مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

دراسة التبعثّر الكلاسيكيّ والكميّ لحزمة جسيمات نقطية منخفضة الطاقة، واردة على هدف كرويّ صلب .

هشام صقر*

(تاريخ الإيداع 21 / 1 / 2015. قُبِل للنشر في 31 / 3 /2015)

□ ملخّص □

تمّ في هذا البحث دراسة تبعثر حزمة جسيمات نقطية منخفضة الطاقة ، واردة على هدف كرويّ صلب باستخدام نظريتي التبعثر الكلاسيكية ،والكميّة في مجال الطاقات المنخفضة، حيث تبيّن لنا أن هناك تبايناً طفيفاً بين المفهومين السّابقين، يتمثل في كون مقطع التبعثر الكمي يساوي أربعة أمثال مقطع التبعثر الكلاسيكي أي: $\sigma_{qua.} = 4\sigma_{cla.}$.

الكلمات المفتاحية: تبعثّر كلاسيكي ، تبعثر كميّ، مقطع عرضي، جسيم نقطي.

* قائم بالأعمال – قسم الفيزياء – كليّة العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

Studying of Classical and Quantum Scattering for A Beam of Point Particles With Low Energy Coming on Hard Spherical Target

Hisham Saker*

(Received 21 / 1 / 2015. Accepted 31 / 3 /2015)

□ ABSTRACT □

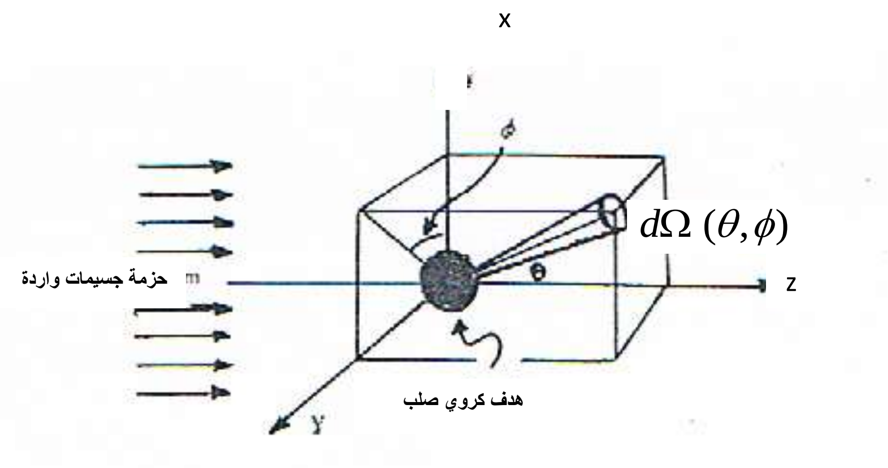
In this research has been studied scattering of pointparticles beam with low energy coming on hard spherical target by using theory ofclassical and quantum scattering In the field of low-energy, We show the existence of a slight discrepancy between them,which is in fact a quantumcross section of scattering equals four timesthe classical Cross-section: $\sigma_{qua.} = 4\sigma_{cla.}$.

Keywords: classicalscattering ,quantum scattering, cross section,point particle.

*Academic Assistant - **Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدّمة :

يعرف المقطع العرضي للتبعثّر هندسيّاً ،بأنّه المساحة التي يعرضها الهدف أمام جسيمات الحزمة الواردة ،أو بتعبير آخر هو تلك المساحة الفعّالة من الهدف التي تتسبب في انحراف حزمة الجسيمات الواردة داخل زاوية مجسمة $d\Omega\,(\theta,\phi)$ ،كما يبيّن الشكل (1) :



شكل (1): تبعثر حزمة جسيمات واردة على هدف ما في الإحداثيات القطبية

ونعبر رياضياً عن ذلك كما يأتي[2,1] :

$$\sigma = \int \sigma(\theta,\phi)\, d\Omega \Rightarrow \sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega$$

$$d\Omega = Sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

ويقاس المقطع العرضي للتبعثّر بواحدة تسمّى البارن(Barn)حيث: $1\text{barn} = 10^{-24}\text{cm}^2$

ان تقريب النيوكلونات بعضها من بعض، ثمّ دراسة التفاعلات الحاصلة فيما بينها ، يقودنا إلى دراسة طاقات الوضع النووية. ولإجراء ذلك يلزمنا حزمة واردة من الجسيمات النووية ، ونيوكلونات كهدف وجهاز كاشف، يمكننا من معرفة مخرجات التبعثر الناتجة عن التفاعل النوويّ بين جسيمات الحزمة الواردة، وجسيمات الهدف. تسمّى التجارب التي تقع ضمن هذا المجال تجارب التبعثر ، ويستخدم في تحليل نتائجها مايسمّى بنظرية التبعثر. وحيث إنّنا سنتعامل مع أنظمة كمية ،لذلك سوف تستخدم نظرية التبعثر الكمية والاستعانة –أيضاً– بنظرية التبعثر الكلاسيكيّة[6].

