

Using Trust Region Technique For Solving Nonlinear Systems Of Equations

Dr. Suliman M. Mahmoud *

Dr. Samer Ehsan **

Gaafar I. Dayoub ***

(Received 14 / 2 / 2024. Accepted 26 / 6 / 2024)

□ ABSTRACT □

The Trust region method is one of the most effective and common methods for solving nonlinear system of equations. In this paper, a numerical method was presented for solving systems of nonlinear equations. The proposed method is based on the Trust region strategy, adaptive radius, and conjugate gradient methods (CG) that are used when the Trust region algorithm is unsuccessful, a family of CG methods is used to prevent resolving the trust-region subproblem has a high computational cost. The proposed method contributes to activating the adaptive radius of the Trust region in an appropriate manner for convergence, improving the efficiency and effectiveness of the Trust region, and thus reducing the computational cost of the algorithm. Has been proven convergence the proposed, Trust region and tested by solving four standard test problems found in previous studies, comparisons the results obtained with the results of other methods, show that the efficiency and numerical accuracy of the proposed method.

Keywords: Nonlinear equations, Trust region, Adaptive radius, conjugate gradient method.

Copyright



:Tishreen University journal-Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.
Suliman_mmn@yahoo.com

** Associate Professor, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student, Dept. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.
jaafar.dayoub.77@gmail.com

استخدام تقنية المنطقة الآمنة لحل جمل المعادلات غير الخطية

د. سليمان محمد محمود*

د. سمير احسان**

جعفر إبراهيم ديوب***

تاريخ الإيداع 14 / 2 / 2024. قُبل للنشر في 26 / 6 / 2024

□ ملخص □

تعد استراتيجية المنطقة الآمنة من الطرائق الفعالة والحديثة لحل جمل المعادلات غير الخطية. تم في هذا البحث تقديم طريقة عددية لحل جمل المعادلات غير الخطية، تعتمد الطريقة المقترحة على استراتيجية المنطقة الآمنة ونصف القطر التكيفي وطرائق التدرج المترافقة التي يتم استخدامها عند فشل خوارزمية المنطقة الآمنة وذلك لحل المشكلة الفرعية للمنطقة الآمنة ذات الكلفة الحسابية العالية. تساهم الطريقة المقترحة بتفعيل نصف قطر المنطقة الآمنة التكيفي بالشكل المناسب لتسريع التقارب وتحسين كفاءة وفعالية المنطقة الآمنة وبالتالي تقليل الكلفة الحسابية للخوارزمية. تم اثبات تقارب تقنية المنطقة الآمنة المقترحة. واختبارها بحل اربع مسائل اختبار قياسية موجودة في دراسات سابقة وبمقارنة النتائج التي تم التوصل إليها مع نتائج لطرائق أخرى تظهر الكفاءة والدقة العددية لطريقتنا المقترحة .

الكلمات المفتاحية: معادلات غير خطية، المنطقة الآمنة، نصف قطر تكيفي، طرائق التدرج المترافقة.

Suliman_mmn@yahoo.com



حقوق النشر : مجلة جامعة تشرين- سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص

CC BY-NC-SA 04

*أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

jaafar.dayoub.77@gmail.com

مقدمة:

يعد إيجاد الحلول لجمل المعادلات غير الخطية هام جداً نظراً لأنه في العديد من المسائل في الفيزياء والكيمياء والاقتصاد والهندسة وعلوم كثيرة تؤول في احدى مراحلها إلى الحاجة لحل مثل هذه المعادلات فالمعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية يؤول معظمها إلى جمل معادلات غير خطية ولسوء الحظ فإن معظم هذه المعادلات لا يمكن حلها بالطريقة التحليلية ولهذا نحتاج إلى طرائق عددية خاصة وفعالة لحلها. قدمت العديد من الطرائق مثل طرائق نيوتن وغيرها ولكنها قاصرة وغير فعالة بسبب كلفته العالية عندما يكون عدد المعادلات كبير. استخدمت مؤخراً طرائق المنطقة الآمنة لحل مثل هذه المعادلات وتعد من الطرائق الفعالة والحديثة حيث طور الباحثون العديد من الخوارزميات لتحسين الحلول.

لنكن جملة المعادلات غير الخطية الآتية:

$$F(x) = 0 ; x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

حيث: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ دالة قابل للاشتقاق (مرتين على الأقل).
إن حل المسألة (1) يكافئ حل المسألة الآتية:

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 \quad (2)$$

s. t $x \in \mathbb{R}^n$

حيث: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

سنعتمد في الطريقة على النموذج التربيعي الآتي:

$$\min m_k(x_k + d_k) = f_k + g^T(x_k) \cdot d_k + \frac{1}{2} d_k^T H(x_k) d_k \quad (3)$$

s. t $d_k \in \mathbb{R}^n$ and $\|d_k\| \leq \Delta_k$

بحيث أن $\Delta_k > 0$ نصف قطر المنطقة الآمنة، d_k الخطوة.

$g(x_k) = \nabla f(x_k)$ ، H_k مصفوفة هيسيان.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث الى إيجاد طريقة عددية لحل جمل المعادلات غير الخطية باستخدام استراتيجية المنطقة الآمنة وطرائق التدرج المترافقة، ثم اختبار الطريقة المقدمه بإعداد البرمجيات اللازمة لخوارزمية الطريقة وتنفيذها لحل مجموعة من مسائل الاختبار المعيارية ومقارنة النتائج التي يتم الحصول عليها مع نتائج أبحاث أخرى وذلك للتأكد من فعالية الطريقة المقترحة. تكمن أهمية البحث في أهمية المسألة المطروحة لأنها تعتبر حل لكثير من العلوم المختلفة كالتجارة والاقتصاد والإدارة.

طرائق البحث ومواده:

قدمت العديد من الطرائق لحل جمل المعادلات غير الخطية مثل طريقة نيوتن والشبيهة بنيوتن [3,18] وطريقة غاوص نيوتن [19] وطريقة ليفينبرغ ماركواردت [6,11] وطرائق المنطقة الآمنة [8]، وطرائق المنطقة الآمنة مع البحث الخطي [1,14,21]، وطريقة المنطقة الآمنة المعدلة [10].

