مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

دراسة في الفضاءات المتراصّة من النّوع α و فضاء α−Kc

الدكتور عدنان ظريف*
أمل مصطفى وريد**

(تاريخ الإيداع 1 / 12 / 2014. قُبِل للنشر في 9 / 3 /2015)

□ ملخّص □

يهدف هذا العمل لدراسة بعض خصائص الفضاء المتراصّ من النّوع α ($\alpha-$ compact space)، والعلاقة بينه وبين أنواع أخرى من التراصّ ، و دراسة الفضاء $\alpha-Kc$ (α–ولانسكي)، وذلك بالاعتماد على مفهوم المجموعة المفتوحة من النّوع α الذي وضع من قبل الباحث الرّياضي Njastad عام 1965 ، ولقد توصّلنا إلى بعض النتائج منها : كلّ فضاء متراصّ بقوّة هو فضاء α–متراصّ لكنّ العكس غير صحيح بالضرورة ، كلّ فضاء Kc هو فضاء $\alpha-Kc$.

الكلمات المفتاحية : المجموعة المفتوحة من النّوع α، الفضاء α–متراصّ ، فضاء $\alpha-Kc$.

* أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
** طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

Study on α-type compact spaces and α-Kc space

Dr. Adnan Zarif*
Amal Mostafa Wraid**

(Received 1 / 12 / 2014. Accepted 9 / 3 /2015)

□ ABSTRACT □

In this work we studied some properties of $\alpha-$type compact space and the relationship between it and the other types of compactness and studied $\alpha-Kc$ space by relying on the notion of $\alpha-$open set was developed by mathematician Njastad in 1965, and we had reached some results such as : Every strongly compact space is $\alpha-$compact space but the opposite is not necessarily true . Every Kc space is $\alpha-Kc$ space.

Keywords : $\alpha-$open set , $\alpha-$compact space , $\alpha-Kc$ space .

***Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمّة:

تعدّ المجموعات المفتوحة إحدى اللبنات الأساسية التي يقوم عليها بناء الفضاء التبولوجي إذْ إنّها تشكل حجر الزّاوية في تعريف التبولوجيا ، ونظراً لدورها المهمّ تمّ إيجاد عدّة أنماط من المجموعات المرادفة لها كالمجموعات المفتوحة من النّوع α، و المجموعات المفتوحة من النّوع β ، و المجموعات المفتوحة من النّوع θ. اعتمدنا في هذا البحث على المجموعات نصف المفتوحة ،و قبل المفتوحة ،و المفتوحة النظامية ، و المجموعات المفتوحة من النّوع α التي تمّ الاستفادة منها في دراسة موضوعات الفصل من النّوع α، و كذلك الدّوال المستمرّة من النّوع α في العمل [1] ، بالإضافة إلى دراسة الفضاء $\alpha-Kc$ الذي يعدّ مرادفاً للفضاء Kc المدروس في العملين [2] ، [3].

أهمية البحث و أهدافه :

يهدف هذا البحث إلى دراسة أنواع جديدة من الفضاءات المتراصّة و إعطاء بعض الأمثلة عنها ، و دراسة العلاقة بين هذه الفضاءات اعتماداً على بعض أنواع المجموعات المفتوحة ، و دراسة الفضاء $\alpha-Kc$، حيث تتحوّل التعاريف من شكل إلى آخر، و هذا ما سنراه في سياق البحث، علماً أنّ البحث يقع في مجال الرياضيات النظرية ، و يقدم عدّة إضافات في هذا المجال .

طرائق البحث و مواده :

يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية ،و يكتسب صبغة نظرية تستخدم فيها طرائق نظرية تخصّ بشكل عام الفضاءات التبولوجية و الاستفادة من المفاهيم و الأفكار التبولوجية في المناقشة و البراهين على نتائج البحث .

