# An Investigation In The Inclucion Theorem Which Related To Lorentz Spaces

**Dr. Mohamad Ali***
**Dr. Hassan Baddour****
**Ali Jasser*****

**(Received 28 / 8 / 2023. Accepted 18 / 10 /2023)**

## □ ABSTRACT □

In this paper, we studied a problem at functional analysis, it is the inclusion of function spaces, especially we studied the inclusion between Lorentz space type $(r,p,q)$, In the beginning, we introduced this space and then, we studied some of its basic properties where we proved that it is non-empty, linear, quasi-normed and complete space, then we proved the inclusion of this space for different cases of the parameters, First for $1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$ , then for $0 \leq r_2 \leq r_1 < \infty$ ,
after that for $0 \leq r_2 \leq r_1 < \infty$ & و$1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$ *at the same time*.
In addition to some other inclusion cases.
Then, we proved one of the cases of inclusion between these spaces and bounded stummel modulus classes type (r, q,$\alpha$).

**Keywords**: inclusion, Lorentz spaces, bounded stummel modulus classes.



***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.**
**** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria.**
*****Postgraduate student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Latakia, Syria. alijassar@gmail.com**

# دِراسة في نظريّة التّداخل المتعلّقة بفضاءات لورنتز

**د. محمد علي**[*]

**د. حسن بدور**[**]

**علي جاسر**[***]

**(تاريخ الإيداع 28 / 8 / 2023. قُبِل للنشر في 18 / 10 /2023)**

## □ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل التَّحليل التَّابعي وهي مسألة تداخل الفضاءات التَّابعية، وبشكل خاص درسنا التَّداخل بين أحد الفضاءات المنبثقة عن فضاءات لورنتز وهو الفضاء $L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ ، في البداية عرَّفنا هذا الفضاء ومن ثمَ درسنا بعض خواصّهُ الأساسية حيث أثبتنا أنَّه غير خالٍ، خطّي، شبه منظَّم وتام بعد ذلك أثبتنا تداخلات هذا الفضاء من أجل حالات مختلفة للوسطاء بدايةً من أجل $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$ ومن ثم من أجل $0 \le r_1 \le r_2 < \infty$ بعدها من أجل $0 \le r_2 \le r_1 < \infty$ و $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$ في نفس الوقت.

بالإضافة إلى بعض حالات التّداخل الأخرى.

ومن ثمَ أثبتنا إحدى حالات تداخل هذه الفضاءات مع صفوف مودولات ستوميل المحدودة ذات النمط (r,q,$\alpha$).

**الكلمات المفتاحية:** التَداخل، فضاءات لورنتز، صفوف مودولات ستوميل المحدودة.



[*] **أستاذ- قسم الرياضيَات - كليَة العلوم- جامعة تشرين- اللّاذقية- سورية**

[**] **أستاذ- قسم الرياضيَات- كليَة العلوم- جامعة تشرين- اللّاذقية- سورية**

[***] **طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيَات- كليَة العلوم- جامعة تشرين- اللّاذقية- سوريةalijassar@gmail.com**

## مقدِمـة:

في بدايات القرن العشرين ظهرَ فرع تحليلي جديد في الرّياضيات النّظرية وهو ما يسمّى بالتّحليل التّابعي.

لقد توضّعت المفاهيم والطّرق الأساسية للتّحليل التّابعي تدريجياً في جوف الفروع الأكثر قدماً في التّحليل: في حساب التّحولات، في نظريّة المعادلات التّفاضلّية، في نظرية الّتمثيل وتقريب الّتوابع....

إنّ جوهر التّحليل التّابعي ينحصر في الانتقال من مجموعة المفاهيم والطّرق الابتدائية في التّحليل الرّياضي الحقيقي إلى مواضيع أكثر شمولية وذات طبيعة أكثر تعقيداً.

ويقسم التّحليل التّابعي بشكل عام الى مجموعة أقسام رئيسية، أغلب هذه الأقسام تُبنى على مفهوم الفضاء التّابعي.

ولعلّ أول ما يتبادر على ذهن الباحث عند تعريف فضاء تابعي جديد، السؤال التالي: ما علاقة هذا الفضاء بالفضاءات المشابهة له؟

وهنا أتت نظريّة تداخل الفضاءات لتجيب عليه، ففي بدايات هذه النّظرية اقتصر تعريف التّداخل على الإجابة على السؤال التالي:

إذا كان لدينا فضاء توابع ما معرف من خلال وسيط، ما العلاقة بين الفضاءات التّابعية التي تنشأ عند إعطاء قيم مختلفة لهذا الوسيط؟

بعدها تطورت هذه النظرية بفضل إسهامات العديد من الباحثين لتدرس مسائل التّداخل في فضاءات مختلفة البنية والتّعريف.

مثل هذه الدِراسة تمّت على بعض الفضاءات التّابعية الشَهيرة مثل فضاءات هولدر[1]، فضاءات ليبيغ[2] فضاءات أورليتش[3] ،[2]، فضاءات موري [6] ، [5] ، [4] وفضاءات $\alpha$ –مودوليشن وتريبل ليزوركين [7].

في بحثنا هذا، فقد توصلنا إلى بعض النتائج التي تخص تداخل أحد الصُفوف المتعلقة بفضاءات لورنتز، قدِّم فضاء لورنتز [8] أول مرَة عام 1950 بواسطة George G. Lorentz، يعتمد تعريف فضاء لورنتز على دالة إعادة الترتيب، حيث تلقت هذه الدَالة أول دراسة منهجية لها عام 1934 في كتاب بوليا وهاردي ليتلوود[9] .

كما قدَم غروتيندايك [10] ولوكسمبورغ [11] دراسات مفصَلة بهذا الخصوص.

مؤخّراً درس العديد من الباحثين مختلف خصائص فضاءات لورنتز [12] ،[13] ،[14].

## أهميَة البحث وأهدافـه:

تَكمن أهميَة البحث من كونه يعنى بدراسة علاقة الفضاءات التَابعية بين بعضها البعض، ويتجلّى الهدف الرّئيس من هذا البحث بدراسة وتحديد العلاقة بين فضاءات لورنتز ذات النّمط $(r, p, q)$ .

## طرائق البحث وموادّه:

يقع ضمن اختصاص الرّياضيَات النَّظرية وبشكل خاص ضمن التَحليل التَابعي ونظريّة الفضاءات، لذلك فإن الطّريقة المتّبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيَات نظريّة الفضاءات وبعض النَظريات الأساسية في التَّحليل التَّابعي.

### تعاريف ومفاهيم أساسية:

ليكن $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس و $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ هي مجموعة كل التوابع $\mathcal{A}$ - القيوسة على X عندئذٍ نُعرّف ما يلي:

**تعريف** (1): [15]

**دالة التّوزيع (The Distribution Function):**

تُعطى دالة التّوزيع $D_f$ للتّابع $f$ في $\mathcal{F}(X,\mathcal{A})$ بالعلاقة: $D_f(\lambda) := \mu\big(X(|f(x)| > \lambda)\big)$

حيث: $X(|f(x)| > \lambda) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ .

**تعريف** (2):[15]

**إعادة التّرتيب التّناقصي (The decreasing rearrangement):**

ليكن $f \in \mathcal{F}(X,\mathcal{A})$ عندئذٍ إعادة التّرتيب التّناقصي للتّابع $f$ هو التّابع $f^*: [0,\infty) \to [0,\infty)$ المعرّف بالعلاقة:

$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \le t\}$ .

**تعريف (3):**[15]

**فضاءات لورنتز (Lorentz spaces):**

ليكن $0 < p, q \le \infty$ ، يُعرّف فضاء لورنتز $L_{(p,q)} = L_{(p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ بأنه مجموعة كل التّوابع $\mathcal{F}(X,\mathcal{A})$ $f\in$ والتي تحقق: $\| f \|_{(p,q)} < \infty$

حيث:

$$\| f \|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & ; 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \; t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & ; \; q = \infty \end{cases}$$

والذي يتكافأ مع النّظيم $\| . \|_{pq}$ المُعرّف كما يلي:

$$\| f \|_{pq} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[ t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & ; 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \; t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & ; \; q = \infty \end{cases}$$

حيث $f^{**}$هو إعادة الترتيب التناقصي للتابع $f^*$.

**تعريف (4):[16]**

**صفوف مودولات ستوميل المحدودة (The bounded stummel modulus classes):**

ليكن $0 \le q < \infty$ و $0 < \alpha < n$ ، تُعرف صفوف مودولات ستوميل المحدودة $\tilde{S}_{q,\alpha} = \tilde{S}_{q,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ بالعلاقة:

$$\tilde{S}_{q,\alpha} = \left\{ f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) : \; \eta_{\alpha,n} f(s) < \infty \;\; for\; all\; s > 0 \right\}$$

حيث:

$$\eta_{\alpha,n} f(s) : \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left( \int_{|x-y|<s} \frac{|f(y)|^q}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \quad ; \;\; s > 0$$

**تعريف** (5):

**فضاءات لورنتز ذات النّمط (r,p,q)**

**:(Lorentz spaces type (r,p,q))**

ليكن $1 \le q \le \infty$ و $1 \le p \le \infty$ و $0 \le r < \infty$، $r \le q$ عندئذٍ يُعرّف فضاء لورنتز:

$L_{(r,p,q)} = L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ بأنه مجموعة كل التّوابع $f \in \mathcal{F}(X, \mathcal{A})$ والتي تحقق $\| f \|_{(r,p,q)} < \infty$

حيث:

$$\| f \|_{(r,p,q)} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty \left[ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{q}} & ; r \neq 0 \ , \ 1 \le q,p < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & ; r = 0 \ or \ q = \infty \end{cases}$$

والذي يتكافأ مع النّظيم $\| . \|_{rpq}$ المُعرف كما يلي:

$$\| f \|_{rpq} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty \left[ t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right]^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{q}} & ; r \neq 0 \ , \ 1 \le p,q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \ t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & ; r = 0 \ , \ or \ q = \infty \end{cases}$$

ولنبرهن على ذلك:

**مبرهنة مساعدة:**

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس، عندئذٍ: $\| f \|_{(r,p,q)} \le \| f \|_{rpq} \le \frac{p}{p-1} \| f \|_{(r,p,q)}$

**الإثبات:**

لنبرهن بدايةً المتراجحة الأولى: بما أنّ $f^* \le f^{**}$ عندئذٍ:

$$\| f \|_{(r,p,q)}^{\frac{q}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} = \| f \|_{rpq}^{\frac{q}{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \| f \|_{(r,p,q)} \le \| f \|_{rpq}$$

لنبرهن المتراجحة الثانية:

حالة (1): $p = \infty \ \& \ 0 < r,q < \infty$:

$$\| f \|_{rpq}^{\frac{q}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\, ds \right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left( \int_0^t f^*(s)\, ds \right)^{\frac{q}{r}} t^{\frac{q}{rp} - \frac{q}{r} - 1} dt \le \left( \frac{p}{p-1} \right)^{\frac{q}{r}} \| f \|_{(r,p,q)}^{\frac{q}{r}}$$

بالتالي: $\| f \|_{(r,p,q)} \le \| f \|_{rpq} \le \frac{p}{p-1} \| f \|_{(r,p,q)}$

حالة (2): $r = 0 \ or \ q = \infty$:

$$\| f \|_{rpq} = t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\, ds = t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\, s^{\frac{-1}{p}}\, ds$$
$$\leq t^{\frac{1}{p}-1} \| f \|_{(r,p,q)} \int_0^t s^{\frac{-1}{p}}\, ds = \frac{p}{p-1} \| f \|_{(r,p,q)}$$

**ملاحظة:**

اذا كان $r = 1$ عندئذ فإن: $L_{(r,p,q)} = L_{(p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

إذا كان $r = 1 , p = q$ عندئذ فإنّ: $L_{(r,p,q)} = L_{(p)}(X, \mathcal{A}, \mu)$

**تعريف** (6):

**صفوف مودولات ستوميل المحدودة ذات النمط ($\mathbf{r,q,}\alpha$)**

**:(The bounded Stummel modulus classes type (r,q,$\alpha$))**

ليكن $1 \leq q < \infty$ و $0 < \alpha < n$ و $0 < r < q$ ، عندئذ تُعرّف صفوف مودولات ستوميل المحدودة ذات النّمط (r,q,$\alpha$) بالعلاقة:

$$\tilde{S}_{r,q,\alpha} = \left\{ f \in L_{loc}^{\frac{q}{r}}(\mathbb{R}^n) :\ \eta_{r,\alpha,q} f(s) < \infty \ for\ all\ s > 0 \right\}$$

حيث:

$$\eta_{r,\alpha,q} f(s) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{|x-y|<s} \frac{|f(y)|^{\frac{q}{r}}}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \quad ; \quad s > 0$$

**بعض المبرهنات المساعدة:**

**مبرهنة ريس (Riesz theorem):** [15]

ليكن $f$ و $f_n$ توابع قيوسة ذات قيم عقدية على فضاء القياس $(X, \mathcal{A}, \mu)$ وبفرض أنَ: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ عندئذٍ بعض المتتاليات الجزئية من $f_n$ تتقارب بالقياس الى $f$ تقريباً في كل مكان.

**تمهيدية فاتو (*Fatou's lemma*):**[15]

لتكن $f_n$ متتالية من التّوابع $\mu$ – قيوسة و $g \in L^1$ ، إذا كان $f_n < g$ تقريباً في كل مكان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ عندئذٍ فإن:

$$\int_X \lim_{n\to\infty} inf\ f_n\ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_X f_n\ d\mu$$

## النّتائج والمناقشة:

سنورد فيما يلي مثالاً نوضح فيه أنّ أسرة التّوابع $L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ غير خالية.

**مثال (*1*):**

التّابع $f = \frac{1}{|x|^q (log|x|)^{2q}}$ ينتمي إلى الأسرة $L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ حيث $0 \leq r < q$ و $1 \leq p, q < \infty$.

