Estimates for Fekete-Szegö Inequalitie in New Subclasses of Bi-Univalent Functions Defined by Subordinate and Integration Operators

Dr. Hassan Baddour*
Dr. Mohammad Ali**
Majd Ayash***

(Received 9 / 5 / 2024. Accepted 25 / 6 /2024)

□ ABSTRACT □

In this research, we present an estimate of the Fekete-Szegö inequality and the Hankel determinant of second order in some bi-univalent functions classes after we were able to use the Komatu integral operator and the exponential function, as well as the principle of dependency in setting definitions for two new classes of bi-univalent functions classes, where an estimate was found for the initial coefficients in previous studies.

Keywords: Bi-univalent functions, Hankel determinants, Coefficient bounds, Fekete-Szegö inequalities, Komatu integral operator, subordination.

* * **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia,Syria.**
** **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.**
*** **Postgraduate student(Ph.D.), Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Latakia, Syria. Majdayash@gmail.com**

تقدير لمتراجحة فكيت شيغو في بعض الصفوف الجديدة للتوابع ثنائية التباين المعرفة باستخدام مبدأ التبعية ومؤثرات تكاملية

د. حسن بدور *

د. محمد علي **

مجد عياش ***

(تاريخ الإيداع 9 / 5 / 2024. قُبِل للنشر في 25 / 6 / 2024)

ملخّص

نقدم في هذا البحث تقديراً لمتراجحة فيكيت شيغكو ومحدد هانكل من المرتبة والدرجة الثانية في بعض الصفوف التحليلية ثنائية التباين بعد ان تمكنا من استخدام مؤثر كماتو التكاملي والتابع الأسي وايضاً مبدأ التبعية في وضع تعريفين لصفين جديدين من صفوف التوابع ثنائية التباين حيث تم إيجاد تقدير للمعاملات الأبتدائية في دراسات سابقه .

الكلمات المفتاحية: تابع ثنائي التباين ، محددات هانكل ، حدود المعاملات، متراجحة فكيت شيغو، مؤثر كماتو التكاملي، مبدأ التبعية.

* **أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.**

** **أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.**

*** **طالب دراسات عليا (دكتوراه) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. Majdayash@gmail.com**

مقدمه:

ندرس في هذا البحث صفين جديدين من صفوف التوابع ثنائية التباين المعرف باستخدام مبدأ التبعية وباستخدام مؤثر كماتو التكاملي حيث أوجدنا تقديراً للمعاملات الثاني والثالث $|a_2|$ و $|a_3|$ لتوابع هذين الصفين في دراسات سابقة وقد تم في هذه الدراسة ايجاد تقديرا لمتراجحة فكيت شيغو "Fekete–Szegö inequality" في كل من هذين الصفين بالإضافة الى إيجاد تقدير لمحدد هانكل من المرتبة والدرجة الثانية في صفوف أخرى للتوابع ثنائية التباين.

أهمية البحث وأهدافه:

تعود أهمية البحث بأنه يقوم بدراسة التوابع المختلفة للأسرة σ والمعروفة بأنها أسرة التوابع ثنائية التباين والتي هي موضوع اهتمام العديد من الباحثين منذ عام 1985 بعد أن تم حل مسألة تقدير المعاملات على يد الباحث دوبرانج وذلك في صف التوابع المتباينة S . وهدف هذا البحث هو إيجاد تقدير لمحدد هانكل من المرتبة والدرجة الثانية ومتراجحة فيكت شيغو في بعض الصفوف الجزئية من σ.

طرائق البحث ومواده:

البحث موضوع رياضي مجرّد يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرّياضيات النظرية (تحليل عقدي). وتم إنجازه بالأعتماد على مراجع علميّة تخصصية وبحوث علميّة منشورة في دوريّات عالميّة. والطرق المتبعة فتعتمد بشكل أساسي على مفاهيم التحليل العقدي وبعض الخواص الهامة لصف التوابع ذات القسم الحقيقي الموجب $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ومنها مبرهنة كاراثيودوري ومبرهنة دوبرانج ومنشور تايلور لتوابع الصف $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ بالإضافة لبعض خواص النشر في سلاسل القوى وبعض أساليب النشر الخاصة كمنشور ثنائي حد نيوتن أويلر للأسس الحقيقية $\boldsymbol{\alpha}$ ومنشور التوابع العكسية لتوابع الصف $\boldsymbol{S}$ وأيضاً مفاهيم معروفة وهامة في هذا المجال كمحددات هانكل ومتراجحات فكيت شيغو بالإضافة إلى مطابقات خاصة تستخدام مفهوم التبعية وبعض التوابع الخاصة كتابع المنحنيات شبيهة الصدفية وأيضا مؤثرات اشتقاق أو مكاملة سيتم ذكرها لاحقاً.