تعاريف و نتائج مساعدة :

سنفرض في التعاريف الآتيةجميعها أنّ (X,τ) فضاء تبولوجي كيفي ، F أسرة المجموعات المغلقة فيه جميعها و A مجموعة جزئية كيفية منه ، f دالة معرفة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي (Y,τ^*) :

1- المجموعة المفتوحة من النوع α ($\alpha-$ Open Set) [4]: يقال عن المجموعة A إنّها مجموعة مفتوحة من النّوع α ($\alpha-$مفتوحة)، إذا تحقق الشرط $A \subseteq Int(cl(IntA))$ ، و يرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النّوع αجميعها بالرمز $O_\alpha(X)$.

2- المجموعة المغلقة من النّوع α ($\alpha-$ Closed Set) [4]: تدعى متمّمة المجموعة المفتوحة من النّوع α بالمجموعة المغلقة من النوع α، و يرمز لأسرة المجموعات المغلقة من النّوع α جميعها بالرمز $C_\alpha(X)$.

3- التبولوجيا من النّوع α ($\alpha-$ Topology) [4]: إن أسرة المجموعات المفتوحة من النّوع α جميعها في الفضاء التبولوجي (X,τ) تشكل تبولوجيا على X تسمى بالتبولوجيا من النّوع α، ويرمز لها بالرمز $\tau_\alpha(X)$، أي $\tau_\alpha(X)=O_\alpha(X)$ ، و تكون $\tau \subseteq \tau_\alpha$ ، و يرمز لأسرة المجموعات المغلقة من النّوع α جميعها بالرمز F_α وتكون $F \subseteq F_\alpha$.

مثال : الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X=\{a,b,c,d\}$ و التبولوجيا المعرفة عليها هي : $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. إن المجموعات المفتوحة من النوع α هي : $\tau_\alpha=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$ و المجموعات المغلقة من النوع α هي : $F_\alpha=\{X,\phi,\{c\},\{d\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$.

بديهية : إذا كان (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً من فضاء تبولوجي (X,τ)، و كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء (Y,τ_Y)، عندئذ تكون A مجموعة α−مغلقة (α−مفتوحة) في الفضاء (Y,τ_Y)، إذا وجدت مجموعة α−مغلقة (α−مفتوحة) في (X,τ) مثل G، بحيث يكون $A=G\cap Y$.

4− المجموعة نصف المفتوحة (Semi−Open Set) [5]: يقال عن المجموعة A بأنها مجموعة نصف مفتوحة إذا حققت الشرط $A\subseteq cl(Int(A))$، و يرمز لأسرة المجموعات نصف المفتوحة جميعها بالرمز $SO(X)$.

5− المجموعة قبل المفتوحة (Preopen Set) [6]: يقال عن المجموعة A بأنها مجموعة قبل مفتوحة إذا حققت الشرط $A\subseteq Int(cl(A))$، و يرمز لأسرة المجموعات قبل المفتوحة جميعهابالرمز $PO(X)$.

خاصية [7] : تكون المجموعة A مجموعة مفتوحة من النوع α إذا كانت A مجموعة نصف مفتوحة ، و قبل مفتوحة .

6− المجموعة المفتوحة النظامية (Regular −Open Set) [8]: يقال عن المجموعة A إنّها مجموعة مفتوحة نظامية إذا حققت الشرط $A=Int(cl(A))$، و يرمز لأسرة المجموعات المفتوحة النظاميةجميعها بالرمز $RO(X)$.

7−الفضاء $\alpha-T_2$ (α−هاوسدورف) [9]: يقال عن الفضاء (X,τ) إنّه فضاء $\alpha-T_2$ إذا تحقّق :

$$\forall x,y\in X\,;x\neq y\Rightarrow\exists U,V\in\tau_\alpha;x\in U\wedge y\in V,U\cap V=\phi$$

8− الفضاء المتراصّ (Compact Space) : في سنة 1924 أعطى العالمان الكسندروف و اريسون التعريف الدقيق للفضاء المتراصّ ، حيث سميّا الفضاء التبولوجي (X,τ) متراصّاً إذا كانت كل تغطية مفتوحة له تملك تغطية جزئية منتهية .

