مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

طرائق المؤثّرات في حلّ مسألة الحركات الصّغيرة لجملة هيدروديناميكية متبدّدة

الدكتور وديع علي*

(تاريخ الإيداع 4 / 3 / 2015. قُبِل للنشر في 14 / 4 /2015)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى استخدام بعض طرائق التحليل الدالي، وتحديداً طرائق المؤثرات في فضاء هلبرت لتحويل مسالة القيمة الحديّة الابتدائية المتعلقة بالحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية، (مجموعة من السوائل اللزجة + سائل مثالي) إلى مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى في فضاء هلبرت ، والبرهان على وجود حلّ قوي وحيد لهذه المعادلة.

الكلمات المفتاحية: جمل هيدروديناميكية ، فضاء هلبرت ، مقاربة مؤثر ، المعادلات التفاضلية في فضاء هلبرت.

*أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

Operator methods for solving the problem of small motions of a dissipative hydrodynamical system

Dr. Wadia Ali*

(Received 4 / 3 / 2015. Accepted 14 / 4 /2015)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to use some concepts of functional analysis , especially the operator methods in Hilbert space to transform the initial boundary value problem concerning the small motions of a hydrodynamical system (system of viscous fluids + ideal fluid) to Cauchy problem for the differential operator equation of first order in the Hilbert space and to prove that there is a unique strong solution for this equation.

Key Words: Hydrodynamical systems, Hilbert space, Operator methods, differential equations in Hilbert space.

***Associate professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدّمة:

اهتمّ الكثرمن الباحثين في النصف الثاني من القرن العشرين بدراسة المسائل الهيدروديناميكية ، واستخدمت في تلك الدراسات طرائق التحليل الدالي، وبشكل خاص طرائق المؤثرات . الطرائق المستخدمة في حلّ هذه المسائل موضحة في [1] .

تمّت في [2] دراسة مسألة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية مؤلفة من سائل لزج ، ومجموعة من السوائل المثالية في حيّز محدود ،وبوجود قوى الجذب المؤثرة على الجملة المدروسة. أمّا في هذا البحث فقد تمّت دراسة مسألة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية مؤلفة من مجموعة من السوائل اللزجة ،وسائل مثالي واحد، حيث تم ّتحويل مسألة القيمة الحديّة الابتدائية المتعلقة بهذه الجملة الهيدروديناميكية إلى معادلة تفاضلية مؤثراتية من المرتبة الأولى في فضاء هلبرت ،وذلك باستخدام بعض طرائق التحليل الدالي و نظرية المؤثرات، و تحديداً طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت، وبعض مسائل القيمة الحديّة المساعدة منها مسألة زاريمبا (Zaremba problem) .

أهميّة البحث وأهدافه :

يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية مؤلفة من " مجموعة من السوائل اللزجة + سائل مثالي "، غير قابلة للخلط باستخدام طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت لتحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية الموافقة لمسألة الحركات الصغيرة، إلى مسألة كوشي في فضاء هلبرت بمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ، والبرهان على وجود ووحدانية الحلّ لهذه المسألة.

تكمن أهمية البحث في تطبيقاته العملية في الكثير ح من القضايا العلمية الفيزيائية والهندسية.

طرائق البحث وموادّه:

ندرس في هذا البحث مسألة القيمة الحديّة الابتدائية الخطية لجملة هيدروديناميكية ،وذلك باستخدام طرائق التحليل الدالي، ونظرية المعادلات التفاضلية الخطية في فضاء هلبرت، و النظرية الطيفية لمؤثرات مترافقة ذاتياً التي ظهرت في الكثير من الأعمال [2-11].

المسألة المطروحة:

نفرض في حالة السكون أنّ أنبوباً ما $\left(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3\right)$ مملوءً جزئياً بـــــــــ $m+2$ (حيث m عدد طبيعي منتهي) من السوائل المتجانسة وغير القابلة للخلط.

مُلئت المناطق $\Omega_i\,(i=\overline{0,m})$ بسوائل لزجة كثافاتها $\rho_i > 0$ ومعاملات لزوجتها $\left(\mu_i\,;\mu_i = \nu\,\rho_i\right)$ ومُلئت المنطقة Ω_{m+1} بسائل مثالي كثافته ρ_{m+1} حيث $\rho_0 > \ldots\ldots > \rho_m > \rho_{m+1} > 0$.

