي:

$$\mathcal{L}(\lambda)y=\left(\mathcal{I}-\lambda\mathcal{A}^{-1}\right)y=0,\ \mathcal{I}:=diag\,(I\,;P) \qquad (51)$$

حيث $\mathcal{L}(\lambda)$ حزمة المؤثرات الخطية المترافقة ذاتياً الموافقة للمسألة (44).

بما أنّ المؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ متراص ومترافق ذاتياً عندئذٍ $\mathcal{A}^{-1}$ مؤثر $J-$ مترافق ذاتياً حيث

$$\cdot\left(J\,\mathcal{A}^{-1}\right)^{*}=J\,\mathcal{A}^{-1}\ ,\ J:=diag\,(I\,;-P)$$

هذا يقتضي أنّ الحزمة $\mathcal{L}(\lambda)$ هي $J-$ مترافقة ذاتياً أيضاً $J\,\mathcal{L}(\lambda)=J-\lambda J\,\mathcal{A}^{-1}$ ، و بالتالي استناداً إلى الخاصة (1) يكون طيفها متناظر بالنسبة إلى المحور الحقيقي .

2. ليكن $y=y_0$ عنصراً خاصاً موافقاً للقيمة الخاصة $\lambda=\lambda_0$عندئذٍ نجد :

$$[\mathcal{L}(\lambda_0)\,y_0,y_0]=[y_0,y_0]-\lambda_0\ [\mathcal{A}^{-1}y_0,y_0]=0$$

بعد ضرب $J\,\mathcal{L}(\lambda)y_0$ داخلياً بـ y_0 .

أي أنّ:

$$[y_0,y_0]-\operatorname{Re}\lambda_0\ [\mathcal{A}^{-1}y_0,y_0]-i\,Im\lambda_0\ [\mathcal{A}^{-1}y_0,y_0]=0$$

ولكون $[y_0,y_0]\in\mathbb{R}$, $[\mathcal{A}^{-1}y_0,y_0]\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0$ نجد أنّ $[\mathcal{A}^{-1}y_0,y_0]=0$ ونتيجةً لذلك يكون $[y_0,y_0]=0$ وهذا يعني أنّ y_0 عنصرَ محايدَ .

3. ليكن $y=y_0$ عنصراً خاصاً موافقاً للقيمة الخاصة الحقيقية $\lambda=\lambda_0$ و y_1 عنصراً مرتبطاً بالعنصر y_0، بناءً على ذلك يكون :

$$J\,y_0-\lambda_0\,J\,\mathcal{A}^{-1}y_0=0$$

$$.\ J\,y_1-\lambda_0\,J\,\mathcal{A}^{-1}y_1-J\,\mathcal{A}^{-1}y_0=0$$

نضرب طرفي المعادلة الثانية سلمياً بـ y_0 وباستخدام المعادلة الأولى نجد أنّ:

$$\left(J\,y_1,y_0\right)-\lambda_0\left(J\,\mathcal{A}^{-1}y_1\ ,y_0\right)=\left(y_1,J\,y_0-\lambda_0\,J\,\mathcal{A}^{-1}\,y_0\right)=0=\left(J\,\mathcal{A}^{-1}y_0\,,y_0\right)=\lambda^{-1}{}_0\left(J\,y_0\,,y_0\right)$$

وهذا تناقض لكون $\left(J\,y_0\,,y_0\right)\neq 0$, $\lambda^{-1}{}_0\neq 0$.

4. تنتج مباشرةً من المبرهنة (2).

الاستنتاجات والتوصيات:

إنّ أهم ما توصلنا إليه من نتائج:

- طيف المسألة منقطع والعناصر الجذرية الموافقة تشكل قاعدة آبل –ليدسكي في حالة كون الأنبوب دوّاراً.
- المؤثر $\mathcal{A}^{-1}$ موجود و متراص ومترافق ذاتياً في المسألة $\mathcal{A}\,y=\lambda\,y$.
- طيف المسألة في حالة الأنبوب ثابت متناظر نسبياً بالنسبة إلى المحور الحقيقي، و العناصر الخاصة الموافقة للقيم الخاصة غير الحقيقية $\lambda=\lambda_0$ هي محايدة (حيادية) فقط .

ونوصي بالاستفادة من هذه النتائج في دراسة الاهتزازات النظامية لجملة هيدروديناميكية مشابهة.

المراجع:

[1] KOPACHEVSKY, N.D; KREIN, S.G; NGO ZUY CAN. *Operators Methods in Linear Hydrodynamics:Evolution and Spectral Problems*. Nauka, Moscow, 1989,159-181.

[2] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G .*Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics* Vol. 1: Self-ad joint Problems for Ideal Fluid, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2001,383.

[3] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics*. Vol. 2: Nonself - adjoint Problems for Viscous Fluids, Birkh¨auser Verlag , Basel—Boston—Berlin, 2003, 444.

[4]علي، وديع؛ سويقات ، محمّد؛ سليمان ، خضر. *استخدام بعض طرائق التحليل التابعي في دراسة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية*. مجلة جامعة تشرين، 2014.

[5] KOPACHEVSKY,N.D. *On Stability and Instability of small motions of Hydrodynamical systems*. Methods of Functional Analysis and topology, Vol. 13,2007, No. 2, 152–168.

[6] AGRANOVICH ,M.S; KATSENELENBAUM, B. Z ; SIVOV, A.N; VOITOVICH, N.N. *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*. WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin ,1999, 370.

[7] SUSLINA,T.A. *Spectral asymptotics of two prototype problems on oscillations of fluids*. Iz. St.Petersburg Electrotechn. Inst, 449, 1992, 82–88.

[8] GOLDSTEIN,A.J. *Semigroups of Linear Operators and Applications*, VyshchaShkola,Kiev,1989,245.