9− الفضاء المتراصّ من النوع α(Compact Space −α) [10]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنّه فضاء متراصّ من النوع α (α− متراص) ،إذا كانت كل تغطية α−مفتوحة للفضاء X تملك تغطية جزئية منتهية ، و يكون (X,τ) فضاءً α−متراصّاً إذا كان (X,τ_α) فضاءً متراصّاً.

مثال : الفضاء التبولوجي: $(\mathbb{N},\tau)$ حيث $\tau=\{\{0,2,4,....\},\{1,3,5,....\},\mathbb{N},\phi\}$ و $\tau=\tau_\alpha$

إن $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء متراصّ من النوع α.

مبرهنة [10]: في أي فضاء تبولوجي (X,τ) تتحقق كلّ من الخاصتين الآتيتين :

a−إذا كان الفضاء (X,τ) α−متراصّاً ، فإنّ كل مجموعة α−مغلقة فيه تكون مجموعة α−متراصّة.

b−إذا كان الفضاء (X,τ) $\alpha-T_2$، فإنّ كلّ مجموعة α−متراصّة فيه تكون مجموعة α−مغلقة.

10− الفضاء نصف المتراصّ (Semi−Compact Space) [11]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنّه فضاء نصف متراصّ إذا كانت كلّ تغطية نصف مفتوحة للفضاء X تملك تغطية جزئية منتهية .

11− الفضاء المتراصّ بقوة (Strongly Compact Space) [12]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء متراصّ بقوة إذا كانت كل تغطية قبل مفتوحة للفضاء X تملك تغطية جزئية منتهية .

12- الدالة المستمرّة من النوع α (**continuous function** $-\alpha$) $[13]$: يقال عن الدالة f إنها دالّة مستمرّة من النوع α إذا كانت $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة (مغلقة) من النوع α في الفضاء (X,τ) لكل V مجموعة مفتوحة (مغلقة) في الفضاء (Y,τ^*).

13- الدالة المحافظة العكسية من النوع α (**irresolute function** $-\alpha$) $[9]$: يقال عن الدالة f إنّها دالة محافظة عكسية من النوع α إذا كانت $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة من النوع α في (X,τ) لكل V مجموعة مفتوحة من النوع α في الفضاء التبولوجي (Y,τ^*).

14- الفضاء Kc **(ولانسكي)** $[3]$: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنّه فضاء Kc إذا كانت كلّ مجموعة متراصّة فيه مجموعة مغلقة .

النتائج و المناقشة :

مبرهنة 1: كلّ فضاء تبولوجي $\alpha-$متراص هو فضاء متراصّ .

البرهان : بفرض (X,τ) فضاء تبولوجي $\alpha-$متراصّ، و لنأخذ الأسرة $\{T_i; i\in I\}$ تغطية مفتوحة كيفية للفضاء X أي $X=\bigcup_{i\in I} T_i$ ، عندئذ بأنّ $\tau\subseteq\tau_\alpha$ تكون التغطية المفتوحة هي تغطية $\alpha-$مفتوحة ، لكن (X,τ) فضاء $\alpha-$متراصّ والتغطية السابقة تملك تغطية جزئية منتهية $\{T_1,T_2,....,T_n\}$ للفضاء X ، أي $X=\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ ، إذا (X,τ) فضاء متراصّ بحسب تعريف الفضاء المتراصّ.

ملاحظة: ليس بالضرورة أن يكون كلّ فضاءٍ من النّوع $\alpha-$فضاءً متراصّاً ، وهذا ما يبينه المثال الآتي:

مثال : الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N},\tau)$ حيث $\tau=\{\mathbb{N},\phi,\{1\}\}$ ، إنّ $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء متراصّ ، و $\tau_\alpha=\{T\in P(\mathbb{N});1\in T\}\cup\{\phi\}$ ، الفضاء $(\mathbb{N},\tau)$ ليس $\alpha-$متراصّاً، و لبرهان ذلك نأخذ مثلاً التغطية $\alpha-$مفتوحة $\{\{1,n\};n\in\mathbb{N}\}$ للفضاء $(\mathbb{N},\tau)$ ، فنلاحظ أنّها لا تحتوي على تغطية جزئية منتهية .

