Inclusion Properties of the Generalized Homogeneous Herz-Morrey Spaces

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Hassan Baddour**
Ali Jasser***

(Received 2 / 1 / 2024. Accepted 28 / 2 /2024)

□ ABSTRACT □

In this paper, we study a problem at functional analysis, it is the inclusion of functional spaces, in the beginning we defined the generalized homogeneous Herz - Morrey space $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$, which is a generalization of the homogeneous Herz- Morrey space, then we studied some of its basic properties, where we proved that it is linear, normed and complete space, then we studied its inclusion properties for different cases of the parameters (ϕ, ψ, p, q) , then we studied the inclusion between the generalized homogeneous Herz- Morrey space and the weak generalized homogeneous Herz – Morrey space, finally we studied the inclusion between the weak generalized homogeneous Herz – Morrey space.

Keywords: inclusion, the generalized homogeneous Herz – Morrey space, the weak generalized homogeneous Herz – Morrey space.

*Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.
** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.
***postgraduate student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria. alijasser@gmail.com

خواص التّداخل بين فضاءات هير– موري المتجانسة المعممة

د. محمد علي *

د. حسن بدور **

علي جاسر***

(تاريخ الإيداع 2 / 1 / 2024. قُبِل للنشر في 28 / 2 /2024)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل التّحليل التّابعي وهي مسألة تداخل الفضاءات التّابعية، في البداية قمنا بتعريف فضاء هير– موري المتجانس المعمّم $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ والذّي يُعتبر تعميماً لفضاء هير– موري المتجانس ومن ثمّ درسنا بعض خواصّه الأساسية حيث أثبتنا أنّه خطّي و منظّم وتام، بعدها درسنا تداخل هذا الفضاء من أجل حالات مختلفة للوسطاء (ϕ, ψ, p, q) ، بعدها قمنا بدراسة علاقات التّداخل بين فضاءات هير– موري المتجانسة المعمّمة وفضاءات هير– موري الضَعيفة المتجانسة المعمّمة، وأخيراً درسنا علاقات التّداخل بين فضاءات هير– موري الضَعيفة المتجانسة المعمّمة.

الكلمات المفتاحية: التّداخل، فضاء هير– موري المتجانس المعمّم، فضاء هير– موري الضَعيف المتجانس المعمّم.

* أستاذ – قسم الرياضَيات – كليَة العلوم – جامعة تشرين – اللّاذقية – سورية.

** أستاذ – قسم الرياضيَات– كليَة العلوم – جامعة تشرين– اللّاذقية – سورية.

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضَيات – كليَة العلوم– جامعة تشرين– اللّاذقية – سورية.alijasser@gmail.com

مقدمــة:

في بدايات القرن العشرين، ظهر فرع تحليلي جديد في الرّياضيات النّظرية وهو ما يسمَى بالتّحليل التّابعي، لقد توّضعت المفاهيم والطرق الاساسية للتّحليل التّابعي تدريجياً في جوف الفروع الأكثر قدماً في التّحليل: في حساب التّحولات، في نظرية المعادلات التّفاضليّة، في نظرية التّمثيل وتقريب التّوابع، في الطّرائق العددية للتّحليل وبشكل خاص في نظرية المعادلات التّكاملية.

إنّ جوهر التّحليل التّابعي ينحصر في الانتقال من مجموعة المفاهيم والطّرق الابتدائية في التّحليل الحقيقي إلى مواضيع أكثر شموليّة وذات طبيعة أكثر تعقيداً، إضافةً إلى استخدام أوسع للطرائق الهندسيّة والجبريّة، وباختصار لقد قاد تعميم المفاهيم الأساسيّة في التّحليل الحقيقي إلى نظريّة موّحدة وأكثر شموليّة تُعرف باسم التّحليل التّابعي، والّذي يُقسم بحسب رأي بعض الباحثين إلى:

- نظريّة الفضاءات
- نظريّة المؤثرات
- نظريّة التقريب

نشير إلى أنّ موضوع دراستنا يقع في البند الأول وهو نظرية الفضاءات والّتي تنقسم بدورها إلى موضوعات عديدة، أحد هذه الموضوعات هو تداخل الفضاءات التّابعيّة.