أهميّة البحث وأهدافه :

يبيّن البحث التباين بين المفهومين الكلاسيكي والكمي في مسألة محددة تتمثل في تبعثر جسيمات نقطية على كرة صلبة، وفي الوقت نفسه يبحث عن البارامتر δ (الوسيط)"الذي نجد أنّ تأثير طاقة الوضع يتجلّى في إزاحة طور الموجة الخارجة إلى الموجة الداخلة، (جزء الموجة –S من الحزمة المستوية الأصلية)، لهذا السبب يطلق على البارامتر δاسم إزاحة الطور". الذي يمكن أن يزيل هذا التباين، ويجعل التطابق بين المفهومين أمراً ممكناً في مجال الطاقات المنخفضة.

طرائق البحث وموادّه :

أولاً : الدّراسة الكلاسيكيّة:

نفرض أنّ الجملة متناظرة للمحور z ،عندئذٍ تكون الانحرافات الحادثة مستقلّة عن الزاوية ϕ. فتنحرف مسارات الجسيمات التي لها بارامترات واقعة في المجالين $b(\phi)\ ,b(\phi)+\delta b$ بزوايا واقعة في المجالين θ الى $\theta+\delta\theta$، ولهذا تكون المساحة الفعالة التي تسبب حدوث انحراف داخل الزاوية المجسّمة $d\Omega(\theta,\phi)$ مساوية[3] :

$$d\sigma(\theta,\phi)=\sigma(\theta,\phi)d\Omega(\theta,\phi)=b(\theta)dbd\phi \Rightarrow$$

$$\sigma(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\phi=b(\theta)\, db\, d\phi$$

نكامل العلاقة السابقة بالنسبة لـ $d\phi$ حيث ϕ تتغير في المجال $[0-2\pi]$

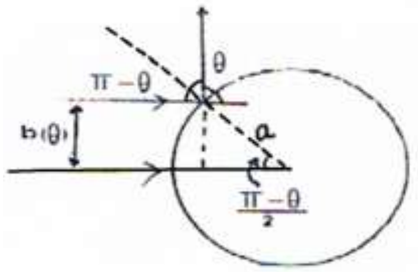
فنجد :

$$2\pi\sigma(\theta)\,Sin\theta\, d\theta=2\pi b(\theta)\, db$$

$$\sigma(\theta)\,Sin\theta\, d\theta=b(\theta)db$$

$$\sigma(\theta)=\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|=\frac{d\sigma}{d\pi}$$

نلاحظ أنّه بازدياد بارامتر الصّدم b تتناقص الزاوية θ ،وتصبح الكمية $\frac{db}{d\theta}$ دائماً سالبة . وبما أنّ قيمة المقطع العرضي موجبة دائماً ،أخذنا القيمة المطلقة للكمية $\frac{db}{d\theta}$. نعدّ الآن أن الهدف عبارة عن كرة صلبة (كرة بلياردو) نصف قطرها a ،ويسقط عليها حزمة من الجسيمات النقطية التي تتبعثر عليها بشكل مرن، الشكل (2) .



شكل (2)التبعثر على كرة صلبة نصف قطرها a

من الشكل نجد :

$$b(\theta)=aSin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right|=\frac{a}{2}Sin\frac{\theta}{2}$$

نعوّض في عبارة المقطع العرضي التفاضليّ :

$$\frac{d\sigma}{d\pi} = \sigma(\theta) = a^2 / 4 \Rightarrow$$

(مقطع التبعثر الكلاسيكي)

$$\sigma = \int_0^{4\pi} \frac{a^2}{4} d\Omega = \pi a^2 \qquad (1)$$

حيث تعدّ πa^2 عن مساحة مقطع تبعثر (دائرة) ، ومن ثمّ فإنّ المقطع العرضي الكليّ يحدد الحيز الفعّال من الهدف .