مبرهنة 2: إذا كان (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً من فضاء (X,τ)، و كانت A مجموعة جزئية $\alpha-$متراصّة في (Y,τ_Y) ،عندئذٍ تكون A مجموعة $\alpha-$متراصّة في (X,τ).

====**البرهان** : بفرض A مجموعة جزئية $\alpha-$متراصّة في (Y,τ_Y) ، و لنبرهن على أنها $\alpha-$متراصّة في (X,τ). لتكن $\{T_i; i\in I\}$ تغطية $\alpha-$مفتوحة كيفية للمجموعة A في (X,τ)، أي $A\subseteq\bigcup_{i\in I} T_i$ عندئذ $A\cap Y\subseteq\bigcup_{i\in I} T_i\cap Y \Leftarrow A\subseteq\bigcup_{i\in I} T_i^*$ حيث $A=A\cap Y$ ، $T_i^*=T_i\cap Y;\forall i\in I$: وهي مجموعة $\alpha-$مفتوحة في (Y,τ_Y) أيّاً كان i (لأن المجموعة G تكون $\alpha-$مفتوحة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) إذا وجدت مجموعة $\alpha-$مفتوحة في (X,τ) مثل T ، بحيث $G=T\cap Y$)، و بما أنّ A مجموعة $\alpha-$متراصّة في (Y,τ_Y) عندئذٍ توجد تغطية جزئية منتهية $\{T_1^*,T_2^*,....,T_n^*\}$ للمجموعة A من التغطية $\{T_i^*; i\in I\}$ أي $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i^* \Rightarrow A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i\cap Y \Rightarrow A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ بالتالي A مجموعة $\alpha-$متراصة في (X,τ).

مبرهنة 3: إذا كانت الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ محافظة عكسية من النوع α، و غامرة و كان (X,τ) فضاءً $\alpha-$متراصّاً عندئذٍ يكون (Y,τ^*) فضاءً $\alpha-$متراصاً.

البرهان : لتكن $\{G_i ; i \in I\}$ تغطية $\alpha-$مفتوحة كيفية للفضاء (Y,τ^*) أي $Y=\bigcup_{i\in I} G_i$ عندئذٍ :
$f^{-1}(G_i), \forall i \in I$ مجموعة $\alpha-$مفتوحة في (X,τ) ،لأن f دالة محافظة عكسية من النوع α . من جهة ثانية لدينا: $X=f^{-1}(Y)=f^{-1}(\bigcup_{i\in I} G_i)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i)$
إذاً $\{f^{-1}(G_i); i\in I\}$ تغطية $\alpha-$مفتوحة للفضاء (X,τ) لكن (X,τ) فضاء $\alpha-$متراصّ ،و التغطية السابقة تملك تغطية جزئية منتهية، أي $X=\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)$ ، و بما أن f~ دالة غامرة ، فإن :
$f(X)=Y=f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i))=f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} G_i))=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ إذا $\{G_1,G_2,......,G_n\}$ تشكل تغطية $\alpha-$مفتوحة منتهية للفضاء (Y,τ^*) وبالتالي (Y,τ^*) فضاء $\alpha-$متراصّ بحسب تعريف الفضاء $\alpha-$متراصّ .

مبرهنة 4: إذا كان (X,τ_1) فضاء $\alpha-T_2$ و (X,τ_2) فضاء $\alpha-$متراصّاً، و كانت $\tau_{1\alpha}\subseteq\tau_{2\alpha}$ ،عندئذٍ تكون $\tau_{1\alpha}=\tau_{2\alpha}$.