وتتلّخص نتائج هذهِ النظريّة بالإجابة على السؤال التالي: إذا كان لدينا فضاء توابع ما معرّف من خلال وسيط، ما العلاقة بين الفضاءات التّابعيّة الّتي تنشأ عند إعطاء قيم مختلفة لهذا الوسيط، ومن ثمّ تطورت هذهِ النظرية بفضل إسهامات العديد من الباحثين لتدرس مسائل التّداخل في فضاءات مختلفة البنية والتّعريف.

يُعد فضاء التّوابع المدروس المفهوم الرئيسي في نظريّة الفضاءات، لذلك فإن اهتمامنا سوف ينصب على دراسة نظريّة التّداخل المتعلّقة بفضاءات هير– موري المتجانسة المعمّمة.

مثل هذه الدّراسة تمت على بعض الفضاءات التّابعية الشّهيرة، مثل فضاءات هولدر [1]، فضاءات ليبيغ [2]، فضاءات أوليتش [3][4]، فضاءات لورنتز[5][6]، فضاءات هير– موري المتغيّرة [7][8]، وفضاءات α – مودوليشن وتريبل ليزوركين [9].

قُدّم فضاء موري أول مره عام 1938 من قبل C. B. Morrey [10]، أما فضاء هير قُدّم أول مرة عام 1968 من قبل C. S. Herz [11]، أما عن فضاء هير – موري والّذي يُعتبر تعميماً لفضائي هير وموري فقد قُدّم أول مرة عام 2005 من قبل LU وXU [12]، وفي هذا البحث قمنا بتقديم فضاء هير– موري المعمّم أضافةً إلى دراسة بعض خواصّه الأساسية.

أهميَة البحث وأهدافـه:

تَكمن أهميَة البحث من كونه يعنى بدراسة علاقة الفضاءات التَابعية بين بعضها البعض، ويتجلّى الهدف الرّئيس من هذا البحث بدراسة وتحديد العلاقة بين فضاءات هير– موري المتجانسة المعمّمة.

طرائق البحث وموادّه:

يقع ضمن اختصاص الرّياضيَات النَّظرية وبشكل خاص ضمن التَحليل التَابعي ونظريّة الفضاءات، لذلك فإن الطّريقة المتّبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيَات نظريّة الفضاءات وبعض النَظريات الأساسية في التَّحليل التَّابعي.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف (1)[13] :

فضاء ليبيغ (Lebesgue space):

يُعرّف فضاء ليبيغ $L^p = L^p(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n, 1 \le p < \infty)$ بأنّه أسرة كل التّوابع f القابلة للقياس والّتي تحقق الشرط التالي:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

وكما هو معلوم إنّ فضاء ليبيغ يشكّل فضاء باناخ إذا عُرّف عليه النّظيم التالي:

$$\| f(x) \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعريف (2)[14] :

فضاء هير- موري المتجانس (The homogeneous Herz-Morrey space):

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و$0 < p \le \infty$ و $0 < q < \infty$ و $0 \le \lambda < \infty$ ، يُعرّف فضاء هير- موري المتجانس $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ $= \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ بأنّه أسرة كل التّوابع f القابلة للمكاملة محلياً من الدرجة q على $\{\mathbb{R}^n/0\}$ والّتي تحقق:

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} \| f\chi_k \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{P}} < \infty$$

حيث: $B_K = B(0, 2^K) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\}$ و $A_K = B_K / B_{K-1}$ و $\chi_K = \chi_{A_K}$ و $K \in \mathbb{Z}$.

تعريف (3)[14] :

يُعرّف فضاء هير- موري الضَعيف المتجانس (The weak homogeneous Herz-Morrey space):

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و$0 < p \le \infty$ و $0 < q < \infty$ و $0 \le \lambda < \infty$ ، يُعرّف فضاء هير- موري الضَعيف المتجانس $\mathcal{M}w\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda} = \mathcal{M}w\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ بأنّه أسرة كل التّوابع f القابلة للمكاملة محلياً من الدرجة q على $\{\mathbb{R}^n/0\}$ والتي تحقق:

$$\| f \|_{\mathcal{M}w\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{L} 2^{K\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{P}} < \infty$$

حيث: $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_K : |f(x)| > \gamma\}|$

تعريف (4)[15] :

متراجحة هولدر (Holder's inequality):

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $1 < p, q < \infty$ بحيث أن : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ولتكن $f \in L^p(\Omega)$ و $g \in L^q(\Omega)$

عندئذٍ تتحقق المتراجحة الأتية:

$$\int_{\Omega} |fg|\, dx \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

تعريف (5)[15] :

متراجحة منكوفيسكي (Minkowski's inequality):

