مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (3) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (3) 2015

دراسة بعض تطبيقات دالة غاما

نبيل خضير سلمان*

(تاريخ الإيداع 6 / 1 / 2015. قُبِل للنشر في 9 / 6 /2015)

□ ملخّص □

في هذا البحث ندرس دالة غاما وتمثيلها لمتحول عقدي، وذلك باستخدام إما سلسلة أو تكامل مناسب وتطبيقاتها في حل بعض أنواع المعادلات التكاملية وعلاقتها بدالة زيتا لريمان، واستخدامها في حل التكامل المحيطي، وفي إيجاد تكامل هانكل المحيطي وفقاً لدالة بيسل من أجل عدد صحيح n.

الكلمات المفتاحية: دالة غاما، دالة دي غاما، دالة غاما غير التامة، تكامل هانكل المحيطي.

* ماجستير – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (3) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (3) 2015

Study Some applications of Gamma function

Nabil Khuder Salman*

(Received 6 / 1 / 2015. Accepted 9 / 6 /2015)

□ ABSTRACT □

In this paper, we study the Gamma function, and the representation of a complex variable, using either sequential or appropriate integration ,and its application in solving certain types of integral equations , and their relationship to the Riemann- Zeta function, and used to solve the contour integration ,and to find the integration of Hankel's contour integral according to Bessel function for integer n.

Key words: Gamma Function, Digamma Function, Deincomplete Gamma Function, Hankel's contour integral.

*Master of Mathematics Department - Faculty of Science - Tishreen University- Lattakia Syria .

مقدمة :

تعد دالة غاما (**Gamma function**) من أهم الدوال الخاصة التي لها أهمية كبيرة في التحليل الرياضي ويمكن تعريفها بمتغير معقد باستخدام إما سلسلة أو تكامل مناسب، وتساعد هذه الدالة في إيجاد حل لبعض المعادلات التكاملية والتفاضلية والتطبيقات الفيزيائية والميكانيكية وغيرها، وتعرف بدلالة تكامل معتل متعلق بوسيط وهذا التكامل لا يمكن حسابه بدلالة الدوال الأولية ومنها تكامل هانكل المحيطي.

إن أول من استخدم الرمز غاما (**Γ**) لهذه الدالة هو الرياضي الفرنسي ليجندر (**Legender**) في عام **1839م**، وبسبب أهميته الكبيرة تمت دراسته من قبل الرياضيين البارزين أمثال (غوص، جودرمان، ليوفيل، وايرشتراس، هيرميت)، وقد أعطي منظور تأريخي كامل لدالة غاما في عمل الرياضي(جودي فروي) بالإضافة إلى العديد من المؤلفين الآخرين.[2,3].

وسنعرض دالة غاما ودراسة بعضاً من خصائصها من خلال معاملتها كدالة لمتغيرات حقيقية ولدالة لمتغير عقدي. والتي تعطى بصيغ مختلفة، وهي دالة تحليلية لـ **z** ، ولها تطبيقات متعددة في المستوي الديكارتي والعقدي، ولدالة غاما استخدامات بحل بعض من المعادلات التكاملية، ومنها تكامل هانكل المحيطي، وفقاً لــدالة بيسل، من أجل عدد صحيح **n**.

أهمية البحث وأهدافه :

تأتي أهمية البحث في دور تمثيل دالة غاما لعدد عقدي بدلالة معادلة تكاملية وكيفية استخدامها في حل بعض المعادلات التكاملية ومنها تكامل هانكل المحيطي.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث في مجال الرياضيات البحتة، ويعتمد على مفهوم دالة غاما وصيغها المختلفة وتمثيلها لعدد عقدي، ويكون ذلك باستخدام طريقة نظرية الرواسب(البواقي)، وطريقة تكامل هانكل المحيطي وأيضاً دالة بيسل المعدلة.