من كل ما سبق يظهر جلياً إمكانية استخلاص معلومات عن شكل الهدف من معرفة المقطع العرضي التفاضلي . ففي حالة الكرة الصلبة نجد أنّ المقطع العرضي التفاضلي ،(أي التوزّع الزاوي للمقطع العرضي)، يأخذ المقدارنفسه في جميع الاتجاهات، وعند أيّ قيمة من قيم طاقات الحزمة ، وهذا يتفق مع نتائج البحث[4] . لنبحث الآن عن علاقة مماثلة للعلاقة (1)، من خلال الدراسة الكميّة .

ثانياً : الدراسة الكميّة :

إنّ دراسة حالة التبعثّر السّابقة باستخدام النظرية الكميّة يقتضي التعبير عن التفاعل بين جسيمات الحزمة الواردة والهدف بدلالة طاقة الوضع المعرفة كما يأتي:

$$\begin{cases} V(r) = 0, & r < a \\ V(r) = \infty, & r = a \end{cases} \qquad (2)$$

نلاحظ أنّ طاقة الوضع هذه تزداد زيادة فجائية بشكل كبير جدّاً عند اقتراب الجسيمات بعضهامن بعضٍ إلى مسافة معينة $r = a$ ، وطاقة الوضع هذه تؤدي إلى توزّع متماثل للتبعثر من أجل $r < a$ [4].

نعدّأنّ الهدف مثبت عند صفر الإحداثيات ،حيث تتبعثر عليه حزمة من الجسيمات الواردة بطاقة حركية :

$$E = \frac{P^2}{2m} \qquad (3)$$

حيث P : اندفاع (كمية حركة) الجسيمات.

إنّ تابعاً لحالة لابدّ أن يكون تابعاً مناسباًلحلّ معادلة شرود نغر من أجل تلك الطاقة ، نختار الحلّ التقريبي لمعادلة شرود نغر بالصيغة الآتية :

$$u_k(r) \approx e^{ikz} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (4)$$

حيث :

$$\vec{K} = \frac{\vec{P}}{\hbar} \qquad (5)$$

يعبر عن قيمة الموجة

يمثل الحدّ الأول : e^{ik_z}الموجة المستوية في اتجاه المحور z التي تصف الحزمة الواردة .

ويمثل الحدّ الثاني : $f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$ الموجة المتبعثرة، والمكوّنة من موجات كروية فقط .

الكثافة الجسيمية ρ في الموجة المستوية تساوي :

$$\rho = \left| e^{ikz} \right|^2 = 1 \qquad (6)$$

وسرعة الجسيمات الواردة تعطى بالعلاقة :

$$V = \frac{hK}{m} = \frac{p}{m} \qquad (7)$$

لذلك فإنّ التدفق F يساوي :

$$F = \rho V = V \qquad (8)$$

نحدد الجسيمات المتبعثرة في الحجم r+ dr, r داخل الزاوية المجسّمة $d\Omega(\theta,\phi)$ من خلال المقطع العرضي التفاضلي:

$$d\sigma = \left| \frac{f(\theta,\phi)e^{ikr}}{r} \right|^2 r^2 dr d\Omega = \left| f(\theta,\phi) \right|^2 dr d\Omega \qquad (9)$$

وعليه فإنّه خلال الزمن dt يصبح المقطع العرضي التفاضلي بالشكل الآتي:

$$d\sigma = \left| f(\theta,\phi) \right|^2 \frac{dr}{dt} d\Omega = \left| f(\theta,\phi) \right|^2 v d\Omega \qquad (10)$$

وخلال وحدة الزمن ووحدة التدفق يأخذ المقطع العرضي التفاضليالصيغة النهائية الآتية:

$$d\sigma = \left| f(\theta,\phi) \right|^2 d\Omega \qquad (11)$$

و المقطع العرضي الكليّ :

$$\sigma = \left| f(\theta,\phi) \right|^2 d\Omega \qquad (12)$$

نشير هنا إلى أنّه في الحالات جميعها التي لها أهمية فيزيائية نجد أنّ $\sigma(\theta,\phi), f(\theta,\phi)$ تعتمدعلى θ فقط.إذا كانت كمية حركة الحزمة الواردة ،هي p وبارامتر الصدم لها ،هو b ، فإنّ كمية الحركة الزاوية كلاسيكياً حول نقطة الأصل تكون مساوية :

$$Pb \approx \hbar \ell \qquad (13)$$

حيث ℓ : العدد الكميّ المداري.