ليكن $1 \leq p \leq \infty$ و $f, g \in L^p(\Omega)$ عندئذٍ فإنّ: $f + g \in L^p(\Omega)$ ويكون:

$$\| f + g \|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{L^p(\Omega)}$$

مبرهنة مساعدة[16]:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ بحيث $\mu(\Omega) < \infty$ و $1 \leq p < q < \infty$ عندئذٍ يكون:

$\| f \|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\mu(\Omega)\right)^{\frac{q-p}{pq}} \| f \|_{L^q(\Omega)}$ ويتحقق التداخل: $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

وفي هذا البحث قمنا بتعريف فضاء هير– موري المتجانس المعمّم ودرسنا بعض خواصه إضافةً إلى تداخلاته.

تعريف (6):

فضاء –هير موري المتجانس المعمّم (the generalized homogeneous Herz – Morrey space):

ليكن $p, q \in (1, \infty)$ و $\phi, \psi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ توابع موجبة على $\mathbb{R}^+$ حيث ϕ متناقص تقريباً على $\mathbb{R}^+$ و ψ متزايد تقريباً على $\mathbb{R}^+$ و $\Omega = B(0, 2^k)/B(0, 2^{k-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ، عندئذٍ نعرّف فضاء هير– موري المتجانس المعمّم $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi} = \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ بالصّيغة:

$$\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = \left\{ f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{q}(\Omega/\{0\} : \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} < \infty) \right\}$$

حيث:

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} = \sup_{t > 0} \phi(t) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f \|_{L^q(\Omega)}^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

- ❖ من أجل $\phi(t) = 1$ عندئذٍ فإنّ: $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = \dot{k}_{\psi}^{p,q}(\Omega)$ أي أنّ فضاء هير المتجانس المعمّم [17]هو حالة خاصة من فضاء هير– موري المتجانس المعمّم.
- ❖ من أجل $\phi(t) = 1$ و $\psi(t) = 1$ و $p = q$ عندئذٍ فإنّ: $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = L^q(\Omega)$ أي أنّ فضاء ليبيغ الكلاسيكي هو حالة خاصة من فضاء هير– موري المتجانس المعمّم.
- ❖ من أجل $\phi(t) = 2^{-t\lambda}$ حيث $0 \leq \lambda < \infty$ و $\psi(t) = t^{\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ عندئذٍ فإنّ: $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\Omega)$ أي أنّ فضاء هير– موري المتجانس هو حالة خاصّة من فضاء هير– موري المتجانس المعمّم.

تعريف (7):

فضاء –هير موري الضّعيف المتجانس المعمّم

(the weak generalized homogeneous Herz – Morrey space):

ليكن $p,q \in (1,\infty)$ و $\phi,\psi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ توابع موجبة على $\mathbb{R}^+$ حيث ϕ متناقص تقريباً على $\mathbb{R}^+$ و ψ متزايد تقريباً على $\mathbb{R}^+$ و $\Omega = B(0,2^k)/B(0,2^{k-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ، عندئذٍ نعرّف فضاء هير− موري الضَعيف المتجانس المعمّم $w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi} = w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ بالصّيغة:

$$w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = \left\{ f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}^{q}(\Omega/\{0\} : \| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} < \infty) \right\}$$

حيث:

$$\| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} = \underset{\gamma > 0}{sup}\ \gamma\ \underset{t > 0}{sup}\ \phi(t) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

و $m_k(\gamma, f) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > \gamma\}|$.

- ❖ من أجل $\phi(t) = 1$ عندئذٍ فإنّ: $w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = w\dot{k}_{\psi}^{p,q}(\Omega)$ أي أنّ فضاء هير الضَعيف المتجانس هو حالة خاصة من فضاء هير− موري الضَعيف المتجانس المعمّم.
- ❖ من أجل $\phi(t) = 1$ و $\psi(t) = 1$ و $p = q$ عندئذٍ فإنّ: $w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = wL^q(\Omega)$ أي أنّ فضاء ليبيغ الضَعيف الكلاسيكي هو حالة خاصة من فضاء هير− موري الضَعيف المتجانس المعمّم.
- ❖ من أجل $\phi(t) = 2^{-t\lambda}$ حيث $0 \leq \lambda < \infty$ و $\psi(t) = t^{\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ عندئذٍ فإنّ: $w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) = w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\Omega)$ أي أنّ فضاء هير− موري الضّعيف المتجانس هو حالة خاصّة من فضاء هير− موري الضّعيف المتجانس المعمّم.