**الإثبات:**

$$D_f(\lambda) = |\{x \in X: |f(x)| > \lambda\}| = |\left\{x \in X : \frac{1}{|x|^q(log|x|)^{2q}} > \lambda\right\}$$
$$= |x \in X : \left\{|x|^q(log|x|)^{2q} < \frac{1}{\lambda}\right\}| = |\left\{x \in X : \varphi(|x|) < \frac{1}{\lambda}\right\}$$

حيث: $\varphi(|x|) = |x|^q(log|x|)^{2q}$

$$= \left|\left\{ x \in X : |x| < \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\right| = C\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^n : C = C(n) > 0$$

دون التّقليل من عمومية المسألة من أجل n = rp لنضع $t = C(\varphi^{-1}(\frac{1}{\lambda}))^{rp}$ بالتّالي:

$$t^{\frac{1}{rp}} = C^{\frac{1}{rp}}(\varphi^{-1}(\frac{1}{\lambda})) \Rightarrow \varphi^{-1}(\frac{1}{\lambda}) = C^{\frac{-1}{rp}}\, t^{\frac{1}{rp}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \varphi\left(C^{\frac{-1}{rp}}\, t^{\frac{1}{rp}}\right)$$

ومنه نجد:

$$\lambda = \frac{1}{\varphi\left(C^{\frac{-1}{rp}}\, t^{\frac{1}{rp}}\right)} = \frac{C^{\frac{1}{rp}}}{\varphi\left(t^{\frac{1}{rp}}\right)} = \frac{C^{\frac{1}{rp}}}{\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q \left(log\, |t^{\frac{1}{rp}}|\right)^{2q}}$$
$$= \frac{C^{\frac{1}{rp}}}{\left(\frac{1}{rp}\right)^{2q}\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log\,|t|)^{2q}} = \frac{(rp)^{2q}C^{\frac{1}{rp}}}{\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log\,|t|)^{2q}} = \frac{C(r\,,p,q)}{\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log\,|t|)^{2q}}$$

وعليه: $f^*(t) = \frac{C(r\,,p,q)}{\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log\,|t|)^{2q}}$

بالتّالي:

$$\| f \|^{\frac{q}{r}}_{(r,p,q)} = \int_0^\infty t^{\frac{q}{rp}} f^*(t)^{\frac{q}{r}}\, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{q}{rp}}\, \left(C(r,p,q)\right)^{\frac{q}{r}}}{\left(\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log|t|)^{2q}\right)^{\frac{q}{r}}}\, \frac{dt}{t}$$
$$\le \left(C(r,p,q)\right)^{\frac{q}{r}}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{q}{rp}}}{\left(\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log|t|)^{2q}\right)^{\frac{r}{r}}}\, \frac{dt}{t} \le \left(C(r,p,q)\right)^{\frac{q}{r}}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{q}{rp}}}{\left|t^{\frac{1}{rp}}\right|^q (log|t|)^{2q}}\, \frac{dt}{t}$$
$$= \tilde{c}\int_0^\infty \frac{1}{t\,(log\,|t|)^{2q}}\, dt < \infty \; ; \; \tilde{c} = \left(C(r,p,q)\right)^{\frac{q}{r}} > 0$$
$$\Rightarrow f \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$$

**مبرهنة (1):**

إذا عرّفنا على أسرة التّوابع $L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ العمليتين التّاليتين:

1- $(f+g)(y) = f(y) + g(y); f, g \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu).$

2- $(\lambda f)(y) = \lambda f(y)\; ; \lambda \in \mathbb{R}\, , f \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu).$

عندئذ أسرة التوابع $L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ مع العمليتين السّابقتين تشكّل فضاء خطّي فوق الحقل $\mathbb{R}$.

**الإثبات:**

لكي يكون الفضاء $L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاءاً خطياً يجب تحقّق الشّرط:

$$\alpha f+\beta g \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)\ \forall\, f,g\ \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu), \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

ليكن $f, g \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ بالتالي $\| f \|_{(r,p,q)} < \infty$ ، $\| g \|_{(r,p,q)}$ ولنبرهن تحقّق الشّرط:

لدينا حالتين:

حالة (1): من اجل $1 \le p,q < \infty$ و $r \neq 0$ :

$$\| \alpha f+\beta g \|_{(r,p,q)}=\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left(\left(\alpha f+\beta g\right)(t)\right)^*\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left((\alpha f)^*\left(\frac{t}{2}\right)+(\beta g)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

وبتطبيق متراجحة منكوفيسكي:

$$\le \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(\alpha f)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(\alpha g)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}}\left[\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(\alpha f)^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(\alpha g)^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}\right]$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}}\left[\left[|\alpha|^{\frac{q}{r}}\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} + \left[|\beta|^{\frac{q}{r}}\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}g^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}\right]$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}}\left[|\alpha| \| f \|_{(r,p,q)}+|\beta| \| g \|_{(r,p,q)}\right] < \infty$$

$$\Longrightarrow\ \alpha f+\beta g\in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$$

حالة (2): من أجل $r=0\ or\ q\ =\infty$ :

$$\| \alpha f+\beta g \|_{(r,p,q)}= \sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}}\left(\left(\alpha f+\beta g\right)(t)\right)^* \le \sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}}\left((\alpha f)^*\left(\frac{t}{2}\right)+(\beta g)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}}\left[\sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}}\left((\alpha f)^*(t)+(\beta g)^*(t)\right)\right] \le 2^{\frac{1}{p}}\left[|\alpha|\sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}}f^*(t)+|\beta|\sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}}g^*(t)\right]$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}}\left[|\alpha| \| f \|_{(r,p,q)}+|\beta| \| g \|_{(r,p,q)}\right] < \infty$$

$$\Longrightarrow\ \alpha f+\beta g\in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$$

**مبرهنة (2):**

التّابع $\| . \|_{(r,p,q)}$ يعرِف شبه النّظيم.

**الإثبات:**

نميِز حالتين:

حالة (1): من اجل $1 \le p,q < \infty$ و $r \neq 0$ :

**1-** واضح أنَّ: $\| f \|_{(r,p,q)} \ge 0$ لكل $f \in L_{(r,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**2-** بفرض أنّ $\| f \|_{(r,p,q)} = 0 \Leftrightarrow \| f \|_{(r,p,q)}^{\frac{q}{r}} = 0$

$$0 = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} \geq \int_0^s \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} = \left(\frac{rp}{q}\right) s^{\frac{q}{rp}} f^*(s)^{\frac{q}{r}} \geq 0$$

$$\Longrightarrow f^*(s) = 0 \ \forall\ s > 0$$

إنّ هذا ومن كون: $\int_X |f|\, d\mu = \int_0^\infty f^*(s)\, ds = 0 \Longrightarrow f = 0\, \mu - a.e$

وعليه إذا كان: $f = 0\, \mu - a.e \Leftrightarrow \| f \|_{(r,p,q)} = 0$.