نفرض أنّ R هو نصف قطر التفاعل (بافتراض أنّ التبعثّر يحدث فقط عند اصطدام جسيم الحزمة بالهدف) فيكون شرط حدوث التبعثّر هو :

$$b \le R$$

من المعادلتين (5) و (13) نجد :

$$\ell \le kR \qquad (14)$$

نجعل طاقة الحزمة صغيرة كفاية ليتحقق الشرط :

$$kr \le 1 \qquad (15)$$

عند ذلك فإنّ التبعثر يحدث فقط عندما يكون $\ell = 0$ ، وهذا يقابل تبعثر الموجة S.

الشرط(15)، يوضّح الحدّ الكميّ الذي سوف نتناوله بشيء من التفصيل، فمن أجل الحزمة المستوية التي تتحرك في اتجاه المحور Z حاملة كمية حركة $p=\hbar k$ ، يبدو تابع حالتها في الصورة[4] :

$$u_K(r,\theta,\phi)=e^{ikz}=e^{ikr\cos\theta} \qquad (16)$$

هذه المعادلة تشتمل على كلّ مركبات كمية الحركة الزاوية حول نقطة الأصل غير أنّنا سوف نبحث عن المركبة الموافقة لـ $(\ell=0)$ ، ومن أجل ذلك ندخل الدالة الكروية (التابع الكروي) المناسبة $Y_0^0(\theta,\phi)$ ومنه نكتب :

$$u^r{}_{k,s}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int U_K(r,\theta,\phi)Y_0^0(\theta,\phi)\,d\Omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{ikr\cos o}\sin\theta\,d\theta \qquad (17)$$

حيث $Y_0^0(\theta,\phi)$ تابع كروي مناسب للموجة (S) يتعلق بـ ϕ,θ ويساوي $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ، بسهولة يمكن إجراء التكامل على ϕ، أمّا التكامل على θ فيتمّ من خلال التعويض :

$$x=\cos\theta$$

$$dx=-\sin\theta\,d\theta$$

عليه يكون :

$$U_{k,s}\ (r)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}dx=\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2ikr} \qquad (18)$$

وهذه المعادلة هي المنشورة لأنّها تصف الجزء من الحزمة الذي فيه $(\ell=0)$، الشكل التقريبي لجزء الموجة (S) في تابع الحالة هو على النحو الآتي:

$$U_s(r)\approx\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2ikr}+f\,\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (19)$$

يكمن تأثير طاقة الوضع في تغيير الموجة الخارجة فقط ،وذلك لأنّ تابع التبعثر يتكون بصفة مطلقة من الأمواج الخارجة فقط . ومن هنا فإنّ التابع الموحي المعبّر عن التبعثر فقط ،هي [5] :

$$U_S(r)\cong\frac{Se^{ikr}-e^{-ikr}}{2ikr} \qquad (20)$$

كثافة تدفق الموجة الكروية الداخلة يساوي :

$$\left|e^{-ikr}\right|^2=1 \qquad (21)$$

أمّا كثافة تدفّق الموجة الخارجة باستخدام الوحدات نفسها فيساوي :

$$\left|Se^{ikr}\right|^2 = |S|^2 \qquad (22)$$

يجب أن يتساوى هذان التدفّقان حتى يكون تابع الحالة معبّراً عن وضع منتظم،وهذا يقتضي :

$$|S|^2 = 1 \Rightarrow S = \pm 1 \qquad (23)$$

يمكن وضع S في صورة بارامتر إزاحة نرمز له δ بحيث :

$$\sqrt{S} = e^{i\delta} \qquad or \qquad S = e^{2i\delta} \qquad (24)$$

ومنه نجد :

$$U_S(r) \approx \frac{e^{2i\delta}.\ e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \qquad (25)$$

$$U_S(r) \approx \frac{e^{2i\delta}.\ e^{ikr} - e^{-ikr} + e^{ikr} - e^{ikr}}{2ikr}$$

$$= \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} + \left(\frac{e^{2i\delta} - 1}{2ik}\right)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (26)$$

بمقارنة المعادلتين (25) و (18) نجد أنّ تأثير طاقة الوضع يتجلّى في إزاحة طور الموجة الخارجة للموجة الداخلة (جزء الموجة – S من الحزمة المستوية الواردة)

لهذا السبب أطلقنا على البارامتر δ (اسم إزاحة الطور) .بالعودة إلى المعادلتين (19) و (26) نحصل على:

$$f = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta}}{k}\left(\frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i}\right) = \left(\frac{e^{i\delta} Sin\delta}{k}\right) \qquad (27)$$

وهكذا نستطيع التعبير عن تبعثر الموجة –S بدلالة إزاحة الطور δ الممثلة بعدد حقيقي بالمعادلة.