تعاريف ومفاهيم أساسيه :

- **غاما Gamma**

تُعرف رياضياً باسم العاملي المعمم، تكامل أولر من النوع الثاني وكما يأتي:.

$$z\,! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z} dt \quad ; \quad z \neq -1, -2, -3, \ldots \tag{1}$$

- **دالة غاما (Gamma Function)** [1,2]

تُعرف دالة غاما وفق العلاقات الآتية:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = (z-1)\,! \quad ; \; z \neq -1, -2, -3, \ldots \tag{2}$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \; ; z < o \; , \; \Gamma(z+1) = z\,! \; ; \; z = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

- **دالة دي غاما(Digamma Function) :[2]**

تُعرف دالة دي غاما باسم دالة (**PSI**)، أو المشتق اللوغاريتمي لدالة غاما، حيث تعطى بالعلاقة الآتيه:

$$\Psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\quad ;z\neq -1,-2,-3,\ldots \tag{4}$$

- **دالة غاما غير التامة (Incomplete Gamma Function) [3]**

يمكن تعريف دالة غاما وفقاً لمجموع تركيبين، وكما يلي:

$$\Gamma(z)=\gamma(z,x)+\Gamma(z,x) \tag{5}$$

حيث $\gamma(z,x)$ تدعى بدالة غاما غير التامة وتعطى بالعلاقة الآتيه :

$$\gamma(z,x)=\int_0^x e^{-t}t^{z-1}dt\quad ;x>0 \tag{6}$$

$\Gamma(z,x)$ يُدعى بمكمل دالة غاما وتعطى بالعلاقة الآتيه:

$$\Gamma(z,x)=\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\quad ;x>0 \tag{7}$$

- **تكامل هانكل المحيطي** (Hankel's contour integral) **[9,10]**

يُعرف تكامل هانكل المحيطي بالعلاقة التالية :.

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_c u^{-z}e^{u}du \tag{8}$$

حيث c هو محيط تكاملي، بعكس دوران عقارب الساعة، وذلك بالاتجاه السالب لمحور الأعداد الحقيقية[0,∞-) .

- **نظرية : (الرواسب– البواقي)[5] :**

إذا كان $w=f(Z)$ دالة وحيدة القيمة وتحليلية في المنطقة D من المستوي العقدي $Z-$ باستثناء النقطة الشاذة المعزولة Z_0 عندئذٍ يُعطى راسب الدالة $f(Z)$ عند النقطة Z_0 ويرمز لذلك بالرمز $Res[f(Z);Z_0]$بالعلاقة الآتيه :

$$Res[f(Z);Z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}f(Z)dZ \tag{9}$$

حيث C أي منحني نظامي مغلق يقع في المنطقةD وله الاتجاه الموجب ، ويحوي النقطة Z_0 بداخله .

النتائج والمناقشة:

يمكن تعريف العديد من الدوال الخاصة **Special Functions [6,7,8]** بمتغير عقدي باستخدام إما سلسلة أو تكامل مناسب. وسنعرض دالة خاصة مختارة ودراسة بعضاً من خصائصها عندما تتم معاملتها كدالة لمتغيرات حقيقية أو كدالة لمتغير عقدي.

وهي دالة غاما، التي تعطى بعدة صيغ ، ومنها:

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z};\ z<0 \qquad (10)$$

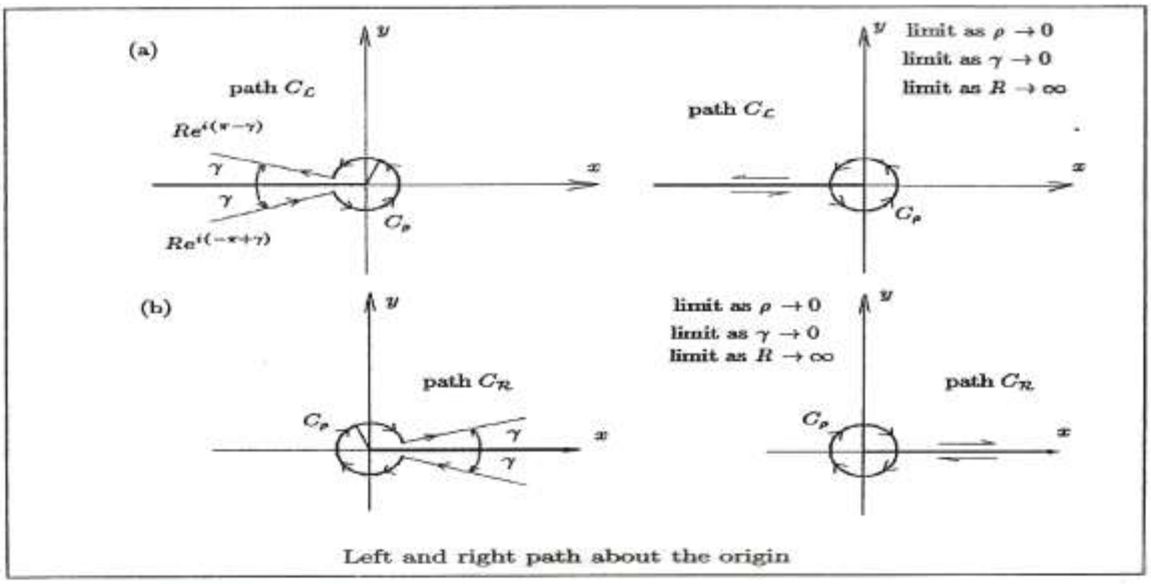
$$\Gamma_{(z)}=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \qquad ;\ \mathrm{Re}\{z\}>0 \qquad (11)$$

ويكون التكامل المرتبط بها:

$$\gamma(\alpha,z)=\int_0^z e^{-t}t^{z-1}dt \qquad ;\ \mathrm{Re}\{\alpha\}>0 \qquad (12)$$

وتكون هذه الداله تحليلية بالنسبة لـ z بإستثناء النقاط - $z=0,-1,-2,\dots$

والتي هي أقطاب بسيطة. وبأخذ الدالة $t^{z-1}=e^{(z-1)\log t}$ متعددة القيمة عندما يكون المتغير t عقدياً ، ولابدَّ للعمل بوضع شروط تجعل الدالة أحادية القيمة، كما يوضح الشكل(1)، والذي يعطي عدة رسوم بيانية مختلفة لتلك الدالة.



الشكل (1) المسار اليساري واليميني حول نقطة الأصل

مبرهنه (1) :

تُعطى دالة غاما في العلاقة (2) بالصيغة الآتية وفق المعادلة الآتية :

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \tag{12}$$

البرهان :

لبرهان ذلك، تُكتب العلاقة (2) بالشكل الآتي:

$$\Gamma_{(z)}=\int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\mathrm{dt}+\int_0^\infty e^{-t}t^{z-t}\mathrm{dt} \qquad ;\ \mathrm{Re}\{z\}>0 \tag{13}$$

من المعروف أنَّ التكامل الثاني في العلاقة أعلاه يسعى إلى الصفر.

أما التكامل الأول فإنه يتم نشر الدالة e^{-t} في سلسلة قوى بجوار النقطة(t=0) ، ومن ثم مكاملة حدودها وفق العلاقة الآتيه :

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\mathrm{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \tag{14}$$

الذي يُظهر أنَّ رواسب (بواقي) $\Gamma(z)$ عند القطب البسيط $z=-n$ يُعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{Res}\,[\Gamma_{(z),-n}]=\frac{(-1)^n}{n!} \qquad ;\mathrm{n}=0,1,2,\ldots \tag{15}$$

بما أن n عدداً موجباً و $Re\{z\}>0$ ، عندئذ يمكن استخدام التكامل التكراري بالتجزئة فنجد أنَّ:

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{dt}=\frac{\mathrm{n!\,n^z}}{\mathrm{z(z+1)(z+2)\,\ldots.\,(z+n)}} \tag{16}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية، وباستخدام تعريف الدالة الأسيّة:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^t \tag{17}$$

فنحصل على الآتي:

$$\Gamma_{(z)}=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{dt}=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{dt}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \tag{18}$$

وهو المطلوب .