النتائج والمناقشة:

سندرس فيما يلي بعض خواص الفضاء $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$:

مبرهنة (1):

إذا عرّفنا على الأسرة $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ العمليتين التاليتين:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ , \forall\ f,g \in\ \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega).$

2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)\ , \forall\ f \in\ \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)\ \&\ \lambda \in \mathbb{R}\ .$

عندئذٍ فإنّ الأسرة $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ مع العمليتين السابقتين تعرّف فضاءً خطياً فوق الحقل $\mathbb{R}$.

البرهان:

يكفي أن نبرهن تحقّق الشّرط:

$$\alpha f + \beta g \in\ \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) \forall f,g \in\ \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)\ \&\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

لدينا:

$$\| \alpha f + \beta g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} = \underset{t > 0}{sup}\ \phi(t) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| \alpha f + \beta g \|_{L^q(\Omega)}^{p} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \underset{t > 0}{sup}\ \phi(t) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \right]^{\frac{1}{p}} \| \alpha f + \beta g \|_{L^q(\Omega)}$$

وبتطبيق متراجحة منكوفيسكي (Minkowski's inequality) نجد:

$$\| \alpha f+\beta g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} \leq \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\| \alpha f \|_{L^q(\Omega)}+\| \beta g \|_{L^q(\Omega)}\right]$$

$$\leq \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}}\| \alpha f \|_{L^q(\Omega)}+\sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}}\| \beta g \|_{L^q(\Omega)}$$

$$\leq |\alpha| \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \| f \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}+|\beta| \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \| g \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq |\alpha| \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}+|\beta| \| g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}<\infty \Rightarrow \alpha f+\beta g\in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$$

وعليه الفضاء $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ يشكل فضاءً خطياً فوق الحقل $\mathbb{R}$.

مبرهنة (2):

إنّ التّابع $\| . \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} : \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ يعرّف نظيماً على الفضاء الخطي $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}$.

البرهان:

1) واضح أنّ: $0 \leq \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}$ لكل $f\in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$.

2) $f=0 \Leftrightarrow \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \| f \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}=0$.

3) نبرهن فيما يلي انّ: $\| \lambda f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}=|\lambda| \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}$ لكل $f\in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ و $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\| \lambda f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}=\sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\psi(2^k)\right)^p \| \lambda f \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\psi(2^k)\right)^p|\lambda|^p \| f \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=|\lambda| \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \| f \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}=|\lambda| \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}$$

4) لنبرهن الآن متراجحة المثلث، أي لنرهن أنّ:

$$\| f+g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} \leq \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}+\| g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}$$

$$\| f+g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}=\sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \| f+g \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}}\| f+g \|_{L^q(\Omega)}$$

وبتطبيق متراجحة منكوفيسكي (Minkowski's inequality) نجد:

$$\| f+g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} \leq \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\| f \|_{L^q(\Omega)} + \| g \|_{L^q(\Omega)}\right]$$

$$\leq \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}} \| f \|_{L^q(\Omega)} + \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p\right]^{\frac{1}{p}} \| g \|_{L^q(\Omega)}$$

$$\leq \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| g \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} + \| g \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}$$

وعليه $\| . \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}}$ يعرّف نظيماً على الفضاء الخطّي $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$.

مبرهنة (3):

إنّ الفضاء الخطّي المنظّم $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ فضاء باناخ.

البرهان:

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية لكوشي في الفضاء $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ ومن العلاقة:

$$\| f \|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{1}{\phi(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))} \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} \quad \forall f \in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) \quad [\![1]\!]$$

بالتالي فإنّ المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية لكوشي في الفضاء $L^q(\Omega)$ ، لكن التمام في الفضاء $L^q(\Omega)$ يقتضي وجود $f \in L^q(\Omega)$ بحيث: $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{L^q(\Omega)} = 0$ بالتّالي: يكفي أن نبرهن أنّ: $f \in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ و $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)} = 0$ لدينا:

$$\phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f_n - f \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} + \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f_n \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f_n - f \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} + \| f_n \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)} \qquad [\![2]\!]$$

لكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية لكوشي في الفضاء $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ بالتالي هي محدودة وعليه يوجد ثابت $0 < c$: المتتالية

$$\| f_n \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)} \leq c \ for \ all \ n \in \mathbb{N}$$