البرهان : بفرض T مجموعة $\alpha-$مفتوحة كيفية في (X,τ_2) أي $T\in\tau_{2\alpha}$ عندئذ $X\setminus T=F$ مجموعة $\alpha-$مغلقة في (X,τ_2) لكن (X,τ_2) فضاء $\alpha-$متراص وبالتالي F مجموعة $\alpha-$متراصة في (X,τ_2)، لنأخذ $\{G_i ; i\in I\}$ تغطية $\alpha-$مفتوحة في (X,τ_1) للمجموعة F ، أي $F\subseteq\bigcup_{i\in I} G_i$ ،عندئذٍ تكون الأسرة $\{G_i ; i\in I\}$ تغطية $\alpha-$مفتوحة في (X,τ_2) للمجموعة F ،لأن $\tau_{1\alpha}\subseteq\tau_{2\alpha}$، لكن (X,τ_2) فضاء $\alpha-$متراصّ ، هذا يعني أنّ التغطية السابقة تحوي تغطية جزئية منتهية للمجموعة F : $F\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ أي F مجموعة $\alpha-$متراصّة في (X,τ_1)، فهي إذاً $\alpha-$مغلقة فيه ،لأن (X,τ_1) فضاء $\alpha-T_2$، و بالتالي $X\setminus F=T$ مجموعة $\alpha-$مفتوحة فيه ،أي $T\in\tau_{1\alpha} \Leftarrow \tau_{2\alpha}\subseteq\tau_{1\alpha} \Leftarrow \tau_{1\alpha}=\tau_{2\alpha}$.

مبرهنة 5: كلّ فضاء متراصّ بقوة هو فضاء متراصّ من النوع α.

البرهان : ينتج من كون كلّ مجموعة مفتوحة من النوع α ،هي مجموعة قبل مفتوحة .

ملاحظة : ليس بالضرورة أن يكون كلّ فضاء من النّوع α فضاءً متراصاً بقوة، وهذا ما يبينه المثال الآتي:

مثال : الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X=\{2n+1; n\in\mathbb{N}\}$ مع التبولوجيا الضعيفة المعرفة على X ، إن $\tau=\tau_\alpha=\{X,\phi\}$ ، $PO(X)=P(X)$ ، الفضاء (X,τ) متراص من النوع α ، لكنه ليس فضاء متراصّاً بقوة.

تعريف1: الفضاء المتراص النظامي : نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنّه فضاء متراصّ نظامي إذا كانت كلّ تغطية بالمجموعات المفتوحة النظامية للفضاء X تملك تغطية جزئية منتهية .

خاصيّة : كلّ مجموعة مفتوحة نظامية ،هي مجموعة مفتوحة من النّوع α.

البرهان : بفرض A مجموعة مفتوحة نظامية كيفية في الفضاء (X,τ) ،عندئذٍ $A=Int(cl(A))$ ، لكنّ داخلية أيّة مجموعة، هي مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي ، وأنّ $Int(cl(A))$ ، مجموعة مفتوحة في (X,τ)، فهي مجموعة مفتوحة من النوع α فيه .

مبرهنة 6: كل فضاء متراصّ من النوع α هو فضاء متراصّ نظامي .

البرهان : ينتج من كون كلّ مجموعة مفتوحة نظامية ، هي مجموعة مفتوحة من النوع α.

ملاحظة : ليس بالضرورة أن يكون كلّ فضاءٍ متراصّ نظامي فضاءً متراصّاً من النّوع α ، و هذا ما يبينه المثال الآتي :

مثال : الفضاء (X,τ)، حيث $X=\{2n;n=1,2,3,....\}$ **و** التبولوجيا المعرفة عليها هي : $\tau=\{X,\phi,\{2\},\{4\},\{2,4\}\}$ **إن** $\tau_{\alpha}=\tau\cup\{T\in \mathrm{P}(X);\{2,4\}\subseteq T\}$ ، $RO(X)=\{\{2\},\{4\},X,\phi\}$ ، نلاحظ أن الفضاء (X,τ) متراصّ نظامي، لكنّ فضاء α**ليس متراصّاً**.

مبرهنة 7: إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ دالة غامرة ،و α−محافظة عكسية ، و كان (X,τ) فضاءً نصف متراصٍ عندئذٍ يكون (Y,τ^{*}) فضاءً α−متراصاً .