سنقوم الآن بدراسة بعض من خواص الدالة غاما. لنأخذ الحالة الخاصة عندما $z=n$ عدد صحيح و $n>1$ ،عندئذ يمكننا استخدام التكامل بالتجزئة للعلاقة الآتية:

$$\Gamma_{(z)}=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{dt} \tag{19}$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\Gamma(n)=[-t^{n-1}e^{-t}]_{t=0}^{\infty}+(n-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{n-2}\mathrm{dt} \tag{20}$$

في حالة n>1 ، يصبح الحد الأول صفراً، ومن ثم يتم اختزال العلاقة أعلاه إلى الشكل الآتي:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1) \tag{21}$$

أو إزاحة الدليل n حتى $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

وأخيراً يمكننا كتابة العلاقة الآتيه:

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\Gamma(n-2) = (n-3)\Gamma(n-3) \tag{22}$$

$$\Gamma(n) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.3.2.1 \tag{23}$$

وباستبدال (n =1) في (20) نحصل على العلاقة:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{dt} = 1 \tag{24}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma(n-1) = n! \tag{25}$$

وتتطابق العلاقة المعطاة بالعلاقة (25) فقط عندما تكون n عدداً موجباً. وإذا تم استبدال n بـ z في العلاقة (19) عندها يمكن كتابة العلاقة (25) باستخدام التكامل بالتجزئة بالصيغة الآتية:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{26}$$

ومن أجل n عدد موجب، نحصل على العلاقة الآتية:

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)\Gamma(z) \tag{27}$$

سنعطي الآن بعض الأمثلة التطبيقية لاستخدامات دالة غاما.

مثال تطبيقي (1) :

سنستخدم العلاقات السابقة لدالة غاما في حل المعادلة التكاملية الآتية:

$$I = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\, dx$$

الحل:

لنجري تغييراً في المتحول بوضع $x^2 = t$ فنجد أنَّ $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

نعوض في التكامل، فنجد أنَّ

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^n e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$$

ومنه يكون

$$I = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

واستناداً إلى العلاقة الآتيه:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}.\sqrt{\pi}$$

نحصل على العلاقة الآتية:

$$I=\frac{1}{2}.\frac{(2n-1)!!}{2^n}.\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n+1}.\sqrt{\pi}$$

حيث $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)...3.1$

مثال تطبيقي(2) :

سنورد التكامل الآتي، الذي يوضح فيه تطبيقاً لدالة غاما بحل معادلة تكاملية والعلاقة بين دالتي غاما و زيتا – لريمان :

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \quad ;s>0$$

الحل:

لدينا من العلاقة:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

وبالتالي ينتج لدينا:

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}\,dx=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\,dx=\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(n+1)x}\,dx$$

وبإجراء تغيير في المتحول $t=nx$ ، **فنجد أنَّ** $x=\frac{t}{n}$ **ومنه** $dx=\frac{dt}{n}$

ومنه $n=0 \Rightarrow t=0 \;;\; x=+\infty \Rightarrow t=+\infty$

وبالتالي يكون:

$$I=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{n}e^{-t}\;\frac{dt}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{\infty}t^{s-1}\,e^{-t}\;dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\,\Gamma(s)=\Gamma(s).\zeta(s)$$

حيث إن $\zeta(s)$ **دالة زيتا لريمان.**

وهو المطلوب.

مبرهنه (2) :

يُعطى التكامل المحيطي للدالة $f(z)=e^{z}z^{-\alpha}$ على طول المسار الموضح في الشكل1(a) بالعلاقة الآتية:

$$\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ \rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_L} e^z z^{-\alpha}\, dz = \lim_{\rho\to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-x}\left(xe^{-i\pi}\right)^{-\alpha}\left(e^{-i\pi}dx\right) + \int_{C_L} e^{\rho e^{i\rho}}\left(\rho e^{i\theta}\right)^{-\alpha}\rho e^{i\theta} i d\theta\right.$$
$$\left. + \int_p^{\infty} e^{-x}\left(xe^{-i\pi}\right)^{-\alpha}\left(e^{-i\pi}dx\right)\right] \quad (28)$$