$$d\sigma = \sigma(\theta,\phi)d\Omega = \left|f(\theta,\phi)\right|^2 d\Omega$$

نجد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta) = \left|f(\theta)\right|^2 = \left|\frac{e^{i\delta} Sin\delta}{k}\right|^2 = \frac{Sin^2\delta}{k}\left|e^{i\delta}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Sin^2\delta}{k^2} \qquad (28)$$

لأنّ $\left|e^{i\delta}\right|^2 = \int e^{-i\delta}.e^{+i\delta}d\sigma = 1$ ،

أي أنّ التوزّع الزاوي يكون موحّد الخواص في الاتجاهات جميعها.

نكامل (28) فنجد :

$$\sigma_s = 4\pi \frac{Sin^2\delta}{k^2} = \pi\left(\frac{2Sin\delta}{k}\right)^2 \qquad (29)$$

وهذا يعني أنّ المقدار يعبر عن نصف القطر الفعال من الهدف .

النتائج والمناقشة:

حتى يتطابق هذا الحلّ الكميّ مع الحلّ الكلاسيكي يجب أن نختار :

$$a = \frac{2Sin\delta}{k} \Rightarrow 2Sin\delta = ka$$

أي: $Sin\delta = \frac{ka}{2} \Rightarrow Sin\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = 30^o$

لكن $Sin\delta \le 1$ هذا يعني أن : $\sigma_S \le 4\pi / k^2$

بينما لو تناولنا الحركة من خلال طاقة وضع مركزية توصف بالمعادلة :

$$\left[\frac{-h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{h^2}{2m_e} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r)\right]Y_{n,\ell}^{(r)} = E_n Y_{r,\ell}^{(r)} \qquad (30)$$

حيث : $Y_s(r) = ru_s(r)$

عندما r>a نجد أنّ الدالة Ys تحقق المعادلة :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - E\right]Y_S(r) = o \qquad ; \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad (31)$$

أو المعادلة :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right]Y_s(r) = 0 \qquad (32)$$

شرط الحدود الخاص بالكرة الصلبة : $Y_s(a) = 0$ (33)

ومنه نجد: $\delta = -ka$ (43)

وتصبح مساحة المقطع الكليّ لتبعثر الموجة (S–) مساوية :

$$\sigma_S = \frac{4\pi}{k^2} Sin^2(ka) \qquad (35)$$

ومن أجل الطاقة المنخفضة يكون ka<<1 فيمكن إلباس الجيب بالزاوية فنكتب :

$$\sigma_S = \frac{4\pi}{k^2}(ka)^2 = 4\pi a^2 \qquad (36)$$ (مقطع التبعثر الكمي)

وهو الحلّ الكميّ للمسألة المدروسة .

الاستنتاجات والتوصيات :

1-تمّ التوصّل إلى تبيان الحلّين الكلاسيكي والكمي للمقطع العرضي لتبعثر الجسيمات النقطية على هدف كروي في مجال الطاقات المنخفضة ،حيث وجدنا أنّ المقطع العرضي الكمي يساوي 4 أمثال المقطع العرضي الكلاسيكي، أي $\sigma_{qua} = 4\sigma_{cla}$

2-إنّ تأثير وضع شروط خاصة على طاقة الوضع وتوسيع الدراسة لتشمل الحالتين $r = a$, $r\langle a$ على إزالة التباين بين الحلّين الكلاسيكي والكميّ في مجال الطاقات المنخفضة ، يتطلّب المزيد من الدراسة .

المراجع:

[1] WIKIPEDIA, *Scattering Cross Section*, 10 December (2014).

[2] SEN.D,BASU,A.N. SENGUPTA .S.*The difference between the classical and quantum mechanical definition of scattering cross sections and the problem of the classical* limit.3 January (1994), vol.184(2):159-162.

[3] XU.M. R.R.Alfano (2003)."*More on patterens in Mie scattering*".Optics communications 226:1-5.

[4]ERREDE. STEVEN, *Theoretical definition of a scattering cross section*, uiuc physics 436 EM Fields and Sources II Fall Semester (2011).

[5] D.KAGANAVICH. IGOR, A.EDWARD START SER.and Ronald DAIDSON.C. Plasma physics laboratory. Princeton University, Princeton, N J 08543. *Comparison of quantum mechanical and classical of cross section*, December (2013).

[6] International Bureu of Weights and Measures (2006)
The International System of Units (SI) (8th ed.) ,pp127-28,ISBN 92-822-2213-6