**3** - من اجل $f \in L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\| \lambda f \|_{(r,p,q)} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (\lambda f)^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} |\lambda|\ f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$= \left[|\lambda|^{\frac{q}{r}} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\ f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} = |\lambda| \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\ f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} = |\lambda|\ \| f \|_{(r,p,q)}$$

**4** - من أجل $f, g \in L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ لدينا:

$$\| f + g \|_{(r,p,q)} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left((f+g)\right)^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left((f)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (g)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

وبتطبيق متراجحة منكوفيسكي:

$$\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (g)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f)^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (g)^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}\right]$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\| f \|_{(r,p,q)} + \| g \|_{(r,p,q)}\right]$$

حالة (2): من اجل $r = 0\ or\ q = \infty$ :

**1** - واضح أنَّ: $\| f \|_{(r,p,q)} \geq 0$ لكل $f \in L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**2** - بفرض أنّ $\| f \|_{(r,p,q)} = 0$ :

$$0 = \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \Leftrightarrow f^*(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0\, \mu - a.e$$

**3** - من أجل $f \in L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\| \lambda f \|_{(r,p,q)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (\lambda f)^*(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} |\lambda| f^*(t) = |\lambda| \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$$
$$= |\lambda| \| f \|_{(r,p,q)}$$

**4** - من أجل $f, g \in L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ لدينا:

$$\| f + g \|_{(r,p,q)} = \sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}} \left((f+g)(t)\right)^* \leq \sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}} \left(f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$
$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}} \left(f^*(t) + g^*(t)\right)\right] \leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) + \sup_{t>o} t^{\frac{1}{p}} g^*(t)\right]$$
$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left[\| f \|_{(r,p,q)} + \| g \|_{(r,p,q)}\right]$$

**مبرهنة (3):**

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس $\sigma$ - منته، عندئذٍ لدينا:

$$\| f \|_{(r,p,q)} = p^{\frac{r}{q}} \left[\int_0^\infty \lambda \left(D_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{q}{r}} \frac{d\lambda}{\lambda}\right]^{\frac{r}{q}}$$

**الإثبات:**

نناقش حالتين:

حالة (1): من أجل $1 \leq p, q < \infty$ و $r \neq 0$ :

$$\| f \|^{\frac{q}{r}}_{(r,p,q)} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} t^{\frac{q}{rp}-1} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^{f^*(t)} \frac{q}{r} \lambda^{\frac{q}{r}-1} d\lambda\right) t^{\frac{q}{rp}-1} dt$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{q}{r} \lambda^{\frac{q}{r}-1} \chi_{\{\lambda>0: f^*(t)>\lambda\}}(\lambda) d\lambda\right) t^{\frac{q}{rp}-1} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{q}{r} \lambda^{\frac{q}{r}-1} t^{\frac{q}{rp}-1} \chi_{\{t>0: D_f(\lambda)>t\}}(t) dt\right) d\lambda$$
$$= \int_0^\infty \frac{q}{r} \lambda^{\frac{q}{r}-1} \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{rp}-1} \chi_{(0, D_f(\lambda))}(t)\, dt\right) d\lambda = \int_0^\infty \frac{q}{r} \lambda^{\frac{q}{r}-1} \left(\int_0^{D_f(\lambda)} t^{\frac{q}{rp}-1} dt\right) d\lambda$$
$$= p \int_0^\infty \lambda^{\frac{q}{r}-1} \left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{q}{rp}} d\lambda = p \int_0^\infty \left[\lambda \left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{q}{r}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$
$$\Rightarrow \| f \|_{(r,p,q)} = p^{\frac{r}{q}} \left[\int_0^\infty \lambda \left(D_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{q}{r}} \frac{d\lambda}{\lambda}\right]^{\frac{r}{q}}$$

حالة (2): من أجل $r = 0 \ or \ q = \infty$:

لنضع

$$c = \sup_{\lambda>0} \left\{\lambda^p D_f(\lambda)\right\}^{\frac{1}{p}} \Rightarrow D_f(\lambda) \leq \frac{c^p}{\lambda^p}$$

وباختيار $t = \frac{c^p}{\lambda^p}$ فإنه لدينا $\lambda = \frac{c}{t^{\frac{1}{p}}}$ وعليه فإنّ $f^*(t) = \inf\{\lambda > 0: D_f(\lambda) \leq t\} \leq \frac{c}{t^{\frac{1}{p}}}$

بالتالي: $t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \le c \;\; for\ all\ t > 0$ ، عندئذٍ: $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \;[\![1]\!] \le c$ .

ومن جهة أخرى من أجل $\lambda, \varepsilon > 0$ بحيث $\lambda > \varepsilon > 0$ لدينا $f^*(D_f(\lambda) - \varepsilon) > \lambda$ وعليه فإن:

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \ge \left((D_f(\lambda) - \varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} f^*\left((D_f(\lambda) - \varepsilon)\right) \ge \left((D_f(\lambda) - \varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} \lambda$$

لنجعل $\varepsilon \longrightarrow 0$ ولناخذ sup فوق كل $\lambda > 0$ :

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \ge \sup_{\lambda > o} \lambda \left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\lambda > o} \{\lambda^p D_f(\lambda)\}^{\frac{1}{p}} \;[\![2]\!]$$

بمقارنة $[\![1]\!]$ و $[\![2]\!]$ نحصل على:

$$\| f \|_{(r,p,q)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{\lambda > o} \{\lambda^p D_f(\lambda)\}^{\frac{1}{p}}$$

**تمهيدية (1):**

من أجل $1 \le p, q < \infty$ و $0 \le r < \infty$ و $r \le q$ فإنه لدينا:

$$\| f \|_{0pq} \le \left(\frac{rp}{q}\right)^{\frac{r}{q}} \| f \|_{rpq}$$

**الإثبات:**

$$t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = f^{**}(t) \left[\frac{rp}{q} \int_0^t s^{\frac{q}{rp}-1} \, ds\right]^{\frac{r}{q}} \le \left[\frac{rp}{q} \int_0^t \left(f^{**}(s)\right)^{\frac{q}{r}} s^{\frac{q}{rp}-1} \, ds\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \left[\frac{rp}{q} \int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} f^{**}(s)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{ds}{s}\right]^{\frac{r}{q}} \le \left(\frac{rp}{q}\right)^{\frac{r}{q}} \| f \|_{rpq}$$

وبأخذ sup فوق كل $t > 0$ نجد أن:

$$\| f \|_{0pq} \le \left(\frac{rp}{q}\right)^{\frac{r}{q}} \| f \|_{rpq}$$

**مبرهنة (4):**

الفضاء $\left(L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu) \,, \|.\|_{rpq}\right)$ تام.