البرهان :

على القسم الدائري C_ρ يكون لدينا $z = \rho e^{i\theta}$ ولذا يمكننا أن نكتب:

$$(29)\ \lim_{\rho\to 0}\left|\int_{C_p} e^z z^{-\alpha}\, dz\right| = \lim_{\rho\to 0}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}\rho^{1-\alpha} e^{i\theta(1-\alpha)} i d\theta\right| \le \lim_{\rho\to 0}\rho^{1 Re\{\alpha\}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho\cos\theta} e^{Im\{\alpha\}} d\theta$$

وإن كان $Re\{\alpha\} < 1$ ، عندها الطرف الأيمن من المعادلة أعلاه يتقارب إلى الصفر طالما أن ρ تسعى نحو الصفر، ومن ثم:

$$\lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_L} e^z z^{-\alpha}\, dz = \left(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}\right)\int_0^{\infty} x^{-\alpha} e^{-x}\, dx = 2i\Gamma(1-\alpha)\sin \pi\alpha \quad (30)$$

وسيتضح في القسم الثاني أنّ $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ من أجل $0 < \alpha < 1$ ، لتبسيط العلاقة (30) نحصل على:

$$\lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_L} e^z z^{-\alpha}\, dz = \frac{2\pi i}{\Gamma(\alpha)} \quad (31)$$

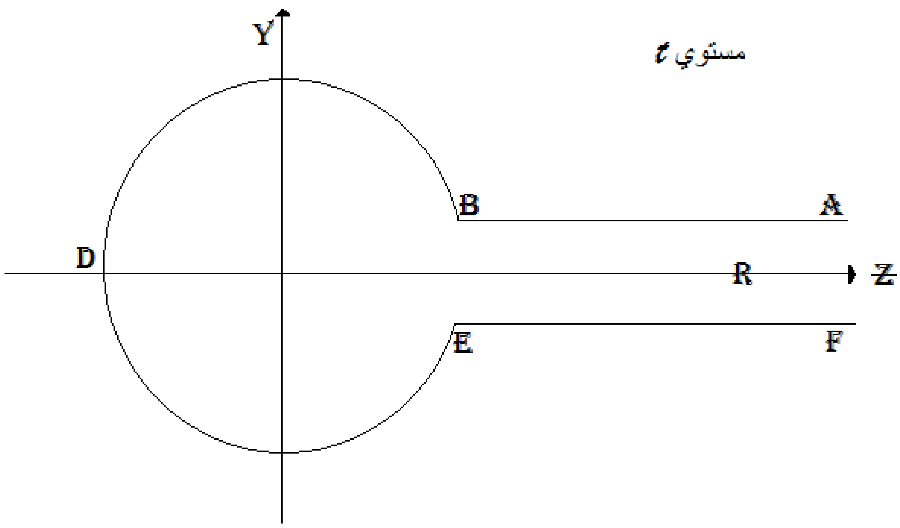
وبشكلٍ مشابه، وبمعاينة التكامل $\lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_L} e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz$ حول المسار C_R الموضح في الشكل 1(b) ، نجد أنَّ :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{e^{i2\pi\alpha} - 1}\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ \rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_L} e^z z^{-\alpha}\, dz \quad (32)$$

وهو المطلوب .

مبرهنة (3) :

إذا كانت C هي التكامل المحيطي (الكونتور) كما موضح في الشكل(2) ، ولجميع قيم z.



الشكل (2) التكامل المحيطي (الكونتور – C)

عندئذ تعطى دالة غاما بالعلاقة الآتية :

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\oint_C t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (33)$$

البرهان :.