نرمز بـــــــــ $\vec{n}_i\ (i=\overline{0,m+1})$ لمتجه الوحدة الناظمي على السطح $\partial\Omega_i\ (i=\overline{0,m+1})$ ، و S_i للقسم من جدار الأنبوب الملاصق للمنطقة $\Omega_i\,(i=\overline{0,m+1})$ ، و $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} := \partial\Omega_i \setminus \bar{S}_i$ للسطح الحرّ للسائل اللزج $i\ (i=\overline{0,m+1})$ و $\Gamma_{m+1} := \partial\Omega_{m+1} \setminus \bar{S}_{m+1}$ للسطح الحر للسائل المثالي $m+1$.

نعرّف الجملة الإحداثية $O\,x_1x_2x_3$ حيث المبدأ O متوضع على السطح Γ_0 ، واتجاه المحور $O\,x_3$ بعكس المتجه $\vec{g}$ $(\vec{g}=g\,\vec{e}_3\ ,g>0)$.

سندرس الحركات الصغيرة لهذه الجملة الهيدروديناميكية عندما يؤثر عليها حقل الجاذبية الأرضية $\vec{g}$ ، وحقل القوى الخارجية $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$، ونرمز لحقول السرع في كل سائل بـــــ $\vec{u}_i(t,x)$ ، ولحقول الضغط الحركي بـــ $p_i(t,x)$ حيث $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega_i$ و $i=\overline{0,m+1}$. عندئذٍ نأخذ جملة المعادلات المؤلفة من معادلة $Navier-Stokes$ في المنطقة $\Omega_i\,(i=\overline{0,m})$ ومعادلة $Euler$ في المنطقة Ω_{m+1} : $[2,6,7]$

$$\rho_i\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}=-\nabla p_i+\mu_i\,\Delta\vec{u}_i+\rho_i\,\vec{f}(t,x),\ \ div\,\vec{u}_i=0\quad in\,\Omega_i\left(i=\overline{0,m}\right)\tag{1}$$

$$\rho_{m+1}\frac{\partial\vec{u}_{m+1}}{\partial t}=-\nabla p_{m+1}+\rho_{m+1}\vec{f}(t,x),\ div\,\vec{u}_{m+1}=0\quad in\,\Omega_{m+1}\tag{2}$$

حيث شروط اللزوجة الحركية (من أجل السوائل اللزجة) ، و شرط عدم التسرب من أجل (السائل المثالي) محققة على الجدار الصلب للأنبوب S_i :

$$\vec{u}_i=0\quad on\,S_i\quad\left(i=\overline{0,m}\right)\tag{3}$$

$$u_n:=\vec{u}_{m+1}.\vec{n}_{m+1}\ \ on\,S_{m+1}\tag{4}$$

حيث $\vec{n}$ متجه الواحدة الناظم على $\partial\Omega$.

والشروط الحدية الحركية على السطح Γ_i هي:

$$\frac{\partial\vec{\zeta}_i}{\partial t}=\gamma_i\,\vec{u}_i:=\vec{u}_i.\vec{n}_i=\gamma_i\vec{u}_{i+1}:=\vec{u}_{i+1}.\vec{n}_i\qquad on\,\Gamma_i\tag{5}$$

$$\frac{\partial\vec{\zeta}_{m+1}}{\partial t}=\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}:=\vec{u}_{m+1}.\vec{n}_{m+1}\qquad on\,\Gamma_{m+1}\tag{6}$$

حيث تصف الدوال $\zeta_i(t,x_1,x_2)$ الانحراف على طول الشاقول $\vec{e}_3$ للسطح المتحرك $\Gamma_i(t)$ عن الوضع المتوازن الأفقي Γ_i و $i=\overline{0,m+1}$.