قدم Shi وآخرون في عام 2008 [26] طريقة لحل جمل المعادلات غير الخطية باستخدام استراتيجية المنطقة الآمنة مع نصف قطر تكيفي عند كل تكرار حيث تمكن هذا النهج من تقليل عدد المشكلات الفرعية، قدم Esmaili وآخرون في عام 2014 [7] نصف قطر تكيفي جديد للمنطقة الآمنة لحل جمل المعادلات غير الخطية، قدم Amini وآخرون في عام 2016 [2] طريقة لحل جمل المعادلات غير الخطية باستخدام استراتيجية المنطقة الآمنة وطريقة البحث الخطي ونصف قطر تكيفي لتجنب الكلفة الحسابية العالية لحل المشكلة الفرعية لطريقة المنطقة الآمنة، قدم Rahpemaïi وآخرون في عام 2017 [23] طريقة لحل جمل المعادلات غير الخطية باستخدام استراتيجية المنطقة الآمنة وتقنية بارزيلي بوروبين ذات الذاكرة المخفضة والتي يمكنها التحكم بشكل جيد بنصف قطر المنطقة الآمنة لتحسين كفاءة استراتيجية نصف القطر التكيفي. بالإضافة إلى ذلك قدم Rahpemaïi وآخرون في عام 2019 [17] طريقة لحل جمل المعادلات غير الخطية باستخدام استراتيجية المنطقة الآمنة ونصف قطر تكيفي جديد وطريقة البحث الخطي، قدم Rezaeipas و Ahrafi في عام 2023 [24] طريقة لحل جمل المعادلات غير الخطية باستخدام استراتيجية المنطقة الآمنة وطريقة ليفينبرغ ماركواردت .

استراتيجية المنطقة الآمنة: تعتمد على ثلاث خطوات أساسية وهي:

1 - بناء نموذج تربيعي m_k مشابه لنموذج الدالة f حول x_k ولكن أسهل منه.

2 - حل تقريبي للمسألة الأصغرية:

$$\min_d m(x_k + d)$$

البحث عن x_{k+1} التي تحقق الشرط:

$$m_k(x_{k+1}) < m_k(x_k)$$

داخل المنطقة الآمنة الصغيرة نسبياً (نموذجياً كرة صغيرة)، $\|d\| = \Delta$ هو نصف قطر المنطقة الآمنة.

3 - إذا لم تقدم x_{k+1} تصغيراً كافياً ل f نقلص المنطقة الآمنة.

طرائق التدرج المترافقة: تستخدم هذه الطرائق متتالية من المتجهات المترافقة التي تعتمد على شعاع التدرج. وتقوم على مرحلتين أساسيتين هما إيجاد اتجاه الانحدار ثم حساب طول الخطوة.

تتشابه هذه الطرائق من حيث الجوهر بأنها تعتمد على استراتيجية البحث الخطي لتوجيه الحل و الانتقال إلى الخطوة الجديدة x_{k+1} من الخطوة السابقة x_k وفق علاقة تكرارية من الشكل:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

وتختلف طريقة عن أخرى بكيفية إيجاد اتجاه البحث d_k عند التكرار k وكيفية إيجاد طول الخطوة α_k وهو المقدار الموجب الذي يحقق حل المسألة الجزئية:

$$\min_{\alpha} \phi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$$

تعريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1: شعاع التدرج (gradient vector) [20]:

إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لمتغيراتها، يعرف تدرج الدالة $f(x)$ الذي يرمز له ب $\nabla f(x)$ بأنه الشعاع :

$$\nabla f(x) = g(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

إذ $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ و $i=1,2,3,4,\dots,n$ هي المشتقات الجزئية للدالة $f(x)$.

وهكذا وفقاً للتعريف (1) سنؤول المسألة (1) إلى إيجاد النقاط x^* التي ستحقق المعادلة:

$$\nabla f(x^*) = g(x^*) = 0$$

تعريف 2: (مصفوفة هيسيان) Hessian Matrix [20]:

إذا كانت الدالة $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لمتغيراتها فإننا نعرف مصفوفة هيسيان للدالة

$f(x)$ التي نرمز لها بالرمز $H(x)$ بالشكل:

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

تعريف 3 : النقطة الساكنة (Stationary point) [20]:

يقال إن x^* نقطة ساكنة للدالة $f(x)$ إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق في x^* وتحقق الشرط $g(x^*) = 0$.

تعريف 4 : الحل العددي The Numerical Solution [20]:

إن الحل العددي هو عملية تقريب الحل الأمثل، حيث تفترض معظم الطرائق العددية حلاً ابتدائياً x_0 ثم تعمل وفق تقنية تكرارية متقاربة، يعني إيجاد حل تقريبي x_1 (انطلاقاً من x_0) ثم x_2 (انطلاقاً من x_1)، وهكذا تتشكل متتالية متقاربة $\{x_k\}_{k=0}^n$ يكون فيها الحل العددي في كل تكرار أقرب إلى الحل الأمثل من التكرار السابق له يعني التكرار x_{k+1} يساهم في تخفيض قيمة f أكثر من x_k وعندئذ يمكننا أن نكتب نظرياً:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

ولكن في الخوارزميات العددية يمكن الاكتفاء بالحل العددي x_n وفق دقة مفروضة حيث n هو رقم آخر تكرار حصلنا عليه بطريقة عددية وغالباً الخوارزمية ستقف عند التكرار n الذي يحقق إحدى المعيارين $\|x_n - x_{n-1}\| < \varepsilon$ أو $\|\nabla f(x_n)\| < \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي صغير بقدر كافٍ.

تعريف 5: المصفوفة محددة موجبة [20]:

بفرض A مصفوفة مربعة من الدرجة n و δ شعاع غير صفري من \mathbb{R}^n يقال إن المصفوفة A محددة موجبة إذا تحققت المتراجحة:

$$\delta^T A \delta > 0, \quad \forall \delta \neq 0$$

ويقال إن المصفوفة A محددة شبه موجبة إذا كان

$$\delta^T A \delta \geq 0, \quad \forall \delta \neq 0$$

تعريف 6: ترافق شعاعين بالنسبة لمصفوفة [20]:

يقال عن شعاعين $X, Y \in \mathbb{R}^n$ غير صفريين إنهما مترافقان بالنسبة للمصفوفة المحددة الموجبة A من الدرجة $n \times n$ إذا تحقق: $X^T A Y = 0$.