إنّ هذا مع تقارب $f_n \longrightarrow f$ في الفضاء $L^q(\Omega)$ يؤدي إلى أنّ:

$$\phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| f \|^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} < \infty \Rightarrow \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}} < c \Rightarrow f \in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$$

كذلك لدينا:

$$\phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \parallel f_n - f \parallel^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \parallel f - f_n \parallel^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} + \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \parallel f_n - f_m \parallel^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \parallel f_n - f_m \parallel_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi}_{p,q}(\Omega)} + \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \parallel f_n - f_m \parallel^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} \qquad [\![3]\!]$$

من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث: $\parallel f_n - f_m \parallel_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi}_{p,q}(\Omega)}$ وذلك لكل $m,n > n_0$ من هذا ومن المتراجحة ⟦3⟧ نجد أن:

$$\phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\psi(2^k)\right)^p \parallel f_n - f \parallel^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \varepsilon + \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi(2^k))^p \parallel f - f_m \parallel^p_{L^q(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall\ m,n > n_0$$

وبجعل $m \longrightarrow \infty$ وباستخدام العلاقة ⟦1⟧ وبأخذ sup للطرفين من أجل كل $t > 0$ نجد أنّ:

$$\parallel f - f_n \parallel_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi}_{p,q}} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0 \Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi}_{p,q}(\Omega)$$

ومنه الفضاء $\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi}_{p,q}(\Omega)$ فضاء تام وهو خطّي ومنظّم بالتالي هو فضاء باناخ.

سندرس فيما يلي بعض علاقات التّداخل بين الفضاءات $\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi}_{p,q}(\Omega)$:

مبرهنة (4):

من أجل $1 < q_1 \leq q_2 < \infty$ و $\psi_1 \preccurlyeq \psi_2$ (أي يوجد ثابت $c > 0$ بحيث $\psi_1(x) \leq c\,\psi_2(x)$) عندئذٍ فإنّ التّداخل التّالي محقق:

$$\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega)$$

البرهان:

لتكن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}(\Omega)$ ولنبرهن أنّ: $\parallel f \parallel_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}} \leq k \parallel f \parallel_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}}$ حيث $0 < k$.

$$\parallel f \parallel_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}} = \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi_1(2^k))^p \parallel f \parallel^p_{L^{q_1}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} c^p(\psi_2(2^k))^p \parallel f \parallel^p_{L^{q_1}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq c \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p \parallel f \parallel^p_{L^{q_1}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq c \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p \left(\left(\mu(\Omega)\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2\,q_1}} \parallel f \parallel_{L^{q_2}(\Omega)}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c\left(\mu(\Omega)\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2\, q_1}} \sup_{t>0} \phi(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p \ \| f \|^p_{L^{q_2}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} \leq k\ \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}} < \infty$$

حيث: $k = c\left(\mu(\Omega)\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2\, q_1}}$ بالتالي $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتّابع f نجد أنّ:

$$\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega)$$

مبرهنة (5):

من أجل $1 < p_1 \leq p_2 < 2p_1 < \infty$ و $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ (أي يوجد ثابت $c > 0$ بحيث $\phi_1(x) \leq c\, \phi_2(x)$)عندئذٍ

فإنّ التّداخل التّالي محقق: $\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)$

البرهان:

لتكن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega)$ ولنبرهن أنّ: $\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}} \leq c\ \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}}$.

$$\| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}} = \sup_{t>0} \phi_1(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_1} \| f \|^{p_1}_{L^{q_1}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq c \sup_{t>0} \phi_2(t)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_1} \| f \|^{p_1}_{L^{q_1}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

وبتطبيق متراجحة هولدر (Hölder's inequality):

$$\leq c \sup_{t>0} \phi_2(t)\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} ((\psi_1(2^k))^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\| f \|^{p_1}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{p_2}{p_2-p_1}}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq c \sup_{t>0} \phi_2(t)\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\| f \|^{p_2}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{p_1}{p_2-p_1}}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq c \sup_{t>0} \phi_2(t)\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_1}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\| f \|^{p_2}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{p_1}{p_2-p_1}}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq c \sup_{t>0} \phi_2(t)\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\| f \|^{p_2}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^{\frac{p_1}{p_2-p_1}\ \frac{p_2-p_1}{p_1}}\right)\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq c \sup_{t>0} \phi_2(t)\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2} \| f \|^{p_2}_{L^{q_1}(\Omega)}\right)\right]^{\frac{1}{p_2}} \leq c\ \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}} < \infty$$