تعاريف ومفاهيم أساسية

يرمز بالرمز $\mathcal{A}$ الى مجموعة التوابع $f(z)$ التحليلية على قرص الواحدة $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ والتي تحقق الشرط $f(z)=f'(0)-1=0$ والمعروف بأنها تمثل بسلسلة تايلور ذات الشكل

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \qquad (1)$$

ويرمز بالرمز $\mathcal{S}$ لصف التوابع الجزئية من $\mathcal{A}$ والمتباينة على قرص الواحدة، ومن المعروف أنه وفقاً لنظرية الربع للباحث "Koebe" ،انظر[1]، ان كل تابع من الصف $\mathcal{S}$ مداه يحوي القرص $\{w:|w|<1/4\}$. لذلك كل تابع f متباين من الصف $\mathcal{S}$ يملك معكوساً f^{-1} يحقق أن $f^{-1}(f(z))=z,(z\in\mathbb{D})$ و $f(f^{-1}(w))=w$ ($|w|<r_0(f);r_0(f)\geq 1/4$) ; وبسبب التباين يمكن لهذا المعكوس أن يعبر عنة بسلسلة قوى(تايلور) كمايلي

$$g(w)=f^{-1}(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_nw^n=w-a_2w^2+$$
$$(2a_2^2-a_3)w^3+(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\ \dots \qquad (2)$$

يقال عن التابع $f\in\mathcal{A}$ أنه ثنائي التباين على قرص الواحدة $\mathbb{D}$ اذا كان كل من f ومعكوسه $g=f^{-1}$ متبايناً على قرص الواحدة. ويرمز بالرمز σ الى صف التوابع ثنائية التباين على $\mathbb{D}$ ومن الأمثلة على توابع من الصف σ

$$\frac{z}{1-z}\quad,\quad -\log(1-z)\quad,\quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

تعريف 1: (انظر [2])
من أجل كل $f \in \mathcal{A}$ لة النشر (1) يرمز لمحددات هانكل للتابع f من الدرجة q و المرتبة n بالرمز $H_q(n)$ و الذي يعطى بالشكل التالي:

$$H_q(n)=\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{bmatrix}$$

حيث $n = 1,2, \dots ,\quad q = 1,2, \dots,$.
من أجل $q = 2$ و $n = 1$ نحصل على محدد هانكل من الدرجة الثانية والمرتبة الأولى

$$H_2(1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} = a_1 a_3 - a_2^2$$

من المعروف في نشر التوابع ثنائية التباين أن $a_1 = 1$ لذلك المحدد $H_2(1)$ بوجود ثابت حقيقي $\mu \in \mathbb{R}$ يعرف بمتراجحة فكيت شيغو $a_3 - \mu a_2^2$.
من أجل $q = 2$ و $n = 2$ نحصل على محدد هانكل من الدرجة الثانية والمرتبة الثانية

$$H_2(2) = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2.$$

مؤخراً في عامي 2018 و 2019 عرفت العديد من صفوف التوابع ثنائية التباين المبنية على مؤثرات معروفة كمؤثر سيلاجين المعمم ومؤثر ترمبلي وغيرها كمؤثر كماتو الموجوده في المراجع [3,4,5,6] ، في مايلي بعض المبرهنات والتعاريف المساعدة للوصول الى أهداف بحثنا هذا:

تعريف (1): (انظر[3])
يرمز بالرمز B الى صف التوابع المحدودة أو مايسمى توابع شوارز وهي التوابع $w(z)$ التحليلية على قرص الواحدة $\mathbb{D}$ والتي تحقق أن :

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n , \qquad w(0) = 0 , |w(z)| < 1$$