**الإثبات:**

لتكن $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية لكوشي في الفضاء $L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ عندئذ:

$\| f_m - f_n \|_{rpq} \longrightarrow 0 \; as\ n, m \longrightarrow \infty$ وبحسب التمهيدية (1) ومن كون $(f^*(t) < f^{**}(t))$:

$$\| f_m - f_n \|_{0pq} \le \left(\frac{rp}{q}\right)^{\frac{r}{q}} \| f_m - f_n \|_{rpq} \longrightarrow 0 \;\; as\ n, m \longrightarrow \infty$$

وبحسب المبرهنة (3) حاله $(r = 0\ or\ q = \infty)$:

$$\sup_{\lambda > o} \{\lambda^p D_{f_m - f_n}(\lambda)\}^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f_m - f_n)^*(t) \longrightarrow 0 \; as\ n, m \longrightarrow \infty$$

عندئذ:

$$\sup_{\lambda > o} \{\lambda^p \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \lambda\})\}^{\frac{1}{p}} = \sup_{\lambda > o} \{\lambda^p D_{f_m - f_n}(\lambda)\}^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \ as\ n, m \longrightarrow \infty$$

$$\Longrightarrow \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \lambda\}) \longrightarrow 0 \ as\ n, m \longrightarrow \infty \ for\ any\ \lambda > 0$$

أظهرنا الآن أن $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية لكوشي بالقياس $\mu$ بالتالي يمكننا تطبيق نظريّة ريس واستنتاج أنَه يوجد تابع $\mu-$ قيوس مثل $f$ بحيث: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ .

هذا يؤدي أيضاً بحسب مبرهنة ريس إلى أنَه توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ من $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث:

$f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f \ a.e\ on\ X$ .

ليكن $\varepsilon > 0$ وبما إنَ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية لكوشي، عندئذٍ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث: $\| f_n - f_{n_0} \|_{rpq} \le \varepsilon$ لكل $n_0 < n$ و $f_{n_k} - f_{n_0} \xrightarrow{\mu} f - f_{n_0} \ a.e\ on\ X$ .

بالتالي: $(f - f_{n_0})^*(\mathrm{t}) \le \liminf_{k \to \infty} (f_{n_k} - f_{n_0})^*(\mathrm{t})$ لكل $\mathrm{t} > 0$ وباستخدام تمهيدية فاتو لدينا:

$(f - f_{n_0})^{**}(\mathrm{t}) \le \liminf_{k \to \infty} (f_{n_k} - f_{n_0})^{**}(\mathrm{t})\ for\ all\ \mathrm{t} > 0$ وبتطبيق تمهيدية فاتو مرّة أخرى:

$$\| f - f_{n_0} \|_{rpq} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f - f_{n_0})^{**}(\mathrm{t})\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k \to \infty} (f_{n_k} - f_{n_0})^{**}(\mathrm{t})\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \liminf_{k \to \infty} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_{n_0})^{**}(\mathrm{t})\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{r}{q}}$$

$$= \liminf_{k \to \infty} \| f_{n_k} - f_{n_0} \|_{rpq} < \varepsilon \ \forall\ n_k > n_0$$

بما إنّ $f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0} \in L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ بالتالي $L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ هو فضاء تام.

سنوضِح في المبرهنة التالية بعضاً من علاقات التداخل بين الفضاءات $L_{(r,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ والشّروط الكافية لتحققها.

**مبرهنة (5):**

**1 -** من أجل $1 \le q_1 \le q_2 < \infty$ و $1 \le p < \infty$ و $0 \le r < \infty$ ، و $r \le q_i$ حيث i=1,2 عندئذٍ يوجد ثابت $0 < c$ بحيث:

$\| f \|_{(r,p,q_2)} \le c \| f \|_{(r,p,q_1)}$ ويتحقق التداخل $L_{(r,p,q_1)}(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L_{(r,p,q_2)}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**2 -** من أجل $0 \le r_1 \le r_2 < \infty$ و $1 \le p, q < \infty$ و $r_i \le q$ حيث i =1,2 عندئذٍ يوجد ثابت $0 < c$ بحيث:

$\| f \|_{(r_1,p,q)} \leq c \| f \|_{(r_2,p,q)}$ ويتحقق التداخل $L_{(r_2,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu) \subseteq L_{(r_1,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**3-** من أجل $0 \leq r_2 \leq r_1 < \infty$ و$1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$ و $1 \leq p < \infty$ و$r_i \leq q_i$ حيث i =1,2 عندئذٍ يوجد ثابت $c > 0$ بحيث:

$\| f \|_{(r_2,p,q_2)} \leq c \| f \|_{(r_1,p,q_1)}$ ويتحقق التداخل $L_{(r_2,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu) \subseteq L_{(r_1,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**الإثبات:**

**1-** لتكن $f \in L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu)$ ولنبرهن أنّ: $\| f \|_{(r,p,q_2)} \leq c \| f \|_{(r,p,q_1)}$ .

$$\| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t} \geq \int_0^s \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t} = \left( \frac{rp}{q_1} \right) s^{\frac{q_1}{rp}} \left( f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r}}$$

$$\Rightarrow s^{\frac{q_1}{rp}} \left( f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r}} \leq \left( \frac{q_1}{rp} \right) \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} \Rightarrow \left( s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r}} \leq \left( \frac{q_1}{rp} \right) \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}}$$

وعليه فإنّ: $s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \leq \left( \frac{q_1}{rp} \right)^{\frac{r}{q_1}} \| f \|_{(r,p,q_1)}$ وبأخذ $sup$ فوق كل $s > 0$ نجد:

$$\| f \|_{(0,p,q_1)} \leq \left( \frac{q_1}{rp} \right)^{\frac{r}{q_1}} \| f \|_{(r,p,q_1)}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r} - \frac{q_1}{r} + \frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r} - \frac{q_1}{r}} \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t} \leq \| f \|_{(0,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r} - \frac{q_1}{r}} \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \left( \frac{q_1}{rp} \right)^{\left(\frac{q_2}{r} - \frac{q_1}{r}\right) / \frac{q_1}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r} - \frac{q_1}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} = \left( \frac{q_1}{rp} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1}} \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r}} < \infty$$

لنضع $\mathrm{k} = \left( \frac{q_1}{rp} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1}} \Leftarrow \| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}} \leq \mathrm{k} \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r}} < \infty$ بالتالي:

$\| f \|_{(r,p,q_2)} \leq c \| f \|_{(r,p,q_1)}$ حيث $c = \mathrm{k}^{\frac{r}{q_2}} \Leftarrow f \in L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتّابع $f$ نجد أن: $L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu) \subseteq L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**2-** لتكن $f \in L_{(r_2,p,q)}(X,\mathcal{A},\mu)$ ولنبرهن أنّ: $\| f \|_{(r_1,p,q)} \leq c \| f \|_{(r_2,p,q)}$ .

$$\| f \|_{(r_2,p,q)}^{\frac{q}{r_2}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r_2}} \frac{dt}{t} \geq \int_0^s \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^{\frac{q}{r_2}} \frac{dt}{t} = \left( \frac{r_2 p}{q} \right) s^{\frac{q}{r_2 p}} \left( f^*(s) \right)^{\frac{q}{r_2}}$$

$$\Rightarrow s^{\frac{q}{r_2 p}} \left( f^*(s) \right)^{\frac{q}{r_2}} \leq \left( \frac{q}{r_2 p} \right) \| f \|_{(r_2,p,q)}^{\frac{q}{r_2}} \Rightarrow \left( s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^{\frac{q}{r_2}} \leq \left( \frac{q}{r_2 p} \right) \| f \|_{(r_2,p,q)}^{\frac{q}{r_2}}$$