بالتالي $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتّابع f نجد أنّ:

$$\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)$$

مبرهنة (6):

من أجل $p, q \in (1,\infty)$ و $\phi, \psi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ توابع موجبة على $\mathbb{R}^+$ حيث ϕ متناقص تقريباً على $\mathbb{R}^+$ و ψ متزايد تقريباً على $\mathbb{R}^+$ عندئذٍ فإنّ التّداخل التّالي محقق: $\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) \subseteq w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$

البرهان:

لتكن $f \in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ ولنبرهن أنّ: $\| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)} \leq \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)}$

$$\| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \| \gamma\chi_{\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>\gamma\}} \|_{L^q(\Omega)}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^p \left(\int_\Omega |f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \leq \| f \|_{\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)} < \infty$$

بالتالي $f \in \mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتابع f نجد أنَ:

$$\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega) \subseteq w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q}^{\phi,\psi}(\Omega)$$

مبرهنة (7):

من أجل $1 < q_1 \leq q_2 < \infty$ و $\psi_1 \preccurlyeq \psi_2$ (أي يوجد ثابت $c > 0$ بحيث $\psi_1(x) \leq c\,\psi_2(x)$)عندئذٍ فإنّ التّداخل التّالي محقق: $w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q_2}^{\phi,\psi_2}(\Omega) \subseteq w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q_1}^{\phi,\psi_1}(\Omega)$

البرهان:

لتكن $f \in w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q_2}^{\phi,\psi_2}(\Omega)$ ولنبرهن أنّ: $\| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q_1}^{\phi,\psi_1}} \leq k \, \| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q_2}^{\phi,\psi_2}}$ حيث $0 < k$.

$$\| f \|_{w\mathcal{M}\dot{k}_{p,q_1}^{\phi,\psi_1}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^p m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q_1}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} c^p \, (\psi_2(2^k))^p m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q_1}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q_1}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p \left(\| \gamma\chi_{\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>\gamma\}} \|_{L^{q_1}(\Omega)}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p \left((\mu(\Omega))^{\frac{q_2 - q_1}{q_2\, q_1}} \| \gamma\chi_{\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>\gamma\}} \|_{L^{q_2}(\Omega)}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k \sup_{\gamma>0} \sup_{t>0} \phi(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_2(2^k))^p \parallel \gamma\chi_{\{x\in\Omega : |f(x)|>\gamma\}} \parallel^p_{L^{q_2}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

حيث: $k = c\left(\mu(\Omega)\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2 q_1}}$ بالتالي $f \in w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتّابع f نجد أنّ:

$$w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}(\Omega) \subseteq w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega)$$

مبرهنة (8):

من أجل $1 < p_1 \leq p_2 < 2p_1 < \infty$ و $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ (أي يوجد ثابت $c > 0$ بحيث $\phi_1(x) \leq c\,\phi_2(x)$)عندئذٍ فإنّ التّداخل التّالي محقق:

$$w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega) \subseteq w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)$$

البرهان:

لتكن $f \in \mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega)$ ولنبرهن أنّ: $\parallel f \parallel_{w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}} \leq c \parallel f \parallel_{w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}}$.

$$\parallel f \parallel_{w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_1(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^{p_1} m_k(\gamma,f)^{\frac{p_1}{q}}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_2(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(2^k))^{p_1} m_k(\gamma,f)^{\frac{p_1}{q}}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

وبتطبيق متراجحة هولدر (Hölder's inequality):

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_2(t) \left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} ((\psi_1(2^k))^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(m_k(\gamma,f)^{\frac{p_1}{q}}\right)^{\frac{p_2}{p_2-p_1}}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_2(t) \left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(m_k(\gamma,f)^{\frac{p_2}{q}}\right)^{\frac{p_1}{p_2-p_1}}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_2(t) \left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_1}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(m_k(\gamma,f)^{\frac{p_2}{q}}\right)^{\frac{p_1}{p_2-p_1}}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_2(t) \left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2}\right) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(m_k(\gamma,f)^{\frac{p_2}{q}}\right)^{\frac{p_1}{p_2-p_1}\,\frac{p_2-p_1}{p_1}}\right)\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq c \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{t>0} \phi_2(t) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi_1(2^k))^{p_2} m_k(\gamma,f)^{\frac{p_2}{q}}\right]^{\frac{1}{p_2}} \leq c \parallel f \parallel_{w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}} < \infty$$