وشروط القيمة الحدية الديناميكية على السطح Γ_i هي:

$$\begin{aligned}&\tau_{j3}(\vec{u}_i)=0,\ j=1,2\\&-p_i+\tau_{33}(\vec{u}_i)=-p_{i+1}+\tau_{33}(\vec{u}_{i+1})+g(\Delta\rho)_i\,\vec{\zeta}_{i+1}\ \ on\ \Gamma_i\ \ ;i=\overline{0,m}\end{aligned}\tag{7}$$

حيث $\tau_{jk}:=\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}+\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\ ,j=1,2$ و $(\Delta\rho)_i:=\rho_i-\rho_{i+1}$.

$$p_{m+1}=\rho_{m+1}\,g\,\zeta_{m+1}\ \ on\,\Gamma_{m+1}\tag{8}$$

$$\int_{\Gamma_{m+1}}p_{m+1}\,d\Gamma_{m+1}=0\ ,\int_{\Gamma_i}(p_i-p_{i+1})d\Gamma_i=0\ ;i=\overline{0,m}\tag{9}$$

والشروط الابتدائية هي :

$$\vec{u}_i(0,x)=u_i^0(x)\ \ ,\ \zeta_i(0,x_1,x_2)=\zeta_i^0(x_1,x_2)\quad;i=\overline{0,m+1}\tag{10}$$

والمطلوب الآن إيجاد حلّ مسألة القيمة الحدية – الابتدائية $(1)-(10)$،أي إيجاد حقول السرعة $\vec{u}_i(t,x)$ والضغوط الديناميكية $p_i(t,x)$ والدوال $\zeta_i(t,x_1,x_2)$ ،حيث $i=\overline{0,m+1}$ من المعادلات $(1)-(9)$ عندما تتحقق الشروط الابتدائية (10).

تعريف (1): $[2]$

تدعى مجموعة الدوال القيوسة لوبيغياً $\hat{u}:=\{\vec{u}^k(x)\}_{k=1}^m$ التي تحقق العلاقة:

$$\sum_{k=1}^{m}\rho_k\int_{\Omega_k}\left|\vec{u}^k\right|^2 d\Omega_k<\infty \qquad (11)$$

بفضاء هلبرت $\hat{L}_2(\Omega)$ ، حيث الجداء الداخلي فيه معرف بالعلاقة:

$$\left(\hat{u},\hat{v}\right)_{\hat{L}_2(\Omega)}:=\sum_{k=1}^{m}\rho_k\int_{\Omega_k}\vec{u}^k\,\vec{v}^k\,d\Omega_k \qquad (12)$$

تعريف (2): $[1,3]$

يقال للمؤثر A ذي الساحة الكثيفة في فضاء هلبرت E إنّه متبدد إذا تحققت المتراجحة الآتية:

$$\operatorname{Re}\left(Ax,x\right)\le 0 \qquad \left(x\in D(A)\right)$$

ويقال عنه إنّه متبدد أعظمياً (Maximal dissipative)W إذا كان متبدداً ولا يوجد له ممدد متبدد، ويلزم لذلك أن يكون A مغلقاً ،وأن تتحقق المتراجحة الآتية:

خاصة (1): $[4]$

لتكن Ω منطقة ليبشتز (انظر الفقرة 7.2.1 من$[3]$) وبفرض أن هذه المنطقة مقسمة إلى Ω_k منطقة جزئية

و $\partial\Omega_k$ (حد المنطقة Ω_k، $k=\overline{1,m}$). عندئذٍ يكون:

$$\hat{L}_2(\Omega):=\hat{G}_{0,\Gamma}\oplus\hat{J}_{0,S}(\Omega) \qquad (13)$$

حيث:

$$\hat{G}_{o,\Gamma}:=\overset{m}{\underset{i=0}{\oplus}}\vec{G}_{0,\Gamma_i}=\Big\{\hat{w}:=\{\vec{w}^i\}_{i=1}^m\in\vec{L}_2(\Omega_i);\{\vec{w}^i\}_{i=1}^m=\{\nabla\vec{\varphi}^i\}_{i=1}^m:$$
$$\vec{\varphi}^i-\vec{\varphi}^{i+1}=0\ \left(on\,\Gamma_i\right)\Big\}$$

$$\hat{J}_{0,S}(\Omega):=\overset{m}{\underset{i=0}{\oplus}}\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i)=\Big\{\hat{v}:=\{\vec{v}^i\}_{i=1}^m\in\vec{L}_2(\Omega_i);div\,\vec{v}^i=0\ (in\,\Omega_i):$$
$$(\vec{v}^i)_n=0\ \left(on\,S_i\right)\Big\}$$