وعليه فإنَ: $s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \leq \left( \frac{q}{r_2 p} \right)^{\frac{r_2}{q}} \| f \|_{(r_2,p,q)}$ وبأخذ $sup$ فوق كل $s > 0$ نجد:

$$\| f \|_{(0,p,q)} \leq \left( \frac{q}{r_2 p} \right)^{\frac{r_2}{q}} \| f \|_{(r_2,p,q)}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\| f \|_{(r_1,p,q)}^{\frac{q}{r_1}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r_1}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{r_2}} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}} \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r_2}} \frac{dt}{t} \leq \| f \|_{(0,p,q)}^{\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}} \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q}{r_2}} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \left( \frac{q}{r_2 p} \right)^{\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) / \frac{q}{r_2}} \| f \|_{(r_2,p,q)}^{\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}} \| f \|_{(r_2,p,q)}^{\frac{q}{r_2}} < \infty$$

لنضع $\mathrm{k} = \left( \frac{q}{r_2 p} \right)^{\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) / \frac{q}{r_2}} \Leftarrow \| f \|_{(r_1,p,q)}^{\frac{q}{r_1}} \leq \mathrm{k} \; \| f \|_{(r_2,p,q)}^{\frac{q}{r_1}} < \infty$ بالتالي:

$\| f \|_{(r_1,p,q)} \leq c \; \| f \|_{(r_2,p,q)}$ حيث $c = \mathrm{k}^{\frac{r_1}{q}} \Leftarrow f \in L_{(r_1,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتابع $f$ نجد أن: $L_{(r_2,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L_{(r_1,p,q)}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**3-** لتكن $f \in L_{(r_1,p,q_1)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ولنبرهن أنّ: $\| f \|_{(r_2,p,q_2)} \leq c \; \| f \|_{(r_1,p,q_1)}$ .

$$\| f \|_{(r_1,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r_1}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r_1}} \frac{dt}{t} \geq \int_0^s \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r_1}} \frac{dt}{t} = \left( \frac{r_1 p}{q_1} \right) s^{\frac{q_1}{r_1 p}} \left( f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r_1}}$$

$$\Longrightarrow s^{\frac{q_1}{r_1 p}} \left( f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r_1}} \leq \left( \frac{q_1}{r_1 p} \right) \| f \|_{(r_1,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r_1}} \Longrightarrow \left( s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^{\frac{q_1}{r_1}} \leq \left( \frac{q_1}{r_1 p} \right) \| f \|_{(r_1,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r_1}}$$

وعليه فإنّ: $s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \leq \left( \frac{q_1}{r_1 p} \right)^{\frac{r_1}{q_1}} \| f \|_{(r_1,p,q_1)}$ وبأخذ $sup$ فوق كل $s > 0$ نجد:

$$\| f \|_{(0,p,q_1)} \leq \left( \frac{q_1}{r_1 p} \right)^{\frac{r_1}{q_1}} \| f \|_{(r_1,p,q_1)}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\| f \|_{(r_2,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r_2}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r_2}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_1}{r_1}} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1}} \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r_1}} \frac{dt}{t} \leq \| f \|_{(0,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1}} \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r_1}} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \left( \frac{q_1}{r_1 p} \right)^{\left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1}\right) / \frac{q_1}{r_1}} \| f \|_{(r_1,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1}} \| f \|_{(r_1,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r_1}} < \infty$$

لنضع $\mathrm{k} = \left( \frac{q_1}{r_1 p} \right)^{\left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1}\right) / \frac{q_1}{r_1}} \Leftarrow \| f \|_{(r_2,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r_2}} \leq \mathrm{k} \; \| f \|_{(r_1,p,q_1)}^{\frac{q_2}{r_2}} < \infty$ بالتالي:

وبمراعاة الاختيار الكيفي $f \in L_{(r_2,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu) \Leftarrow c\ =\ \mathrm{k}^{\frac{r_2}{q_2}}$ حيث $\| f \|_{(r_2,p,q_2)} \leq c\ \| f \|_{(r_1,p,q_1)}$ للتّابع $f$ نجد أن: $L_{(r_1,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu)\ \subseteq L_{(r_2,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**مبرهنة (6):**

من أجل $1 \leq q_1 < q_2 < q_3 < q_4 < \infty$ و $1 \leq p < \infty$ و $0 \leq r < \infty$ و $r \leq q_i$ حيث i=1,2,3,4 ،

عندئذٍ يوجد ثابت $0 < c$ بحيث: $\| f \|_{(r,p,q_3+q_4)} \leq\ c\ \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}$

ويتحقق التداخل $L_{(r,p,q_1+q_2)}(X,\mathcal{A},\mu) \subset\ L_{(r,p,q_3+q_4)}(X,\mathcal{A},\mu)$

**الإثبات:**

لتكن $f \in\ L_{(r,p,q_1+q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$ ولنبرهن أنَ: $\| f \|_{(r,p,q_3+q_4)} \leq\ c\ \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}$

$$\| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_1+q_2}{r}} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_1+q_2}{r}} \frac{dt}{t} \geq \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{\frac{q_1+q_2}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$= \left(\frac{rp}{q_1+q_2}\right) s^{\frac{q_1+q_2}{rp}} \left(f^*(s)\right)^{\frac{q_1+q_2}{r}}$$

وذلك من أجل كل $0 < s \Leftarrow$

$$\| f \|_{(0,p,q_1+q_2)} = \sup_{0<t} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq \left(\frac{q_1+q_2}{rp}\right)^{\frac{r}{q_1+q_2}} \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\| f \|_{(r,p,q_3+q_4)}^{\frac{q_3+q_4}{r}} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_3+q_4}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)+(q_1+q_2)}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{(q_1+q_2)}{r}} \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \left(\sup_{0<t} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{(q_1+q_2)}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^\infty \left(\| f \|_{(0,p,q_1+q_2)}\right)^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{(q_1+q_2)}{r}} \frac{dt}{t} \leq \| f \|_{(0,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{(q_1+q_2)}{r}}$$

$$\leq \left[\left(\frac{q_1+q_2}{rp}\right)^{\frac{r}{q_1+q_2}}\right]^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{(q_1+q_2)}{r}}$$

$$\leq \left[\left(\frac{q_1+q_2}{rp}\right)^{\frac{r}{q_1+q_2}}\right]^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_3+q_4}{r}}$$

أي أصبح لدينا:

$$\| f \|_{(r,p,q_3+q_4)}^{\frac{q_3+q_4}{r}} \leq \left[\left(\frac{q_1+q_2}{rp}\right)^{\frac{r}{q_1+q_2}}\right]^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}} \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_3+q_4}{r}}$$

لنضع: $$c\ =\ \left[\left(\left(\frac{q_1+q_2}{rp}\right)^{\frac{r}{q_1+q_2}}\right)^{\frac{q_3+q_4-(q_1+q_2)}{r}}\right]^{\frac{r}{q_3+q_4}}$$