النتائج والمناقشة:

لحل المسألة (2) سنعتمد على النموذج التربيعي الممثل بالعلاقة (3) وسنعمد أيضاً على النسبة r_k المعرفه على النحو:

$$r_k := \frac{f_k - f(x_k + d_k)}{m_k(x_k) - m_k(x_k + d_k)} \quad (4)$$

حيث يمثل البسط $f_k - f(x_k + d_k)$ التخفيض الفعلي، ويمثل المقام $m_k(x_k) - m_k(x_k + d_k)$ التخفيض المتوقع.

وهنا لأجل $0 < \mu_1 < 1$ نميز حالتين:

- 1- إذا كان $r_k \geq \mu_1$ فإن التكرار ناجح نضع $x_{k+1} = x_k + d_k$.
- 2- إذا كان $r_k < \mu_1$ فإن التكرار غير ناجح نضع $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ، نحسب طول الخطوة α_k هنا بالاعتماد على الإجراء [BT] لكي لايفشل التكرار .
نحسب الوسيط β_k بالاعتماد على العلاقات الآتية:

$$\beta_k^1 = \frac{g_k^T y_{k-1}}{d_{k-1}^T y_{k-1}} \quad (\text{HESTENES \& STIEFEL [16]}) \quad (5)$$

$$\beta_k^2 = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2} \quad (\text{FLETCHER \& REEVES [13]}) \quad (6)$$

$$\beta_k^3 = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T y_{k-1}} \quad (\text{DAI \& YUAN [5]}) \quad (7)$$

$$\beta_k^4 = \beta_k^{HS} - 2\|y_{k-1}\|^2 \frac{d_{k-1}^T}{(d_{k-1}^T y_{k-1})^2} \quad (\text{HAGER \& ZHANG [15]}) \quad (8)$$

حيث : $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$ ، $g_k = J_k^T F_k$ ، J_k مصفوفة جاكوبي .

نحسب متجهة الانحدار d_k كالاتي:

$$d_k = \begin{cases} -g_k & ; k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_k & ; k \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

بحيث أن:

β_{min} ، β_{max} قيمتين اختياريين نستخدمهما لحساب β_k بحيث أن: $0 < \beta_{min} < \beta_{max} < +\infty$.
نحسب β_k^i حيث $i = 1, 2, 3, 4$ من العلاقات (5)-(8).

ومن ثم نختار β_k من العلاقات (5)-(8) التي تحقق أن:

$$\beta_{min} < \beta_k < \beta_{max} \quad (10)$$

d_k هو حل المسألة الجزئية (3) التي تمثل النموذج التربيعي لطريقتنا المقترحة

ويتم حساب طول الخطوة α_k بالاعتماد على الإجراء [BT] فنحصل على التكرار الجديد

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ، علماً أن الإجراء [BT]:

Input: $x_k, d_k, g_k, \sigma \in]0, 1[, \lambda \in [\frac{1}{2}, 1[$

Output: α_k

begin

$$\alpha_k = 1$$

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \quad (\text{نحسب})$$

While $f(x_k + \alpha_k d_k) > f_k + \lambda \alpha_k g_k^T d_k$ do
 $\alpha_k = \sigma \alpha_k$
 $f(x_k + \alpha_k d_k)$ (نحسب)
end
end

نحسب نصف قطر المنطقة الآمنة كالتالي:

لأجل $C_2 > 1, 0 < C_1 < 1, 0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$

$$\Delta_k = \begin{cases} C_1 \Delta_k & ; r_k < \mu_1 \\ \Delta_k & ; \mu_1 \leq r_k < \mu_2 \\ C_2 \Delta_k & ; \mu_2 \leq r_k \end{cases} \quad (11)$$

نلخص الطريقة المقترحة بالخطوات الخوارزمية الآتية:

الخطوة 0: نقطة البدء $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، شرط التوقف $\varepsilon > 0$ ، ندخل القيم C_1, C_2, μ_1, μ_2 بحيث أن:

$$k = 0, 0 < C_1 < 1, 1 < C_2, 0 < \mu_1 < \mu_2 \leq 1,$$

الخطوة 1: نحسب نصف القطر البدائي من العلاقة $\Delta_0 = \|F_0\|$.

الخطوة 2: نحسب d_0 بحل النموذج التربيعي (3) ثم نحسب r_0 من العلاقة (4).

الخطوة 3: إذا كان $r_0 \geq \mu_1$ نحسب تكرار جديد $x_1 = x_0 + d_0$ ثم ننتقل إلى الخطوة (11).

الخطوة 4: إذا كان $r_0 \geq \mu_2$ نوسع المنطقة الآمنة بحساب نصف قطر جديد $\Delta_{k+1} = C_2 \Delta_k$ ثم ننتقل إلى الخطوة (11).

الخطوة 5: إذا كان $r_0 < \mu_1$ نقلص المنطقة الآمنة بحساب نصف قطر جديد $\Delta_{k+1} = C_1 \Delta_k$ ثم نحسب

$$d_0 = -g_0$$

الخطوة 6: نحسب α_0 بحل المسألة الجزئية $\min \phi_{k\alpha}(\alpha) = f(x_0 + \alpha_0 d_0)$ ونعين التكرار الجديد

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 \text{ ثم ننتقل إلى الخطوة (11).}$$

الخطوة 7: نحسب d_k بحل النموذج التربيعي (3) ثم نحسب r_k من العلاقة (4).

الخطوة 8: إذا كان $r_k \geq \mu_1$ نحسب تكرار جديد $x_{k+1} = x_k + d_k$ ثم ننتقل إلى الخطوة (11).

الخطوة 9: إذا كان $r_k \geq \mu_2$ نوسع المنطقة الآمنة بحساب نصف قطر جديد $\Delta_{k+1} = C_2 \Delta_k$ ثم ننتقل إلى الخطوة (11).