خاصة (2): $[5]$

يمكن كتابة الفضاء $\hat{L}_2(\Omega)$ كمجموع مباشر لفضاءات جزئية متعامدة:

$$\hat{L}_2(\Omega):=\hat{J}_0(\Omega)\oplus\hat{G}_{h,s}\oplus\hat{G}_{0,\Gamma} \qquad (14)$$

حيث

$$\hat{J}_0(\Omega):=\overset{m}{\underset{i=0}{\oplus}}\vec{J}_0(\Omega_i):=\left\{\hat{w}=\{\vec{w}_i(x)\}_{i=0}^m\in\hat{L}_2(\Omega):div\,\vec{w}_i=0\ (in\,\Omega_i),\vec{w}_i.\vec{n}=0\ \ (on\,\partial\Omega_i)\right\}$$

$$\hat{G}_{h,S}(\Omega):=\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}}\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i):=\{\hat{v}=\{\vec{v}_i(x)\}_{i=1}^m\in\hat{L}_2(\Omega):\vec{v}_i=\nabla\vec{\varphi}_i,\Delta\vec{\varphi}_i=0\ (in\,\Omega_i),$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}_i}{\partial\vec{n}_i}=0\ (on\,S_i),i=\overline{0,m},\frac{\partial\vec{\varphi}_i}{\partial\vec{n}_i}=\frac{\partial\vec{\varphi}_{i+1}}{\partial\vec{n}_{i+1}}\ (on\Gamma_i),\int_{\Gamma_i}(\rho_i\vec{\varphi}_i-\rho_{i+1}\vec{\varphi}_{i+1})d\Gamma_i=0,i=\overline{1,m-1}\}$$

النتائج والمناقشة:

الانتقال إلى مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية مؤثراتية من المرتبة الأولى:

لنضع $\hat{u}:=\hat{u}(t,x)=\left\{\vec{u}_i(t,x)\right\}_{i=0}^m\ ,\ \nabla_\rho p:=\left(\nabla_\rho p\right)(t,x)=\left\{\rho_i^{-1}\nabla p_i\right\}_{i=0}^m$

ونعتبر $\hat{u}$ و $\nabla_\rho p$ عنصرين من فضاء هلبرت $\hat{L}_2(\Omega):=\bigoplus_{i=0}^m\vec{L}_2(\Omega_i)$.

عندئذٍ يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}=-\nabla_{\rho_1}p+\nu\left(\Delta u\right)+\hat{f}, \tag{15}$$

حيث $\hat{f}:=\left\{\vec{f}\,|_{\Omega_i}\right\}_{i=0}^m$.

ينتج من المعادلة (1) والشروط الحدية $(3),(6),(7)$ ومن تعريف المنشور المتعامد (14) أنّ :

$$\hat{u}\in\hat{J}_{0,S}(\Omega)\ ,\ \left(\nabla_\rho p\right)(t,x)\in\hat{G}(\Omega):=\hat{G}_{h,S}(\Omega)\oplus\hat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \tag{16}$$

ومنه نجد أنّ $\nabla_\rho p$ يمكن كتابتها بالشكل:

$$\nabla_\rho p=\nabla_\rho\tilde{p}_1+\nabla_\rho\varphi\ ;\ \nabla_\rho\tilde{p}_1=\left\{\rho_i^{-1}\nabla\tilde{p}_1^i\right\}_{i=0}^m\ ,\ \nabla_\rho\varphi=\left\{\rho_i^{-1}\nabla\varphi_i\right\}_{i=0}^m \tag{17}$$

نطبق مؤثري الإسقاط العمودي $\hat{P}_{0,S}=diag\left\{\hat{P}_{0,S_i}\right\}_{k=0}^m\ ,\ \hat{P}_{0,\Gamma}=diag\left\{\hat{P}_{0,\Gamma_i}\right\}_{i=0}^m$ على الفضاءين الجزئيين $\hat{J}_{0,S}(\Omega)\ ,\ \hat{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ ، فنحصل على العلاقتين الآتيتين:

$$\rho_i\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}=-\nabla\tilde{p}_i+\mu_i P_{0,S_i}\left(\Delta\vec{u}\right)+P_{0,S_i}f\qquad\left(in\,\Omega_i\,,\,i=\overline{0,m}\right) \tag{18}$$

$$0=-\nabla_\rho\varphi+\nu\hat{P}_{0,\Gamma}\left(\Delta\vec{u}_i\right)+\hat{P}_{0,\Gamma}\hat{f} \tag{19}$$

من الواضح أنّه يمكن الحصول على الحقل $\nabla_\rho\tilde{p}_1$ من $\hat{f}\ ,\ \hat{u}(t,x)$ ، لذلك يكفي أن ندرس المعادلة (12).