البرهان : بفرض (X,τ) فضاء نصف متراصّ، و لنبرهن أن (Y,τ^{*}) فضاء α−متراص . لنأخذ الأسرة $\{T_i;i\in I\}$ تغطية α−مفتوحة كيفية للفضاء (Y,τ^{*})، أي $Y=\bigcup_{i\in I}T_i$ عندئذٍ أن f~ دالة α−محافظة عكسية ،فإنّ $f^{-1}(T_i);\forall i\in I$ مجموعة α−مفتوحة في (X,τ) ، و بالتالي $f^{-1}(T_i);\forall i\in I$ مجموعة نصف مفتوحة، لأن كل مجموعة α−مفتوحة تكون نصف مفتوحة . $f^{-1}(Y)=X=f^{-1}(\bigcup_{i\in I}T_i)\Leftarrow$ $X=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(T_i)$ لكنّ الفضاء (X,τ) نصف متراصّ، عندئذٍ التغطية النصف المفتوحة $\{f^{-1}(T_i);i\in I\}$ تملك تغطية جزئية منتهية للفضاء X أي $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(T_i)$. من جهة ثانية لدينا f دالة غامرة إذاً : $f(X)=Y=f(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(T_i))=f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}T_i))$ $\Leftarrow$ $Y=\bigcup_{i=1}^{n}T_i$ و نحصل من التغطية الكيفية $\{T_i;i\in I\}$ للفضاء Y على تغطية جزئية منتهية $\{T_1,T_2,....T_n\}$ إذاً (Y,τ^{*}) فضاء α−متراصّ بحسب تعريف الفضاء α−متراص .

تعريف 2: الفضاء $\alpha-Kc$ (α−**ولانسكي**) : بفرض (X,τ) فضاء تبولوجي كيفي ، نقول عن (X,τ) إنّه فضاء $\alpha-Kc$ إذا كانت أية مجموعة α−متراصة فيه هي مجموعة α− مغلقة فيه .

مثال : الفضاء التبولوجي (X,τ)، حيث X مجموعة منتهية مع التبولوجيا القوية $\tau=P(X)$ ،إنّ $\tau=\tau_{\alpha}=F_{\alpha}$. نلاحظ في هذا الفضاء أنّ كلّ مجموعة جزئية تكون α−مغلقة ، و كلّ مجموعة α−متراصّة تكون α−مغلقة .

نتيجة 1: كلّ فضاء $\alpha-T_2$ هو فضاء $\alpha-Kc$.

البرهان : نعلم أنّ كلّ مجموعة α−متراصة في فضاء $\alpha-T_2$ ، هي مجموعة α−مغلقة ، و كلّ فضاء $\alpha-T_2$ ،هو فضاء $\alpha-Kc$ بحسب تعريف الفضاء $\alpha-Kc$.

نتيجة 2: كلّ فضاء تبولوجي Kc هو فضاء $\alpha-Kc$.

البرهان : بفرض أنّ (X,τ) فضاء Kc ،ولتكن A مجموعة جزئية α−متراصّة كيفية فيه ،عندئذٍ A مجموعة متراصة، و A مجموعة مغلقة لكون (X,τ) فضاء Kc ، فهي مجموعة α−مغلقة . إذاً كلّ مجموعة α− متراصة في (X,τ)، هي مجموعة α−مغلقة و نجد (X,τ) فضاء $\alpha-Kc$.

نتيجة 3: إذا كان (X,τ) فضاءً $\alpha-Kc$ و α− متراصاً ، و كان (Y,τ_Y) فضاءً جزئياً منه عندئذٍ يكون (Y,τ_Y) فضاءً α−متراصّاً ،إذا كان (Y,τ_Y) فضاءً α−مغلقاً في (X,τ) .

البرهان : لنفرض أنّ (Y,τ_Y) فضاء $\alpha-$متراص عندئذ (Y,τ_Y) فضاء $\alpha-$مغلق في (X,τ)، لأن (X,τ) فضاء $\alpha-Kc$. و بالعكس إذا كان (Y,τ_Y) فضاء $\alpha-$مغلق في (X,τ) ، عندئذ يكون فضاء $\alpha-$متراص فيه لأن (X,τ) فضاء $\alpha-$ متراص.

مبرهنة 8: كلّ فضاء جزئي من فضاء $\alpha-Kc$ هو فضاء $\alpha-Kc$.