بالرجوع إلى الشكل (2) ، نرى أنه على AB: t=x، على BDE: $t=\varepsilon e^{i\theta}$، وعلى EF: $t=x\,e^{2\pi i}$ ، وبالتالي فإن:

$$\int_{ABDEF} t^{z-1}e^{-t}dt=\int_R^{\varepsilon} x^{z-1}e^{-x}dx+\int_0^{2\pi}(\varepsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta+\int_{\varepsilon}^{R} x^{z-1}e^{2\pi i(z-1)}e^{x}dx$$

$$=(e^{2\pi iz}-1)\int_{\varepsilon}^{R} x^{z-1}e^{-x}dx+i\int_0^{2\pi}\varepsilon^z e^{i\theta z}e^{-\varepsilon e^{i\theta}}d\theta \qquad (34)$$

إذا كان Re{z}>0 ، وبأخذ النهاية عندما $\varepsilon\to 0$ ، و $R\to\infty$ ، نحصل على:

$$\int_C t^{z-1}e^{-t}dt=(e^{2\pi iz}-1)\int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx=(e^{2\pi iz}-1)\Gamma(z) \qquad (35)$$

ولكن الدوال في طرفي المعادلة تحليلية لجميع قيم z ، وبالتالي فإنه لجميع قيم z تكون دالة غاما معطاة بالعلاقة:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\oint_C t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (36)$$

وهو المطلوب .

- **تكامل هانكل المحيطي ودالة غاما:**

يُعطى تكامل هانكل المحيطي بالعلاقة:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_c u^{-z}e^{u}du \qquad 38$$

$e^{x}=\sum_{n\le 0} nx^{n}/n!$ هو دالة توليد للدالة العاملية المتبادلة. وأيضاً يتم اعتبار المجموع على أنه يمتد من n = -∞ إلى +∞ طالما أن $1/n! = 0$ إذا كانت n عدداً صحيحاً سالباً. ومن ثم يُلحظ تكامل هانكل مباشرةً بأنه صحيح إذاً z = n .

لا يكون ملحوظاً أنه كان محققاً من أجل عدد غير صحيح z . وأنه دالة تحليلية دورية فقط على المحور الديكارتي الذي يبقى صغيراً مع الارتقاء في المحور العقدي، يكون ثابتاً،وأن $1/|\Gamma(z)|$ تبقى أصغر أسياً مع انتقالنا عبر خطوط موازية إلى المحور العقدي z ، ويتراجع تكامل هانكل أسياً عند كلا الطرفين .

ويكون مرغوباً رقمياً بشكلٍ أكثر من تكامل أولر، حيث إنه يتقارب من أجل كل z العقدية بينما يحتاج تكامل أولر $Re(z) > 0$. وإن أحد الأشكال المكافئة لتكامل هانكل، يتم بإجراء التحويلات الآتية: $u = (c + ix)^2$ ، $du = 2i(c + ix)dx$، حيث c هي ثابت موجب حقيقي، هو:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(c+ix)^{1-2x}\exp(-[x-ic]^{2})dx \qquad (39)$$

القيمة العددية للتكامل في العلاقة(38) على طول المحيط الهابط الأكثر انحداراً، هو أسلوب عددي يساعد في حساب المقدار $1/\Gamma(z)$. وإن خط التكامل في العلاقة(39) هو مقارنة جيدة نسبياً مع محيطها الهابط الأكثر انحداراً.

وهناك أربع سمات خاصة تشكل إثباتنا لإجراء تكامل هانكل وهي:

1. e^xهي دالة توليد من أجل $1/n!$ لكل الأعداد الصحيحة n.
2. e^z لها اتجاه (تحديداً −1) حيث يتقلص أسياً .
3. e^zهي دالة يتم تقييمها ببساطة وبسرعة.
4. تبقى دالة غاما $\Gamma(z)$ مقيدة ، مع انتقالها عبر خطوط موازية لمحور عقدي.