تعريف (2): (انظر[1])
ليكن التابعان f, g التحليليين على $\mathbb{D}$ يقال عن f أنه تبعية لـ g ويشار له بالشكل $f \prec g$ اذا وجد تابع شوارز $W(z) \in B$ تحليلي على $\mathbb{D}$ بحيث أن :

$$f(z) = g\big(w(z)\big) \quad , \qquad (z \in \mathbb{D})$$

تعريف (3): (انظر[3])
من أجل كل تابع $f \in \mathcal{A}$ يرمز بالرمز $\mathcal{K}_t^{\eta} f(z)$ لمؤثر كماتو التكاملي لتابع f والذي يعرف كمايلي:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t^{\eta} f(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{t}{t+n-1}\right)^{\eta} a_n z^n \,;\ (t > 0 , \eta \geq 0, z \in \mathbb{D}\ ) \\ &= \frac{t^{\eta}}{\Gamma(\eta)} \int_0^1 \xi^{t-2} \left(\log \frac{1}{\xi}\right)^{\eta-1} f(z\xi) d\xi \end{aligned}$$

تعريف (4): (انظر[6])
يقال عن التابع $f \in \sigma$ الذي له النشر (1) أنه من الصف $A_{\sigma}(\alpha, \lambda, \gamma, \mu)$ إذا وفقط إذا حقق الشرط التالي:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}e}\left((1-\lambda) \frac{\gamma T_z^{\mu,\gamma} f(z)}{\mu z} + \lambda \frac{\gamma \left(T_z^{\mu,\gamma} f(z)\right)'}{\mu} \right) > \alpha \quad ; z \in \Delta$$

حيث $0 \leq \alpha < 1\,;\ 0 \leq \lambda \leq 1 \quad ; \quad 0 < \mu \leq 1 \quad ; \quad \mu > \gamma \quad ; \quad 0 < \ \mu - \gamma < 1$

في مايلي نورد تعريف للصفين الجديدين $\mathcal{H}^{\mathcal{K},\eta}_{\Sigma,\rho}(e^z)$ و $\mathcal{M}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(\tilde{\mathfrak{p}})$ باستخدام مبدأ التبعية وأيضاً مؤثر كماتو التكاملي والتابع الأسي بالإضافة لتابع المنحنيات شبيهة الصدفة ونذكر بعض النتائج التي تم الحصول عليها فيما يخص تقدير المعاملات الأبتدائية في هذه الصفوف والمذكورة في المرجع [10] لمزيد من التفاصيل يمكن العودة للمرجع.

تعريف (5): (انظر[10])

كل تابع $f \in \sigma$ معطى وفق العلاقة (1) يقال أنه من الصف:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K},\eta}_{\Sigma,\rho}(e^z)\ (1 \geq \rho \geq 0, t > 0, \eta \geq 0, z, w \in \mathbb{D})$$

اذا حقق شرطي التبعية التاليين :

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[\left(\mathcal{K}^{\eta}_{t} f(z)\right)' + \rho z\left(\mathcal{K}^{\eta}_{t} f(z)\right)'' - 1\right] \prec e^z \tag{3}$$

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[\left(\mathcal{K}^{\eta}_{t} g(w)\right)' + \rho w\left(\mathcal{K}^{\eta}_{t} g(w)\right)'' - 1\right] \prec e^w \tag{4}$$

حيث أن التابع $g(w)$ معطي وفق العلاقة (2) ولدينا $\tau = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$

تعريف (5): (انظر[10])

كل تابع $f \in \sigma$ له النشر (1) يقال أنه من الصف :

$$\mathcal{M}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(\tilde{\mathfrak{p}})\ \left(1 > \rho \geq 0, t > 0, \eta \geq 0, z, w \in \mathbb{U}\right)$$

اذا حقق شرطي التبعية التاليين :

$$\left[(1-\rho)\frac{\mathcal{K}^{\eta}_{t} f(z)}{f(z)} + \rho\left(1 + \frac{z\left(\mathcal{K}^{\eta}_{t} f(z)\right)'}{f'(z)}\right)\right] \prec \tilde{p}(z) = \frac{1+\tau^2 z^2}{1-\tau z-\tau^2 z^2} \tag{5}$$

$$\left[(1-\rho)\frac{\mathcal{K}^{\eta}_{t} g(w)}{g(w)} + \rho\left(1 + \frac{z\left(\mathcal{K}^{\eta}_{t} g(w)\right)'}{g'(w)}\right)\right] \prec \tilde{p}(w) = \frac{1+\tau^2 w^2}{1-\tau w-\tau^2 w^2} \tag{6}$$