الخطوة 10: إذا كان $r_k < \mu_1$ نقلص المنطقة الآمنة بحساب نصف قطر جديد $\Delta_{k+1} = C_1 \Delta_k$ ثم نحسب

$$\beta_k \text{ من العلاقة (10).}$$

نحسب d_k من العلاقة (9) ونحسب α_k بحل المسألة الجزئية $\min \phi_{k\alpha}(\alpha) = f(x_k + \alpha_k d_k)$ بالاعتماد

على الإجراء [BT] ونعين التكرار الجديد $x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0$ ثم نذهب إلى الخطوة (11).

$$\|F_{k+1}\| < \varepsilon \text{ نختبر شرط التوقف}$$

إذا كان محقق ننتقل للخطوة 12

وإلا نضع $k = k + 1$ ثم وننتقل للخطوة (7).

$$\text{الخطوة 12: طباعة الناتج } x^* = x_{k+1}, f(x^*) = f(x_{k+1})$$

تقارب الخوارزمية المقترحة:

لإثبات تقارب الخوارزمية المقترحة سنعمد على الفرضيات الآتية:

(A₁): لنأخذ المجموعة Ω : تمثل مجموعة جميع النقاط الواقعة ضمن المنطقة الآمنة.
والمجموعة $L(X_0)$: تمثل مجموعة الحلول الواقعة ضمن المنطقة الآمنة.
وسنعتبر عن المجموعتين رياضياً كالاتي:

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - X_k\| \leq \Delta_k\}$$

$$L(X_0) \subseteq \Omega ; L(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) \leq f(X_0)\}$$

في أول تكرار X_0 هي نقطة البدء و $L(X_0)$ هي مجموعة الحلول علماً أن قيمة X_0 تتغير عند كل تكرار أي أن X_0 تأخذ القيمة الجديدة المدروسة ونعتبرها قيمة ابتدائية ونهمل القيمة السابقة.

(A₂): مصفوفة جاكوبي $J(X)$ موجبة ومحددة على Ω .

مصفوفة هيسيان $H(X)$ موجبة ومحددة على Ω .

ولنأخذ الثوابت $0 < M_0 \leq 1$, $1 \leq M_1$, $1 \leq M_2$, بحيث يكون:

$$\|H(X)\| \leq M_1, \quad \|J(X)\| \leq M_2 \quad (11)$$

$$M_0 \|F(X)\| \leq \|J(X) \cdot F(X)\| = \|g(X)\| = \|\nabla f(X)\|$$

وذلك بالعودة إلى المراجع [7,9].

(A₃): التخفيض وفق النموذج m_k أقل بكثير من التخفيض الذي يتم الحصول عليه باستخدام نقطة كوشي، لنأخذ الثابت $\xi \in (0,1)$ بحيث أن:

$$m_k(X_k) - m_k(X_k + d_k) \geq \xi \|g_k\| \min \left[\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|H_k\|} \right] \quad (12)$$

$\forall k \in N$ وذلك بالعودة للمرجع [7].

(A₄): لكي يكون الإثبات قوي من أجل الخوارزمية المقترحة يجب أن تكون الخطوة d_k التي نحصل عليها بحل النموذج التربيعي (3) تحقق شرط الانحدار الكافي:

$$g_k^T d_k < -c \|g_k\| < 0 ; \quad \forall k > 0$$

حيث بأخذ $\xi \in (0,1)$, $c = \xi \min \left[\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|H_k\|} \right]$ نجد أن:

$$g_k^T d_k \leq -\xi \|g_k\| \cdot \min \left[\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|H_k\|} \right] \quad (13)$$

من الفرضية (A₄) والعلاقة (9) نجد أن:

$$g_k^T \cdot d_k^{cg} = -g_k^T \cdot g_k + \beta_k^{cg} \cdot g_k^T \cdot d_k$$

$$\leq -\|g_k\|^2 - \beta_k^{cg} \xi \|g_k\| \cdot \min \left[\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|H_k\|} \right]$$

$$= -\|g_k\| \left(\|g_k\| + \beta_{min} \xi \min \left[\Delta_k, \frac{\|g_k\|}{\|H_k\|} \right] \right) \quad (14)$$

لنأخذ المجموعتين:

$$I_1 = \{k \mid r_k \geq \mu_1\}, \quad I_2 = \{k \mid r_k < \mu_1\}$$

حيث أن:

I_1 : تحوي مجموعة التكرارات التي يتم استخدامها في الخوارزمية المقترحة عندما تكون الخطوة ناجحة وهنا نحافظ على نصف قطر المنطقة الآمنة أو نقوم بزيادة نصف قطر المنطقة الآمنة عندما يكون $r_k \geq \mu_2$ ونجد أن:

$$X_{k+1} = X_k + d_k$$

I_2 : تحوي مجموعة التكرارات التي يتم استخدامها في الخوارزمية المقترحة عندما تكون الخطوة غير ناجحة وهنا نستخدم الاجراء [BT] ونقوم بتخفيض نصف قطر المنطقة الآمنة ونجد أن:

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k d_k$$

ملاحظة: (1) يوجد عدد ثابت موجب $L > 0$ بحيث يكون $\|d_k\| \leq L\|g_k\|$ وبالاتتماد على العلاقة (9) نجد أن:

$$\begin{aligned} \|d_k^{cg}\| &\leq \|g_k\| + \beta_k^{cg} \|d_k\| \\ &\leq \|g_k\| + \beta_{max} L \|g_k\| \\ &= (1 + \beta_{max} L) \|g_k\| \\ &= \tilde{k} \|g_k\| \end{aligned}$$

- **مبرهنة مساعدة 1:** لنفترض أن المتتالية $\{X_k\}_{k \geq 0}$ التي تم انشاؤها باستخدام الخوارزمية المقترحة من أجل $k \in I_2$ حيث k عدد كبير بما فيه الكفاية فإن طول الخطوة α_k يكون مرضي إذا حقق العلاقة الآتية:

$$\alpha_k > \frac{2\sigma(1-\gamma)M_0(M_0\|F_k\| + \beta_{min}\xi \min\left[\Delta_k, \frac{M_0\|F_k\|}{M_1}\right])}{M_1^3 \tilde{k}^2 \|F_k\|}; \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \sigma \in]0, 1[$$

- **البرهان:** لنحدد $\alpha = \alpha_k/\sigma$ ، باستخدام الإجراء [BT] نجد أن:

$$\begin{aligned} f(X_k + \alpha d_k^{cg}) &> f_k + \gamma \alpha g_k^T d_k^{cg} \\ f(X_k + \alpha d_k^{cg}) - f_k &> \gamma \alpha g_k^T d_k^{cg} \end{aligned}$$