بالتالي $f \in w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتّابع f نجد أنّ:

$$w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega) \subseteq w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)$$

سلسلة التّداخلات (chain of the inclusions):

بالاعتماد على المبرهنات السّابقة ومن أجل $1 < q_1 \leq q_2 < \infty$ و $\psi_1 \preccurlyeq \psi_2$ نعرف سّلسلة التّداخل التّالية:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega) \arrow[d] \\
w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_2}_{p,q_2}(\Omega) \arrow[r] & w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi,\psi_1}_{p,q_1}(\Omega)
\end{tikzcd}$$

وكذلك من أجل $1 < p_1 \leq p_2 < 2p_1 < \infty$ و $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ نعرّف سلسلة التّداخل التّالية:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega) \arrow[d] \\
w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_2,\psi}_{p_2,q}(\Omega) \arrow[r] & w\mathcal{M}\dot{k}^{\phi_1,\psi}_{p_1,q}(\Omega)
\end{tikzcd}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى تعريف فضاء هيرـ موري المتجانس المعمّم ودرسنا بعض خواصّه، ونوصي باستكمال هذا العمل ودراسة باقي الخواص كمحدودية المؤثرات التكاملية والكسرية بالإضافة إلى تعريف الفضاء الموزون منه وباقي الصّفوف المنبثقة عنه.

References:

[1] Landon. Degree of Approximation of Holder Continuous Function. PhD Thesis in Mathematics, Orlando, USA, 2008.

[2] Villani, A. *Another note on the inclusion Lp (μ)⊂ Lq (μ).* The American Mathematical Monthly, 92(7), 1985, 485-476.

[3] Masta, A. Gunawan, H. Stya-Budhi, W. x. *Inclusion Properties of Orlicz and weak Orlicz spaces.* J. Math. Fund. Sci. Vol. 48, No. 3, 2018, 193-203.

[4] Taqiyuddin. M, Masta, A. *Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Functions*. IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. Vol. 288, 2018, 1-5.

[5] Gürkanli, A. T. *On the inclusion of some Lorentz spaces*. Journal of Mathematics of Kyoto University, 44(2), 2004, 441-450.

[6] Ali, M. Baddour, H. Jasser, A. *An investigation in the inclusion theorem which related to Lorentz spaces.* Tishreen university journal for research and scientific studies – basic sciences series. Vol. 45, No. 5, 2023, 123-141.

[7] Rahman, H. *Inclusion Properties of The Homogeneous Herz-Morrey Spaces* with *Variable Exponent*. CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi, *7*(1), 2021, 22-27.

[8] Ali, M. Baddour, H. Jasser, A. *Inclusion relations between Herz-Morrey spaces with variable exponent.* Tartous university journal for research and scientific studies – basic sciences series. Vol. 6, No. 4, 2022, 101-115.

[9] Ali, M. Baddour, H. Darrag, B. *Inclusion Relations between α-Modulation Spaces and Triebel–Lizorkin Space*. Hindawi, Journal of Function Spaces Volume 2020, Article ID 9640742, 7 pages https://doi.org/10.1155/2020/9640742.

[10] Morrey, C, B. *On the Solution of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equation*, Transaction of American Mathematical Society,43(1), 1938, 126-166.

[11] Herz, C, S. *Lipschitz and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*, J. MATH.Mech,18, 1968, 283-323.
[12] LU, S. XU, L, *Boundedness of Rough Singular Integral Operators on The Homogeneous Herz - Morrey Spaces*. Hokkaido Math. Journal. vol. 34, 2005, 299-314.
[13] Cruz-Uribe. D, Fiorenza. A, Ruzhansky. M, Wirth. J,Tikhonov, S. Variable Lebesgue spaces and hyperbolic systems. Springer Basel, 2014.
[14] Rahman, H. *Inclusion properties of the homogeneous Herz-Morrey*. CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi, 6(3), 2020, 117-121.
[15] Castillo. R, Humberto, R. an introductory course in Lebesgue spaces, Springer, Switzerland, 2015, 215-268.
[16] Kufner. A, John. O, Fucik. S. Function spaces (Vol. 3). Springer Science & Business Media, 1977.
[17] Li. Y, Yang. D, Huang, L. Real-variable theory of Hardy spaces associated with generalized Herz spaces of Rafeiro and Samko (Vol. 2320). Springer Nature, 2023.