حيث أن التابع $g(w)$ معطي وفق العلاقة (2.8) ولدينا $\tau = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$

مبرهنة (1) : (انظر[10])

اذا كان $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(e^z)$ عندئذٍ فإن:

$$|a_2| \leq min\left\{\frac{|\tau|}{2(1+\rho)\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}}, \sqrt{\frac{|\tau|}{2(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}}}\right\} \tag{7}$$

$$|a_3| \leq min\left\{\frac{|\tau|}{(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}}, \frac{|\tau|\left(|\tau|(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta} + 2(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}\right)}{4(1+2\rho)(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}}\right\} \tag{8}$$

مبرهنة (2) : (انظر[10])

اذا كان $f \in \mathcal{M}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(\tilde{\mathfrak{p}})$ عندئذٍ فإن:

$$|a_2| \leq min\left\{\frac{|\tau|}{(1-\rho)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)}, \sqrt{\frac{|\tau|(1+3|\tau|)}{(1-\rho)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta} - \left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)}}\right\} \tag{9}$$

$$|a_3| \leq min\left\{\begin{array}{c}\dfrac{|\tau|\left(\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)|\tau|+\left(2\rho+(1-\rho)(1+3|\tau|)\right)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)^{2}\right)}{(1-\rho)^{2}\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)^{2}}, \\ \dfrac{|\tau|(1+3|\tau|)\sqrt{1-\rho}\left(1-2\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}+\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)+2\rho\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)\left[|\tau|(1+3|\tau|)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{(1-\rho)^{\frac{3}{2}}\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)}\end{array}\right\} \quad (10)$$

مبرهنة (3) : (انظر[6])

من أجل $f \in A_{\sigma}(\alpha,\lambda,\gamma,\mu)$ الذي له النشر (1) حيث أن

$$0 \leq \alpha < 1 \,;\, 0 \leq \lambda \leq 1 \;;\; 0 < \mu \leq 1 \;;\; \mu > \gamma \;;\; 0 < \mu - \gamma < 1$$

عندئذٍ يكون

$$|a_2| \leq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}}, & 0 \leq \alpha < 1 - \dfrac{(1+\lambda)^2(\gamma+2)(\mu+1)}{2(1+2\lambda)(\mu+2)(\gamma+1)} \\ \dfrac{2(1-\alpha)(\gamma+1)}{(1+\lambda)(\mu+1)} & ; 1 - \dfrac{(1+\lambda)^2(\gamma+2)(\mu+1)}{2(1+2\lambda)(\mu+2)(\gamma+1)} \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}$$

مبرهنة (4) : (انظر[6])

من أجل $f \in A_{\sigma}(\alpha,\lambda,\gamma,\mu)$ الذي له النشر (1) حيث أن

$$0 \leq \alpha < 1 \;;\; 0 \leq \lambda \leq 1 \;;\; 0 < \mu \leq 1 \;;\; \mu > \gamma \;;\; 0 < \mu - \gamma < 1$$

عندئذٍ يكون :

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)\Gamma(\mu+1)\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\mu)[1+\lambda(n-1)]} \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$$

النتائج والمناقشة:

نقدم في المبرهنتين التاليتين تقديراً لمتراجحة فكيت شيغو في الصفين $\mathcal{H}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(e^z)$ ، $\mathcal{M}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(\tilde{\mathfrak{p}})$:

مبرهنة (5):

اذا كان $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{K},\eta}_{\sigma,\rho}(e^z)$ عندئذٍ فإن:

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq min\{\varphi(\rho)|(2-\mu)| \;,\; \omega(\rho)|1-\mu| + \varphi(\rho)\}$$

حيث $\varphi(\rho) = \frac{|\tau|}{2(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}},\ \omega(\rho) = \frac{|\tau|^2}{4(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}},\ \mu \in$ □

البرهان:

من الفرع الثاني للعلاقة (7) والفرع الأول للعلاقة (8) نجد أن:

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{|\tau|}{(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}} - \mu\frac{|\tau|}{2(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}}$$

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{|\tau|(2-\mu)}{(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}}$$

لدينا $\varphi(\rho) = \frac{|\tau|}{2(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}}$

$$a_3 - \mu a_2^2 = \varphi(\rho)(2-\mu)$$

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right| \le \varphi(\rho)|(2-\mu)| \tag{11}$$