نجد أن: $\| f \|_{(r,p,q_3+q_4)} \leq\ c\ \| f \|_{(r,p,q_1+q_2)} < \infty$

بالتالي:

$f \in L_{(r,p,q_3+q_4)}(X,\mathcal{A},\mu)$

وبمراعاة الاختيار الكيفي للتابع $f$ نجد أن: $L_{(r,p,q_1+q_2)}(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_{(r,p,q_3+q_4)}(X,\mathcal{A},\mu)$

**مبرهنة (7):**

من أجل $f \in L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu) \cap L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$ و $1 \le q_1 \le q_2 \le q_3 < \infty$ و

$1 \le p < \infty$ و $0 \le r < \infty$ و $r \le q_i$ ، حيث i =1,2,3 عندئذٍ يوجد ثابت $0 < c$ بحيث:

$$\| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_1+q_2}{r}} \le c \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} \| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}}$$

ويتحقق التداخل: $L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu) \cap L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_{(r,p,q_1+q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$

**الإثبات:**

لتكن $f \in L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu) \cap L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$ عندئذٍ:

$$\Leftarrow f \in L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu) \;\&\; f \in L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$$

$$\| f \|_{(r,p,q_1)} = \left( \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{q_1}} < \infty \Leftrightarrow \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \frac{dt}{t} < \infty$$

$$\| f \|_{(r,p,q_2)} = \left( \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{q_2}} < \infty \Leftrightarrow \| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r}} \frac{dt}{t} < \infty$$

ومن جهة أخرى:

$$\| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_1+q_2}{r}} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1+q_2}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$\le \int_0^\infty \left( \sup_{0<t} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_1}{r}} \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r}} \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty \left( \| f \|_{(0,p,q_1)} \right)^{\frac{q_1}{r}} \left( t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^{\frac{q_2}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$\le \| f \|_{(0,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} \| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}} \le \left( \left( \frac{q_1}{rp} \right)^{\frac{r}{q_1}} \| f \|_{(r,p,q_1)} \right)^{\frac{q_1}{r}} \| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}}$$

وبوضع $c = \frac{q_1}{rp}$ نجد أنَ:

$$\| f \|_{(r,p,q_1+q_2)}^{\frac{q_1+q_2}{r}} \le c \| f \|_{(r,p,q_1)}^{\frac{q_1}{r}} \| f \|_{(r,p,q_2)}^{\frac{q_2}{r}} < \infty$$

وعليه فإنَ: $f \in L_{(r,p,q_1+q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للتابع $f$ نجد أن:

$$L_{(r,p,q_1)}(X,\mathcal{A},\mu) \cap L_{(r,p,q_2)}(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_{(r,p,q_1+q_2)}(X,\mathcal{A},\mu)$$

**مبرهنة (8):**

من أجل $f \in \bigcap_{k=1}^{n} L_{(r,p,q_k)}(X,\mathcal{A},\mu)$ حيث $1 \le q_1 < q_2 < \ldots. < q_n < \infty$

و $1 \le p < \infty$ و $0 \le r < \infty$ و $r \le q_i$ حيث $i = 1,2,3,..n$،عندئذٍ يوجد ثابت $0 < c = c(n)$ بحيث:

$$\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^n q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^n q_k}{r}} \le c \prod_{k=1}^n \| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{q_k}{r}} \quad [\![1]\!]$$

ويتحقق التداخل التالي: $\bigcap_{k=1}^{n} L_{(r,p,q_k)}(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_{(r,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**الإثبات:**

نبرهن على صحة العلاقة ⟦1⟧ بالاستقراء الرياضي على n:

**أولاً:** العلاقة ⟦1⟧ صحيحة من اجل $n = 2$ وهو ما أثبتناه في المبرهنة السّابقة.

**ثانياً:** نفرض صحة العلاقة ⟦1⟧ من أجل $k = n$ أي العلاقة:

$\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{r}} \le c \prod_{k=1}^{n} \| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{q_k}{r}}$ محققة حيث $0 < c = c(n)$.

**ثالثاً:** لنبرهن على صحة العلاقة ⟦1⟧من أجل $k = n+1$، أي لنبرهن ان:

$\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n+1} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} q_k}{r}} \le c \prod_{k=1}^{n+1} \| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{q_k}{r}}$ حيث $0 < c = c(n+1)$.

لتكن $f \in \bigcap_{k=1}^{n+1} L_{(r,p,q_k)}(X,\mathcal{A},\mu)$ أي ان: $f \in L_{(r,p,q_k)}(X,\mathcal{A},\mu)$ لكل $k = 1,2,\dots,n,n+1$

ومنه : $\| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{r}{q_k}} < \infty \qquad ⟦2⟧$ لكل $k = 1,2,\dots,n,n+1$.

ولدينا من جهة أخرى:

$$\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n+1} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} q_k}{r}} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} q_k}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_1+q_2+\dots+q_n}{r}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_{n+1}}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$\le \int_0^\infty \left(\sup_{0<t} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_1+q_2+\dots+q_n}{r}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_{n+1}}{r}} \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty \| f \|_{(0,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}^{\frac{q_1+q_2+\dots+q_n}{r}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{\frac{q_{n+1}}{r}} \frac{dt}{t}$$

$$\le \| f \|_{(0,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{r}} \| f \|_{(r,p,q_{n+1})}^{\frac{q_{n+1}}{r}} \le \left[\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{rp}\right)^{\frac{r}{\sum_{k=1}^{n} q_k}} \| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}\right]^{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{r}} \| f \|_{(r,p,q_{n+1})}^{\frac{q_{n+1}}{r}}$$

$$\le \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{rp}\right) \| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{r}} \| f \|_{(r,p,q_{n+1})}^{\frac{q_{n+1}}{r}}$$

بالتالي وبحسب فرض الاستقراء يصبح لدينا:

$$\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n+1} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} q_k}{r}} \le \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{rp}\right) \left(c \prod_{k=1}^{n} \| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{q_k}{r}}\right) \| f \|_{(r,p,q_{n+1})}^{\frac{q_{n+1}}{r}}$$

الان لنضع: $c = c(n+1) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{rp}\right) c(n)$

وعليه: ⟦3⟧ $\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n+1} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} q_k}{r}} \le c \left(\prod_{k=1}^{n} \| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{q_k}{r}}\right) \| f \|_{(r,p,q_{n+1})}^{\frac{q_{n+1}}{r}} = c \prod_{k=1}^{n+1} \| f \|_{(r,p,q_k)}^{\frac{q_k}{r}}$

$\Leftarrow$ العلاقة ⟦1⟧ صحيحة من اجل $k = n+1$ بالتالي فهي صحيحة من أجل كل $2 \le k \le n$.

ومن العلاقة ⟦2⟧و⟦3⟧ نجد أن: $\| f \|_{(r,p,\sum_{k=1}^{n+1} q_k)}^{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} q_k}{r}} < \infty$ بالتالي: $f \in L_{(r,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}(X,\mathcal{A},\mu)$

وبمراعاة الاختيار الكيفي للتابع $f$ نجد أن: $\bigcap_{k=1}^{n} L_{(r,p,q_k)}(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_{(r,p,\sum_{k=1}^{n} q_k)}(X,\mathcal{A},\mu)$.