عندما $\mathbf{I_0(x) = \Sigma_k (z^2k/4)^k / k!^2}$ ($\mathbf{I_0}$هو دالة بيسيل المعدلة)، يكون أبسط عند أخذ الدالة $\mathbf{\Gamma(z)^{-2}}$ فنحصل على :

$$\frac{1}{\Gamma(z)^{2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_c u^{-z}I_{0}(2\sqrt{u})du \qquad (40)$$

حيث C هو المحيط التكاملي. ويكون هذا التكامل متقارباً بشكلٍ مطلق إذا $3/4\text{-}Re(z) <$ ويتقارب (ولكن ليس بشكلٍ مطلق) إذاً $Re(z) > 1/4$ ، لأن التقارب يكون فقط في نصف مستوي، عندئذ يؤخذ التكامل السابق بالصيغة الآتيه:

$$\frac{1}{\Gamma(z)^2} = \frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{1-2z} I_0(2x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (iy+c)^{1-2z} I_0(2iy+2c)dy$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (c+i\sinh t)^{1-2z} J_0(2\sinh t - 2ic)dt \qquad (41)$$

التغيرات المتعاقبة للمتغيرات هي $u = x^2$, $du = 2xdx$ ، ومن ثم $x = iy + c$, $dx = idy$ ومن ثم $y = \sinh t$, $dy = i\cosh t dt$

و c هي ثابت حقيقي موجب .

الاستنتاجات والتوصيات:

يتضح لنا، إن تمثيل دالة غاما بمتغير عقدي يتم باستخدام إما سلسلة أو تكامل مناسب، ولها تطبيقات متعددة في المستويين الديكارتي والعقدي، واستخداماتها في حل بعض من المعادلات التكاملية، ومنها تكامل هانكل المحيطي، وفقاً لدالة بيسل من أجل **عدد صحيح n**.

ومما تقدم يمكننا التوصية بالبحث فيما يأتي:

1. يمكن تقييم تكامل هانكل الأصلي بشكلٍ غير متناهٍ بالشكل المغلق ، مثل السلسلة فوق الهندسية مع سلسلة ماكلورين لمعادلة بيسل المعدلة .
2. يمكن استخدام نظرية كارلسون وتطبيقات دالة غاما لايجاد حل لتكامل هانكل المحيطي من أجل **عدد غير صحيح n** .
3. استخدام دالة غاما وتطبيقاتها بحل البعض من المعادلات التكاملية، كتكامل (واليس، بوسون، ديرخليه، كوتشي، فرينل ،غوص).

المراجع:

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A., (EDS.), "Gamma (Factorial) Function" and "Incomplete Gamma Function." §6.1 and §6.5 in Handbook of Mathematical Functions and Formulas, Graphs and Mathematical Tables, 9th printing, Dover, New York, 1992, pp. 255-258 and pp 260-263.

[2] ANDREWS, G.E., ASKEY, R. and ROY, R., Special Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[3]ARTIN, E. The Gamma Function, HOLT, RINEHART, and WINSTO, New York,2002.

[4] BAMEW, E.W., "The Theory of the Gamma Function," Messenger Math., (2), Vol. 29, 2004, pp.64-128..

[5]BORWEIN, J.M. and ZUKER, I.J., "Elliptic Integral Evaluation of the Gamma Function at Rational Values and Small Denominator," IMA J. Numerical Analysis, Vol. 12,2005, pp. 519-526.

[6]DAVIS, P.J., "Leonhard Euler's Integral: Historical profile of the Gamma Function," Amer. Math. Monthly, Vol. 66, 2006, pp. 849-869.

[7]ERDELYL, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. and TRICOMI, F.G., "The Gamma Function," Ch. 1 in Higher Transcendental Functions, Vol. 1, Krieger, New York, 2007, pp. 1-55.

[8] HOCHSTADT, H., Special Functions of Mathematical Physics, HOLT, RINEHART and WINSTON, New York,2007.

[9] S. KANEMITSU, H. KUMAGAI, H.M. SRIVASTAVA, M. YOSHIMOTO, Some integral and asymptotic formulas associated with the Hurwitz zeta function, Appl. Math. Comput. 154 (2004) 641–664

[10]. D. SHEEN, I. H. SLOAN, and V. THOM´EE, A parallel method for time-discretization of

parabolic problems based on contour integral representation and quadrature, Math. Comput., 69 (2000), pp. 177–195.