من الفرع الأول للعلاقة (7) والفرع الثاني للعلاقة (8) نجد أن:

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{|\tau|\left(|\tau|(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}+2(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}\right)}{4(1+2\rho)(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}}-\mu\frac{|\tau|^2}{4(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}}$$

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{|\tau|^2}{4(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}}+\frac{|\tau|}{2(1+2\rho)\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}}-\mu\frac{|\tau|^2}{4(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}}$$

لدينا $\omega(\rho)=\frac{|\tau|^2}{4(1+\rho)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2\eta}}$

$$a_3-\mu a_2^2=\omega(\rho)(1-\mu)+\varphi(\rho)$$

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \omega(\rho)|1-\mu|+\varphi(\rho) \tag{12}$$

من العلاقة (11) و (12) يتم المطلوب.

مبرهنة (6):

اذا كان $f\in\mathcal{M}_{\sigma,\rho}^{\mathcal{K},\eta}(\tilde{\mathfrak{p}})$ عندئذٍ فإن:

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \min\left\{\begin{array}{c}\dfrac{|\tau|\left(\xi(\rho)|\tau|+(1-\rho)\big(2\rho+(1+3|\tau|)\big)\big(\beta(\rho)\big)^2+|\mu|(1+3|\tau|)\xi(\rho)\big(\beta(\rho)\big)^2\right)}{\xi(\rho)\zeta(\rho)\big(\beta(\rho)\big)^2},\\ \dfrac{|\tau|\sqrt{1-\rho}(1+3|\tau|)\Big(\xi(\rho)+\zeta(\rho)(1-\rho)\Big)+|\mu||\tau|^2\xi(\rho)\zeta(\rho)(1-\rho)^2+2\rho\beta(\rho)\sqrt{\zeta(\rho)|\tau|(1-\rho)(1+3|\tau|)}}{\xi(\rho)\zeta(\rho)\beta^2(\rho)(1-\rho)^2}\end{array}\right\}$$

حيث $\mu\in$ □ وأيضاً

$$\xi(\rho)=(1-\rho)^2\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right),$$

$$\zeta(\rho)=(1-\rho)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right),$$

$$\beta(\rho)=(1-\rho)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right).$$

البرهان :

من الفرع الثاني للعلاقة (9) والفرع الأول للعلاقة (10) نجد أن:

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|\left(\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)|\tau|+\big(2\rho+(1-\rho)(1+3|\tau|)\big)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)^2\right)}{(1-\rho)^2\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)^2}+|\mu|\frac{|\tau|(1+3|\tau|)}{(1-\rho)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)}$$

لدينا

$$\xi(\rho)=(1-\rho)^2\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right),$$

$$\zeta(\rho)=(1-\rho)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right),$$

$$\beta(\rho)=(1-\rho)\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right).$$

بالتالي نجد

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|\left(\frac{\xi(\rho)|\tau|}{(1-\rho)^2}+\left(2\rho+(1+3|\tau|)\right)\frac{\left(\beta(\rho)\right)^2}{(1-\rho)}\right)}{\frac{\xi(\rho)\left(\beta(\rho)\right)^2}{(1-\rho)^2}}+|\mu|\frac{|\tau|(1+3|\tau|)}{\zeta(\rho)}$$

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|\left(\xi(\rho)|\tau|+(1-\rho)\left(2\rho+(1+3|\tau|)\right)\left(\beta(\rho)\right)^2\right)}{\xi(\rho)\left(\beta(\rho)\right)^2} +|\mu|\frac{|\tau|(1+3|\tau|)}{\zeta(\rho)}$$

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|\left(\xi(\rho)|\tau|+(1-\rho)\left(2\rho+(1+3|\tau|)\right)\left(\beta(\rho)\right)^2+|\mu|(1+3|\tau|)\xi(\rho)\left(\beta(\rho)\right)^2\right)}{\xi(\rho)\zeta(\rho)\left(\beta(\rho)\right)^2} \quad (13)$$

من الفرع الأول للعلاقة (9) والفرع الثاني للعلاقة (10) نجد أن:

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|(1+3|\tau|)\sqrt{1-\rho}\left(1-2\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}+\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)+2\rho\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)\left[|\tau|(1+3|\tau|)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{(1-\rho)^{\frac{3}{2}}\left(1-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)\left(\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}-\left(\frac{t}{t+2}\right)^{\eta}\right)} +|\mu|\frac{|\tau|^2}{(1-\rho)^2\left(1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\eta}\right)^2}$$