**مبرهنة (9):**

من أجل $X = \mathbb{R}^n$ و $\mu$ قياس ليبيغ عندئذٍ التّداخل التّالي محقق: $L_{\left(r,\frac{nq}{\alpha r},q\right)}(\mathbb{R}^n) \subseteq \tilde{S}_{r,q,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ .

**الإثبات:**

لتكن $f \in L_{\left(r,\frac{nq}{\alpha r},q\right)}(\mathbb{R}^n)$ عندئذٍ لدينا:

$$\| f \|^{\frac{q}{r}}_{\left(r,\ \frac{nq}{\alpha r},q\right)} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{\alpha r}{nq}} f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{n}} \left(f^*(t)\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t} = \| \ |f|^{\frac{q}{r}} \|_{\left(1,\frac{n}{\alpha},1\right)}$$

وعليه فإنّ: $|f|^{\frac{q}{r}} \in L_{\left(1,\frac{n}{\alpha},1\right)}(\mathbb{R}^n) \ \Leftrightarrow \ f \in L_{\left(r,\frac{nq}{\alpha r},q\right)}(\mathbb{R}^n)$

من أجل $\epsilon > 0$ صغير بما فيه الكفاية لدينا:

$$||f(t)|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)}| \le |f(t)|^{\frac{q}{r}} \Rightarrow \left(|f(t)|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)}\right)^* \le \left(|f(t)|^{\frac{q}{r}}\right)^*$$

ومنه: $\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{n}} \left(|f(t)|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)}\right)^* \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{n}}\left(|f(t)|^{\frac{q}{r}}\right)^* \frac{dt}{t} < \infty \Rightarrow |f(t)|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)} \in L_{\left(1,\frac{n}{\alpha},1\right)}(\mathbb{R}^n)$

ومن جهة أخرى: ليكن $g(x) = |x|^{\alpha - n}$ عندئذٍ:

$$D_g(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{\alpha - n} > \lambda\}|$$

$$= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-\alpha}}\right\}\right| = C_n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

الآن لنضع $t = C_n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \Leftarrow \lambda = C_n^{\frac{n-\alpha}{n}} \ t^{\frac{\alpha}{n}-1} \Leftarrow g^*(t) = C_n^{\frac{n-\alpha}{n}} \ t^{\frac{\alpha}{n}-1}$ .

ومن هذا نحصل:

$$\| g \|_{\left(0,\frac{n}{n-\alpha},q\right)} = \| \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \|_{\left(0,\frac{n}{n-\alpha},q\right)} = \sup_{t>0} \ C_n^{\frac{n-\alpha}{n}} \ t^{1-\frac{\alpha}{n}} \ t^{\frac{\alpha}{n}-1} = C_n^{\frac{n-\alpha}{n}}$$

أخيراً:

$$\left(\int_{B(x,\varepsilon)}^{\infty} \frac{|f|^{\frac{q}{r}}}{|x-y|^{n-\alpha}} dy\right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)}}{|x-y|^{n-\alpha}} dy\right)^{\frac{r}{q}} \le \| \ |f|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)} \|_{\left(1,\frac{n}{\alpha},1\right)} \| \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \|_{\left(0,\frac{n}{n-\alpha},q\right)}$$

$$\le C_n^{\frac{n-\alpha}{n}} \ \| \ |f|^{\frac{q}{r}}\chi_{B(x,\epsilon)} \|_{\left(1,\frac{n}{\alpha},1\right)} < \infty$$

$\Leftarrow f \in \tilde{S}_{r,q,\alpha}(\mathbb{R}^n)$

وبمراعاة الاختيار الكيفي للتّابع $f$ نجد أنَ: $L_{\left(r,\frac{nq}{\alpha r},q\right)}\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq \tilde{S}_{r,q,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

## الاستنتاجات والتوصيات:

توصّلنا في هذه المقالة إلى تعريف فضاءات توابع متعلّقة بفضاءات لورنتز ودرسنا التّداخل بينها، ونوصي بتعريف فضاءات توابع أكثر عمومية ودارسة التداخل بينها.

## References:


[1] Landon, *Degree of Approximation of Holder Continuous Function.* PhD Thesis in Mathematics, Orlando, USA, 2008.

[2] Masta, A, A, Gunawan, H, Stya-Budhi, W. x, *Inclusion Properties of Orlicz and weak Orlicz spaces.* J. Math. Fund. Sci. Vol. 48, No. 3, 2018, 193-203.

[3] Taqiyuddin, M, Masta, A. *Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Functions*. IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. Vol. 288, 2018,1-5.
[4] Gunawan, H, Hakim, D, I, Limanta, K, M, Masta, A, A. *Inclusion properties of generalized Morrey spaces. Math. NACHR*. Vol. 290, 2017, 332-340.
[5] Gunawan, H, Hakim, D, I, Nakia, E, Sawano, Y. *On inclusion relation between weak Morrey spaces and Morrey spaces. Nonlinear Anal*. Vol. 168, 2018, 27-31.
[6] Sawano, Y, Tanaka, H. *Morrey spaces for non-doubling measures*. ACTA Math. Sin. Engl. Ser. Vol. 21, No. 6, 2005, 1535-1544.
[7] Ali, M, Baddour, H, Darrag, B. *Inclusion Relations between $\alpha$-Modulation Spaces and Triebel–Lizorkin Space*. Hindawi, Journal of Function Spaces Volume 2020, Article ID 9640742, 7 pages https://doi.org/10.1155/2020/9640742.
[8] Lorentz, G, G. *Some new functional spaces*. Ann. Math. VOL. 51, 1950, 37–55.
[9] Littlewood, H, H, Polya, J, E, Inequalities. Cambridge University Press, 1934.
[10] Grothendieck, A. *Rearrangements Function and Convexity Inequalities in Trased Von Neumann Algebras*. Séminaire Boubaki, vol. 113 ,1955, 127–139.
[11] Luxemburg, W, A. *Rearrangement-invariant Banach function spaces.* Queen's Papers in Pure and Appl. Math. VOL. 10, 1967, 83–144.
[12] Krbec, M, Lang, J. *On embeddings between weighted Orlicz–Lorentz spaces.* Georgian Math. VOL. 4, 1997, 117–128.
[13] Bouchala, B. *Measures of non – compactness and Sobolev – Lorentz spaces.* Jornal of analysis and its application. Vol. 39, 2020, 27-40.
[14] Dolezalova, A, Vybiral, J. *on the volume of unit balls of finite-dimensional lorentz spaces.* Jornal of approximation theory. Vol. 255, 2020, 1-18.
[15] Castillo, R, Humberto, R. an introductory course in Lebesgue spaces, Springer, Switzerland, 2015, 215-268.
[16] Tumalun, N, Hakim, D, Gunawan, H. *inclusion between stummel classes and other function spaces.* Mathematical inequality & application. Vol.2, 2020, 547-562.