البرهان : بفرض أنّ (X,τ) فضاء $\alpha-Kc$ ، (Y,τ_Y) فضاء جزئي منه، و لتكن A مجموعة $\alpha-$متراصة كيفية في (Y,τ_Y) ، عندئذٍ (A,τ_A) فضاء $\alpha-$متراصّ في (Y,τ_Y)، فهو $\alpha-$متراص في (X,τ) الذي هو فضاء $\alpha-Kc$، و يكون فضاءُ $\alpha-$مغلقاً فيه ، بما أن $A=A\cap Y$، عندئذٍ تكون A مجموعة $\alpha-$مغلقة في (Y,τ_Y)، لأنّ المجموعة A تكون $\alpha-$مغلقة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) فقط ،إذا وجدت مجموعة $\alpha-$مغلقة F في (X,τ) ، بحيث $A=F\cap Y$، و نحصل على أنّ (Y,τ_Y) فضاء $\alpha-Kc$.

الاستنتاجات والتوصيّات :

توصّلنا إلى بعض النتائج المتعلقة بفضاء $\alpha-Kc$ ، و الفضاءات : نصف المتراصّة ، المتراصّة بقوّة ، المتراصّة النظامية ، $\alpha-$متراصة .

و هدفنا المستقبلي هو دراسة فضاء $\alpha-$نيوثر، و الفضاء نصف المتراص من النّوع α ، و دراسة العلاقات بين فضاءات : لندلوف و $\alpha-$لندلوف ، المتراص عدّياً و $\alpha-$ المتراص عدياً ، $BW-$متراص و $\alpha BW-$متراص .

المراجع:

[1]− ظريف، عدنان. ، الخفاجي، أسعد. *موضوعات الفصل* : $\alpha-T_0,\alpha-T_1,\alpha-T_2$ ، مجلة جامعة تشرين. سورية، المجلد(34). العدد(2)، 2012، 125−137.

[2]− ظريف، عدنان. ، عبد الرزاق، فاتن. *تبولوجيا* − $CoKc$ ، مجلة جامعة تشرين. سورية، المجلد(33). العدد(2)، 2011، 193−199.

[3]- ALI,R.*Minimal Kc-spaces and Minimal Lc-spaces,* Tishreen University Journal Syria.,Vol.28, No.1,2005, P.147-154.

[4]- Njastad,O.*On some classes of nearly open sets*,Pacific journal of math., Vol.15,No.3,1965,961-970.

[5]- Levine,N.*Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer.Math.Monthly 70,1963, 36-41.

[6]- Mashhour,A.S.;Abd El-Monsef,M.E.and El-Deeb,S.N.*On precontinuous and weak precontinuous functions*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt.,Vol.53,1982, 47-53.

[7]- Reilly,I.L.and Vamanamurthy,M.K.*On $\alpha-$continuity in topological spces.*,Acta Math.Hung.,Vol.45,1985, 27-32.

[8]- STONE, M.*Applications of the theory of Boolean rings to general topology,* Trans. Amer.Math.Soc.Vol.41,1937, 374-481.

[9]- Maheshwari,S.N.and Thakur,S.S.*On* $\alpha -$*irresolute mappings*, Tamkang J. Math.,Vol.11,1980, 209-214.

[10]- Maheshwari,S.N.;Thakur,S.S.*On* $\alpha -$*compact spaces*., Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica.,Vol.13,No.4,1985,341-347.

[11]- Dorsett,I.C.*Semi-compactness,semi-separation axioms and product spaces*., Bull.Malaysian Math. Soc.,Vol.4,No.2,1981,21-28.

[12]- Mashhour,A.S;Abd El-Monsef,M.E;Hasanein,I.A and Noiri,T., *Strongly compact spaces*, Delta J.Sci.,Vol.8,No.1,1984,30-46.

[13]- Mashhour,A.S.; Hasanein, I.A. and El-Deeb, S.N. $\alpha -$*continuous and* $\alpha -$*open mappings*, Acta Math. Hungar.,Vol.41,1983, 213-218.