بالتالي نجد

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|(1+3|\tau|)\sqrt{1-\rho}\left(\frac{\xi(\rho)}{(1-\rho)^2}+\frac{\zeta(\rho)}{(1-\rho)}\right)+\frac{2\rho\beta(\rho)}{(1-\rho)}\left[\frac{\zeta(\rho)|\tau|(1+3|\tau|)}{(1-\rho)}\right]^{\frac{1}{2}}}{\xi(\rho)\zeta(\rho)}+|\mu|\frac{|\tau|^2}{\beta^2(\rho)}$$

$$|a_3-\mu a_2^2| \le \frac{|\tau|\sqrt{1-\rho}(1+3|\tau|)\left(\xi(\rho)+\zeta(\rho)(1-\rho)\right)+|\mu||\tau|^2\xi(\rho)\zeta(\rho)(1-\rho)^2+2\rho\beta(\rho)\sqrt{\zeta(\rho)|\tau|(1-\rho)(1+3|\tau|)}}{\xi(\rho)\zeta(\rho)\beta^2(\rho)(1-\rho)^2} \quad (14)$$

من العلاقة (13) والعلاقة (14) يتم الإثبات.

نقدم في المبرهنة التالية تقديراً لمحدد هانكل من الدرجة والمرتبة الثانية في الصف $A_\sigma(\alpha,\lambda,\gamma,\mu)$:

مبرهنة (7):

من أجل $f \in A_\sigma(\alpha,\lambda,\gamma,\mu)$ الذي له النشر (1) حيث أن

$$0\le\alpha<1\ ;\ 0\le\lambda\le 1\ \ ;\ \ 0<\mu\le 1\ \ ;\ \ \mu>\gamma\ \ ;\ \ 0<\ \mu-\gamma<1$$

عندئذٍ في حالة $0\le\alpha<1-\frac{(1+\lambda)^2(\gamma+2)(\mu+1)}{2(1+2\lambda)(\mu+2)(\gamma+1)}$ يكون

$$|H_2(2)| \le \frac{(3+\gamma)}{(1+3\lambda)(3+\mu)\sqrt{(1+2\lambda)}}\left(\frac{2(1-\alpha)(2+\gamma)(1+\gamma)}{(2+\mu)(1+\mu)}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}\right)^2$$

وفي حالة $1-\frac{(1+\lambda)^2(\gamma+2)(\mu+1)}{2(1+2\lambda)(\mu+2)(\gamma+1)}\le\alpha<1$ يكون

$$|H_2(2)| \le \frac{4(1-\alpha)^2(3+\gamma)(2+\gamma)(1+\gamma)^2}{(3+\mu)(2+\mu)(1+\mu)^2(1+\lambda)(1+3\lambda)}+\left(\frac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}\right)^2$$

البرهان:

من المبرهنة (4) لدينا

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)\Gamma(\mu+1)\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n+\mu)[1+\lambda(n-1)]}$$

بأخذ $n = 4$ نجد أن:

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)\Gamma(\mu+1)\Gamma(4+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(4+\mu)[1+3\lambda]}$$

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)\Gamma(\mu+1)(3+\gamma)(2+\gamma)(1+\gamma)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1)(3+\mu)(2+\mu)(1+\mu)\Gamma(1+\mu)[1+3\lambda]}$$

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\alpha)(3+\gamma)(2+\gamma)(1+\gamma)}{(3+\mu)(2+\mu)(1+\mu)[1+3\lambda]} \tag{15}$$

من المبرهنة (3) لدينا

$$|a_2| \leq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}}, & 0 \leq \alpha < 1 - \dfrac{(1+\lambda)^2(\gamma+2)(\mu+1)}{2(1+2\lambda)(\mu+2)(\gamma+1)} \\ \dfrac{2(1-\alpha)(\gamma+1)}{(1+\lambda)(\mu+1)} & ; 1 - \dfrac{(1+\lambda)^2(\gamma+2)(\mu+1)}{2(1+2\lambda)(\mu+2)(\gamma+1)} \leq \alpha < 1 \end{cases} \tag{16}$$