وباستخدام منشور تايلور على الطرف الأيسر من المتراجحة السابقة للدالة f حول X_k حيث أجل أي $\varepsilon \in [X_k, X_k + \alpha d_k^{cg}]$ نجد أن:

$$\alpha g_k^T d_k^{cg} + \frac{1}{2} \alpha^2 (d_k^{cg})^T H(\varepsilon) d_k^{cg} > \gamma \alpha g_k^T d_k^{cg} \quad (16)$$

بتقسيم العلاقة (16) على α نجد أن:

$$g_k^T d_k^{cg} + \frac{1}{2} \alpha (d_k^{cg})^T H(\varepsilon) d_k^{cg} > \gamma g_k^T d_k^{cg}$$

ومن جهة أخرى وباستخدام الفرضية (A_2) من أجل أي $\varepsilon \in [X_k, X_k + \alpha d_k^{cg}]$ نجد أن:

$$\frac{1}{2} (d_k^{cg})^T H(\varepsilon) d_k^{cg} \leq \frac{M_1}{2} \|d_k^{cg}\|^2 \quad (17)$$

علماً أن $H(\varepsilon)$ مصفوفة هيسيان محددة موجبة.

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} g_k^T d_k^{cg} + \frac{1}{2} M_1 \alpha \|d_k^{cg}\|^2 &> \gamma g_k^T d_k^{cg} \\ \frac{1}{2} M_1 \alpha \|d_k^{cg}\|^2 &> -(1-\gamma) g_k^T d_k^{cg} \end{aligned}$$

وبالاتتماد على الفرضية (A_2) والعلاقة (14) نجد أن:

$$\frac{1}{2} M_1 \frac{\alpha_k}{\sigma} \|d_k^{cg}\|^2 > (1-\gamma) M_0 \|F_k\| \left(M_0 \|F_k\| + \beta_{min} \xi \min\left[\Delta_k, \frac{M_0 \|F_k\|}{M_1}\right] \right)$$

وبالاتتماد على الفرضية (A_2) والملاحظة (1) نجد أن:

$$\|d_k^{cg}\| \leq \tilde{k} \|g_k\| \leq \tilde{k} M_1 \|F_k\|$$

$$\alpha_k > \frac{2\sigma(1-\gamma)M_0\|F_k\| \left(M_0\|F_k\| + \beta_{\min}\xi \min \left[\Delta_k, \frac{M_0\|F_k\|}{M_1} \right] \right)}{M_1(\tilde{k} M_1 \|F_k\|)^2}$$

وبالتالي فإن:

$$\alpha_k > \frac{2\sigma(1-\gamma)M_0 \left(M_0\|F_k\| + \beta_{\min}\xi \min \left[\Delta_k, \frac{M_0\|F_k\|}{M_1} \right] \right)}{M_1^3 \tilde{k}^2 \|F_k\|}$$

وهو المطلوب.

- **مبرهنة مساعدة 2:** بفرض أن $\{X_k\}_{k \geq 0}$ هي المتتالية التي تم انشاؤها بواسطة الخوارزمية المقترحة وبالتالي فإن الحلقة [BT] في الخوارزمية المقترحة تنتهي بعد عدد محدود من الخطوات.
- **البرهان:** سنعمد على طريقة نقض الفرض ولنفرض أنه يوجد $k \in I_2$ يحقق أن:

$$f(x_k + \sigma^i \alpha_k d_k^{cg}) > f_k + \gamma \sigma^i \alpha_k g_k^T d_k^{cg} \quad ; \forall i \in \mathbb{N} \quad (18)$$

$$\frac{f(x_k + \sigma^i \alpha_k d_k^{cg}) - f_k}{\sigma^i \alpha_k} > \gamma g_k^T d_k^{cg} \quad ; \forall i \in \mathbb{N}$$

وباستخدام منشور تايلور على الطرف الأيسر من المتراجحة السابقة للدالة f حول X_k حيث من أجل $\varepsilon \in [X_k, X_k + \alpha d_k^{cg}]$ نجد أن:

$$\frac{\sigma^i \alpha_k g_k^T d_k^{cg} + \frac{1}{2} (\sigma^i)^2 \alpha_k^2 (d_k^{cg})^T H(\varepsilon) d_k^{cg}}{\sigma^i \alpha_k} > \gamma g_k^T d_k^{cg}$$

وبالتالي:

$$g_k^T d_k^{cg} + \frac{1}{2} \sigma^i \alpha_k (d_k^{cg}) > \gamma g_k^T d_k^{cg}$$

وبما أن $0 < \sigma < 1$ وبأخذ نهاية الطرفين للعلاقة السابقة عندما $i \rightarrow +\infty$ نجد أن $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma^i = 0$ وبالتالي فإن:

$$g_k^T d_k^{cg} > \gamma g_k^T d_k^{cg}$$

بما أن $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ فإن $g_k^T d_k^{cg} \geq 0$ وهذا يتناقض مع العلاقة (14) بأن شرط الانحدار محقق وأن $g_k^T d_k^{cg} \leq 0$ وبهذا يتم البرهان.

تم انشاء التقارب الشامل بالاعتماد على الفرضيات $(A_1) - (A_4)$ من أجل الخوارزمية المقترحة وقد تم تأسيس الفرضيات بالاعتماد على المبرهنة التالية:

مبرهنة 3: لنفترض أن الفرضيات $(A_1) - (A_4)$ محققة، عندئذ فإن الخوارزمية المقترحة إما ستتوقف عند نقطة ساكنة للدالة $f(x)$ أو أنها ستولد متتالية غير منتهية $\{X_k\}$ نهايتها تحقق الآتي:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|F_k\| = 0 \quad (19)$$

البرهان: سنعمد أيضاً على طريقة نقض الفرض ولنفترض أن العلاقة (19) خاطئة وبالتالي فإنه يوجد ثابت $\lambda > 0$ ومجموعة جزئية غير محدودة M بحيث أن $M \subseteq \mathbb{N}$ تحقق أنه من أجل كل $k \in M$ فإن:

$$\|F_k\| > \lambda \quad (20)$$

سنقوم ببرهان الحالتين الآتيتين:

- الحالة (1): عندما $k \in I_1$ أي عندما تكون الخطوة ناجحة ونحافظ على نصف القطر وبالتالي $r_k \geq \mu_1$ ومنه فإن

$$f(X_k) - f(X_k + d_k) \geq \mu_1 [m_k(X_k) - m_k(X_k + d_k)]$$

وبالاعتماد على الفرضية (A₂) والعلاقة (12) نجد أن:

$$f(X_k) - f(X_k + d_k) \geq \mu_1 \xi M_0 \|F_k\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{M_0 \|F_k\|}{\mu_1} \right\}$$

لدينا من العلاقة (20) $\|F_k\| > \lambda$ وبالتالي فإن:

$$f(X_k) - f(X_k + d_k) \geq \mu_1 \xi M_0 \lambda \min \left\{ \Delta_k, \frac{M_0 \|F_k\|}{\mu_1} \right\} \quad (21)$$

وبأخذ نهاية الطرفين في المتراجحة (21):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(X_k) - f(X_k + d_k)] \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mu_1 \xi M_0 \lambda \min \left\{ \Delta_k, \frac{M_0 \|F_k\|}{\mu_1} \right\} \right]$$

نجد أن الطرف الأيسر من العلاقة (21) يساوي الصفر لأنه سيتولد لدينا تكرار غير منتهي أو سنصل إلى نقطة ساكنة وفي الحالتين فإن $X_k = X_k + d_k$ وبالتالي:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(X_k) - f(X_k + d_k)] = 0$$

ومن جهة أخرى فإنه يوجد مجموعة جزئية $m \in \mathbb{N}$ وعدد $\delta > 0$ يحققان أن:

$$\Delta_k < \delta, \quad \forall k \in m \quad (22)$$

بتعويض العلاقة (22) في (21) نجد أن:

$$f(X_k) - f(X_k + d_k) \geq \mu_1 \xi M_0 \lambda \cdot \min \left\{ \delta, \frac{M_0 \lambda}{\mu_1} \right\} = \theta_1 > 0$$

وبملاحظة أن المقدار θ_1 في الطرف الأيمن للمتراجحة هو مقدار موجب تماماً فإننا نحصل على تناقض مع كون أن

نهاية الطرف الأيسر في المتراجحة (21) يساوي الصفر عندما $k \rightarrow \infty$ يعني $0 \geq \theta_1 > 0$

وهذا لا يصح إلا في حالة واحدة فقط هي $\lim_{k \rightarrow 0} \|F_k\| = 0$ وبالتالي فإن الفرض الجدلي الممثل بالعلاقة (20) خاطئ والعلاقة (19) صحيحة.

- الحالة (2): عندما $k \in I_2$ أي عندما تكون الخطوة غير ناجحة وبالاعتماد على المبرهنة المساعدة I والفرضيات (A₁), (A₂) نجد أن:

$$f(X_k + \alpha_k d_k^{cg}) \leq f_k + \gamma \alpha_k g_k^T d_k^{cg}$$

وبالتالي:

$$f(X_k + \alpha_k d_k^{cg}) \leq f_k +$$

$$\gamma \left(\frac{2\sigma(1-\gamma)M_0(M_0\|F_k\| + \beta_{min}\xi \min \left[\Delta_k, \frac{M_0\|F_k\|}{M_1} \right])}{M_1^3 \tilde{k}^2 \|F_k\|} \right) \times \left(\xi M_0 \|F_k\| \min \left[\Delta_k, \frac{M_0\|F_k\|}{M_1} \right] \right)$$

وبأسلوب مشابه للحالة (1) إذا لم تكن (19) صحيحة عندئذٍ من العلاقة (20) لدينا $\|F_k\| > \lambda$ وبالتالي فإن:

$$f(X_k + \alpha_k d_k^{cg}) \leq f(X_k) - \frac{2\sigma\gamma(1-\gamma\xi M_0^2)}{M_1^3 \tilde{k}^2}$$

$$\left(M_0\lambda + \beta_{min}\xi \min \left[\Delta_k, \frac{M_0\lambda}{M_1} \right] \right) \left(\min \left[\Delta_k, \frac{M_0\lambda}{M_1} \right] \right)$$

وبأسلوب مشابه لبرهان الحالة (1) نجد أن العلاقة (22) صحيحة وبأخذ النهاية عندما $k \rightarrow \infty$ لطرفي المتراجحة نجد أن:

$$0 \geq \frac{2\sigma\gamma(1-\gamma\xi M_0^2)}{M_1^3 \tilde{k}^2} \left(M_0\lambda + \beta_{min}\xi \min \left[\Delta_k, \frac{M_0\lambda}{M_1} \right] \right) \left(\min \left[\Delta_k, \frac{M_0\lambda}{M_1} \right] \right) = \theta_2 > 0$$

نحصل على تناقض وهذا يعني أن العلاقة (20) خاطئة، وبالتالي العلاقة (19) وهو المطلوب.
نتائج عددية:

نختبر فعالية وتقارب الطريقة المقترحة بتطبيق الخوارزمية لحل بعض مسائل الاختبار القياسية ومقارنة النتائج التي نتوصل إليها مع بعض الطرائق الأخرى في المسألة المشتركة $F(x) = 0$ حيث

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$$

المسائل التي تم حلها والمقارنة مع الحلول السابقة بالطريقة المقترحة:

المسألة (1) Rosenbrock [25]:

تم حل المسألة لأجل: $(n = 2, m = 2)$

$$F_1(x) = 10(x_2 - x_1^2)$$

$$F_2(x) = 1 - x_1$$

$$F(x^*) = 0, \quad x^*(1,1) \quad \text{علماً أن الحل الدقيق:}$$

المسألة (2) Helical valley [12]:

تم حل المسألة لأجل: $(n = 3, m = 3)$

$$F_1(x) = 10[x_3 - 10\theta(x_1, x_2)]$$

$$F_2(x) = 10[(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - 1]$$

$$F_3(x) = x_3$$

حيث:

$$\theta(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right), & \text{if } x_1 > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right) + 0.5, & \text{if } x_1 < 0 \end{cases}$$

$$F(x^*) = 0, \quad x^*(1,0,0) \quad \text{علماً أن الحل الدقيق:}$$

المسألة (3) Powell singular [22]:

تم حل المسألة لأجل: $(n = 4, m = 4)$

$$F_1(x) = x_1 + 10x_2$$

$$F_2(x) = 5^{\frac{1}{2}}(x_3 - x_4)$$

$$F_3(x) = (x_2 - 2x_3)^2$$

$$F_4(x) = 10^{\frac{1}{2}}(x_1 - x_4)^2$$

$$F(x^*) = 0, \quad x^*(0,0,0,0)$$

علماً أن الحل الدقيق:

المسألة (4) Wood [4] :

تم حل المسألة لأجل: $(n = 4, m = 6)$

$$F_1(x) = 10(x_2 - x_1^2)$$

$$F_2(x) = 1 - x_1$$

$$F_3(x) = (90)^{1/2} (x_4 - x_3^2)$$

$$F_4(x) = 1 - x_3$$

$$F_5(x) = (10)^{\frac{1}{2}} (x_2 + x_4 - 2)$$

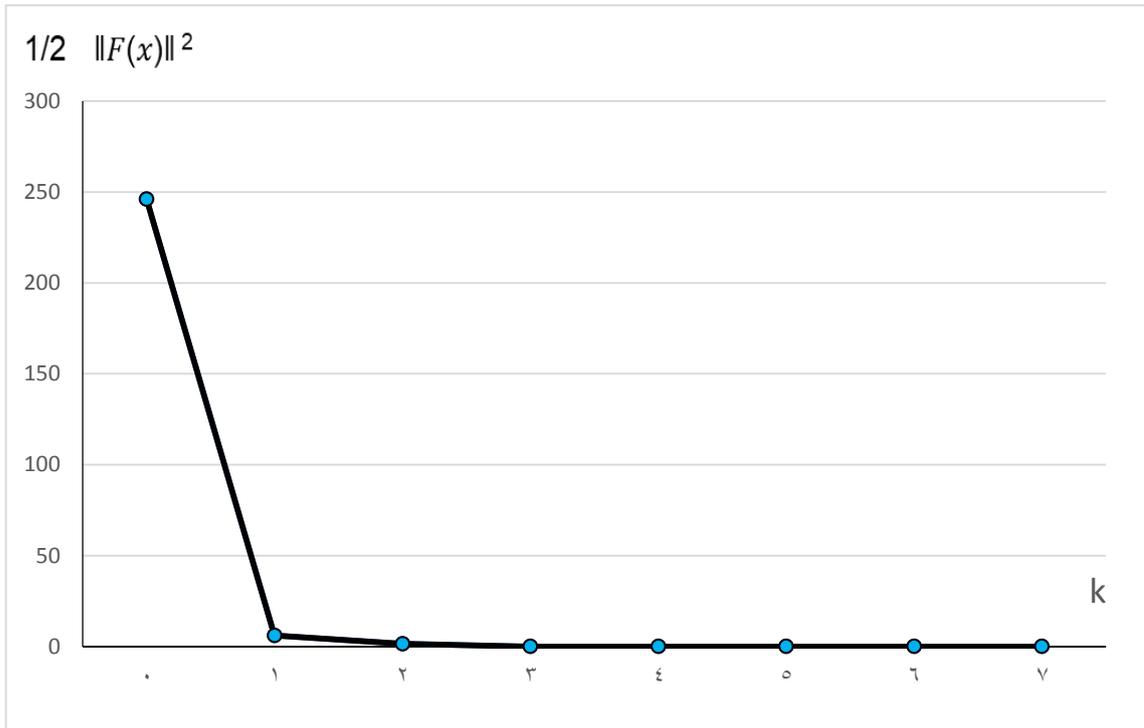
$$F_6(x) = (10)^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x_4)$$

$$F(x^*) = 0, \quad x^*(1,1,1,1)$$

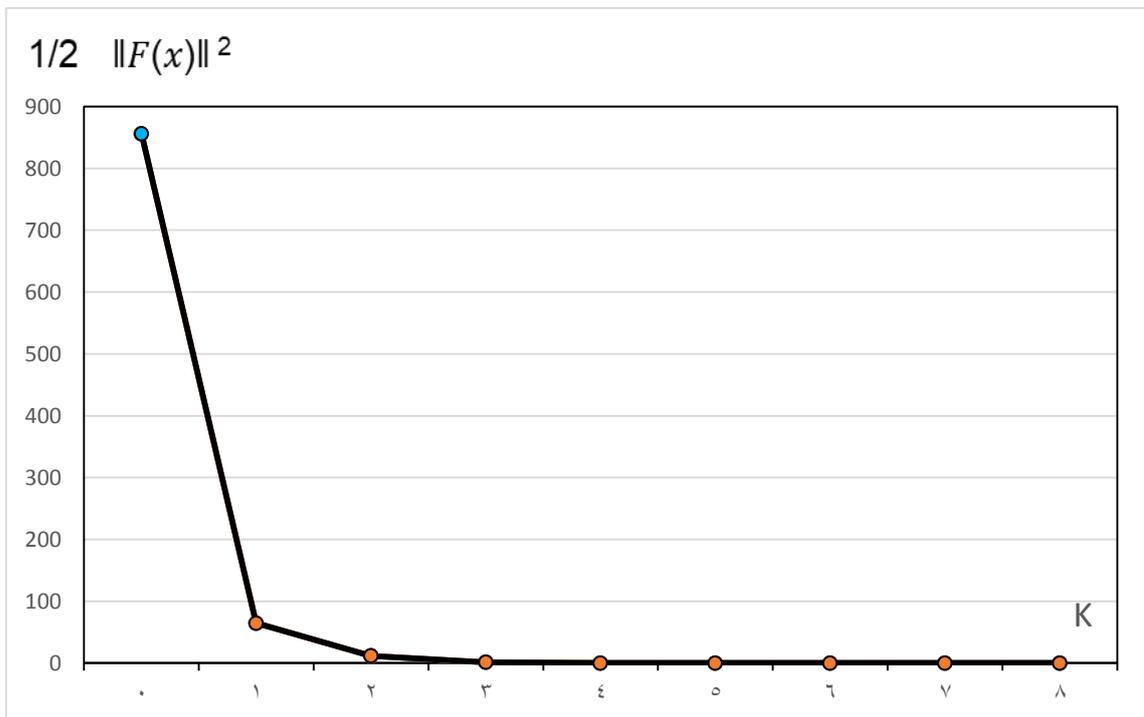
علماً أن الحل الدقيق:

نضع في الجدول (1) النتائج العددية للطريقة المقترحة ونبين فيها الخطأ في الحل العددي بعد عدة تكرارات قليلة وتحت المقارنة مع نتائج تقارب طريقة المنطقة الآمنة في [27] وطريقة المنطقة الآمنة المعدلة في [27]:

المسألة	m	طريقة المنطقة الآمنة		طريقة المنطقة الآمنة المعدلة		الطريقة المقترحة	
		Itrs	$\frac{1}{2} \ f(x^*) \ ^2$	Itrs	$\frac{1}{2} \ f(x^*) \ ^2$	Itrs	$\frac{1}{2} \ f(x^*) \ ^2$
المسألة (1)	2	23	2.2×10^{-18}	15	4.4×10^{-17}	5	4.32182×10^{-25}
المسألة (2)	3	9	4.4×10^{-15}	10	6.5×10^{-15}	7	1.70237×10^{-34}
المسألة (3)	4	11	6.5×10^{-8}	11	3.2×10^{-8}	12	2.26254×10^{-8}
المسألة (4)	6	45	4.7×10^{-13}	31	7.4×10^{-10}	8	8.13998×10^{-24}



الشكل (1) مخطط سرعة تقارب الطريقة المقترحة مطبقة للمسألة (2)



الشكل (2) مخطط سرعة تقارب الطريقة المقترحة مطبقة للمسألة (4)

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا بدمج طريقة المنطقة الآمنة مع طرائق التدرج المترافقة لحل جمل المعادلات غير الخطية وذلك لتجنب الكلفة الحسابية العالية لحل المشكلة الفرعية للمنطقة الآمنة. إن استخدام نصف قطر تكيفي وطرائق التدرج المترافقة ساهم في تحسين التقارب وتقليل الكلفة الحسابية. تم إثبات التقارب واختبار الطريقة المقترحة بحل أربعة مسائل اختبار قياسية وأشارت النتائج العددية والمجدولة والمقارنات العددية مع الطرائق الأخرى إلى فعالية وكفاءة الطريقة المقدمة. لهذا نوصي بدمج طرائق التدرج المترافقة مع طريقة المنطقة الآمنة، ونوصي بتطوير طرائق المنطقة الآمنة لحل مسائل الأمثليات المقيدة وغير المقيدة.

References:

- 1-Ahookhosh M, Amini K, Peyghami M R .A nonmonotone trust-region line search method for largescale unconstrained optimization. Appl Math Model.2012;36:478–487.
- 2-Amini K,Shiker M K, Kimiaei M.Aline search trust-region algorithm with nonmonotone adaptive radius for a system of nonlinear equations.4 OR- Journal of operation.2016;14:133-152.
- 3- Broyden C G.The convergence of an algorithm for solving sparse nonlinear systems,Math. Comput.1971;25(114):285-294.
- 4-Colville A R.A comparative study of nonlinear programming codes.IBM New York Scientific Center.1968;Rep:320-2949.
- 5-Dai Y H,Yuan Y.A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. SIAM J. Optim.1999;10:177–182.
- 6-Dan H,Yamashita N, Fukushima M.Convergence properties of the inexact Levenberg–Marquardt method under local error bound conditions.Optim, Methods Softw.2002;17:605–626.
- 7-Esmaeili H,Kimiaei M.A new adaptive trust-region method for system of nonlinear equations. Appl. Math. Model.2014;38(11–12):3003–3015.
- 8-Fan J Y. An improved trust region algorithm for nonlinear equations.Comput .Optim. Appl.2011;48(1):59–70.
- 9-Fan J Y.Convergence rate of the trust region method for nonlinear equations under local error bound condition.Comput.Optim. Appl.2005;34:215–227.
- 10-Fan J Y, Pan J Y.A modified trust region algorithm for nonlinear equations with new updating rule of trust region radius.Int.J.Comput.Math. 2010;87(14):3186–3195.
- 11- Fischer A,Shukla P K,Wang M.On the inexactness level of robust Levenberg–Marquardt methods.Optimization.2010;59(2):273–287.
- 12- Fletcher R,Powell M J D .A rapidly convergent descent method for minimization.Comput. J.1963;6:163-168.
- 13-Fletcher R,Reeves C.Function minimization by conjugate gradients. Comput. J.1964;7:149–154.
- 14-Gertz E M.Combination trust-region line-search methods for unconstrained optimization .University of California San Diego, San Diego.1999.
- 15-Hager W W, Zhang H.A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search. SIAM J. Optim.2005;16:170–192.
- 16-Hestenes M R,Stiefel E L.Methods of conjugate gradients for solving linear systems .J .Res .Nat .Bur. Stand.1952;49:409–436.
- 17-Kimiaei M, Rahpeymaii F.A new nonmonotone line-search trust-region approach for nonlinear systems. TOP.2019.

- 18- Martinez J M.A family of quasi-Newton methods for nonlinear equations with direct secant updates of matrix factorizations.SIAM J.Numer.Anal.1990;27(4):1034-1049.
- 19- Nesterov Y U.Modified Gauss-Newton scheme with Case guarantees for global performance. optim. Methods Softw.2007;22(3):469-483.
- Nocedal J,Wright S J.Numerical Optimization. Springer,New York.2006. 20-
- 21-Nocedal J ,Yuan Y X.(1998)Combining Trust-region and line search techniques .Optimization Technology Center mar OTC.1998;98(04).
- 22-Powell M J D.An iterative method for finding stationary values of a function of several variables. Comput. J. 1962;5:147-15.
- 23-Rahpeymaii F, Kimiaei M. A Barzilai Borwein Adaptive Trust-Region Method for Solving Systems of Nonlinear Equation. Int. J. Res. Ind. Eng.2017;6(4):339–349.
- 24- Rezaeiparsa Z, Ashrafi A. A new adaptive Levenberg–Marquardt parameter with a nonmonotone and trust region strategies for the system of nonlinear equations. Mathematical science.2023;
- 25-Rosenbrock H H.An automatic method for finding the greatest or least value of a function. Comput. J. 1960;3:175-184.
- 26- Shi Z J,Guo J H.A new trust-region method with adaptive radius, Comput. Optim. Appl.2008;213:509–520.
- 27- Zhang J,Wang Y. A new trust region method for nonlinear equations, Math Meth Oper Res.2003.