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)} \tag{17}$$

باستخدام التعريف (1) لدينا

$$|H_2(2)| \leq |a_2||a_4| + |a_3^2|$$

من الفرع الأول للعلاقة (16) مع العلاقات (15) و (17) نجد التالي

$$|H_2(2)| \leq \frac{(3+\gamma)}{(1+3\lambda)(3+\mu)\sqrt{(1+2\lambda)}}\left(\frac{2(1-\alpha)(2+\gamma)(1+\gamma)}{(2+\mu)(1+\mu)}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}\right)^2$$

من الفرع الثاني للعلاقة (16) مع العلاقات (15) و (17) نجد التالي

$$|H_2(2)| \leq \frac{4(1-\alpha)^2(3+\gamma)(2+\gamma)(1+\gamma)^2}{(3+\mu)(2+\mu)(1+\mu)^2(1+\lambda)(1+3\lambda)} + \left(\frac{2(1-\alpha)(\gamma+2)(\gamma+1)}{(1+2\lambda)(\mu+2)(\mu+1)}\right)^2$$

بذلك يتم الإثبات.

الاستنتاجات والتّوصيات:

توصلنا في هذه الدراسة إلى أيجاد تقدير لمتراجحة فكيت شيغو في كل من الصفين $\mathcal{H}_{\sigma,\rho}^{\mathcal{K},\eta}(e^z)$ ، $\mathcal{M}_{\sigma,\rho}^{\mathcal{K},\eta}(\tilde{\mathrm{p}})$ المعرفين باستخدام مؤثر كماتو التكاملي ومبدأ التبعية وتابع المنحنيات شبيهة الصدفية، وأيضاً أوجدنا تقدير لمحدد هانكل من المرتبة والدرجة الثانية في الصف $A_\sigma(\alpha,\lambda,\gamma,\mu)$. ونوصي بمحاولة إيجاد تقدير للمعامل الرابع في الصفين $\mathcal{H}_{\sigma,\rho}^{\mathcal{K},\eta}(e^z)$ ، $\mathcal{M}_{\sigma,\rho}^{\mathcal{K},\eta}(\tilde{\mathrm{p}})$ الأمر الذي يقود لمحاولة إيجاد تقدير لمحدد هانكل الثاني في هذه الصفوف.

References:

[1] Duren, P. L. (1983). Univalent functions,Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 259, *Springer*, *New York*.
[2] Noonan, J.W. Thomas, D.K. (1976). On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions,Trans. *Amer. Math. Soc*., 223(2), 337-346.
[3] Altinkaya, Ş. YALÇIN, S. Çakmak, S. (2019). A Subclass of Bi-Univalent Functions Based on the Faber Polynomial Expansions and the Fibonacci Numbers. *Mathematics*, 7, 160.
[4] Altinkaya Ş, Yalçin S, Çakmak S. (2019). A Subclass of Bi-Univalent Functions Based on the Faber Polynomial Expansions and the Fibonacci Numbers. *Mathematics*, 7, 160.
[5] Singh, G. (2019). A Subclass of Bi-Univalent Functions Defined by Generalized Sãlãgean Operator Related to Shell-Like Curves Connected with Fibonacci Numbers. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Article ID 7628083, 7 pages.
[6] Srivastava, H. Eker, S. Hamidi, G. and Jahangiri, M. (2018). Faber polynomial coefficient estimates for bi-univalent functions defined by the Tremblay fractional derivative operator. *Bull. Iran. Math. Soc*, 44, 149–157.
[7] Wanas, A. Páll-Szabó, Á. (2021). Coefficients bounds for new subclasses of analytic and m-fold symmetric bi-univalent Functions. *Stud Univ Babes-Bolyai Math*. 66(4):659-666.
[8] Juma, A. Al-Fayadh, A. Shehab, N. (2022). Estimates of Coefficient for Certain Subclasses of –Fold Symmetric Bi-Univalent Functions. *Iraqi J. Sci*.63(5): 2155-2163.
[9] Sakar, F. Wanas, A. (2023). Upper Bounds for Initial Taylor-Maclaurin Coefficients of New Families of Bi-Univalent Functions. *Int J Open Problems Complex Analysis*. 15(1).
[10] Ayash, M. Baddour, H. Ali, M. Wanas, A. (2024). A New Subclasses of Bi-Univalent Functions Based on Subordinate for Exponential Function or Shell-Like Curves Connected with Fibonacci Numbers. *accepted for publication in Baghdad Science Journa* on 18-3-2024.