من تعريف المنشور المتعامد (14) نرى أنّ:

$$\vec{u}_{m+1}\in\vec{J}_{m+1}(\Omega_{m+1})\oplus\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})\ ,\ \nabla p_{m+1}\in\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})\oplus\vec{G}_{0,\Gamma_{m+1}}(\Omega_{m+1})$$

و يمكن أن نضع:

$$\vec{u}_{m+1}=\vec{w}_{m+1}+\nabla\Phi\ ,\vec{w}_{m+1}\in\vec{J}_0(\Omega_{m+1})\ \ ,\nabla\Phi\in\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})$$

$$\nabla p_{m+1}=\nabla\tilde{p}_{m+1}+\nabla k\ \ ,\nabla\tilde{p}_{m+1}\in\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})\ ,\ \nabla k\in\vec{G}_{0,\Gamma_m}(\Omega_{m+1})\ .$$

بإسقاط المعادلة (2) على المنشور المتعامد (14) بوساطة مؤثرات الإسقاط العمودي $P_{0,m+1}, P_{h,S_{m+1}}, P_{\Gamma_m}$ على $\vec{J}_0(\Omega_{m+1}), \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1}), \vec{G}_{0,\Gamma_m}(\Omega_m)$ على الترتيب نحصل على المعادلات الآتية:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{w}_{m+1}}{\partial t} = P_{0,m+1} f\ (t,x)\ , \\
&\rho_{m+1}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = -\nabla\tilde{p}_{m+1} + \rho_{m+1}P_{h,S_{m+1}} f\ , \\
&0 = -\nabla k + \rho_{m+1}P_{0,\Gamma_m} f\ .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

من الواضح أنّه يمكن الحصول على الحقلين $\nabla k\ , \vec{w}_{m+1}$ من حقل القوى $\vec{f}(t,x)$ ، لذلك يكفي أن ندرس المعادلة الثانية من (20) .

بعد الإسقاط يمكن صياغة مسألة القيمة الحديّة الابتدائية (1)−(10) بالشكل الآتي:

$$
\begin{aligned}
&\rho_i\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = -\nabla\tilde{p}_i + \mu_i P_{0,S_i}(\Delta\vec{u}) + P_{0,S_i} f \qquad \left(in\ \Omega_i\,,\ i=\overline{0,m}\right), \\
&\rho_{m+1}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = -\nabla\tilde{p}_{m+1} + \rho_{m+1}P_{h,S_{m+1}} f\ , \qquad \Delta\Phi = 0\ \ in\ \Omega_{m+1}\,, \\
&\vec{u}_i = 0 \quad on\ S_i\ , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} = 0 \quad on\ S_{m+1}\,, \\
&\frac{\partial\vec{\zeta}_i}{\partial t} = \vec{u}_i.\vec{n}_i = \vec{u}_{i+1}.\vec{n}_i = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}_i}\ \ on\ \Gamma_i\ , \quad \frac{\partial\vec{\zeta}_{m+1}}{\partial t} = \vec{u}_{m+1}.\vec{n}_{m+1} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}_{m+1}}\ \ on\ \Gamma_{m+1}\ , \\
&\tau_{j3}(\vec{u}_i) - \tau_{j3}(\vec{u}_{i+1}) = 0,\ j=1,2, \\
&\tau_{33}(\vec{u}_i) - \tau_{33}(\vec{u}_{i+1}) + \tilde{p}_i - \tilde{p}_{i+1} - \mathrm{g}(\Delta\rho)_i\,\vec{\zeta}_i = 0\ \ on\ \Gamma_i\,, i=\overline{0,m} \\
&\tilde{p}_{m+1} = \rho_{m+1}\,\mathrm{g}\,\zeta_{m+1}\ \ on\ \Gamma_{m+1}\ , \\
&\int_{\Gamma_i}\vec{\zeta}_i\ d\Gamma_i = 0,\ \int_{\Gamma_{m+1}}\vec{\zeta}_{m+1}\ d\Gamma_{m+1} = 0,\ \int_{\Gamma_{m+1}}\tilde{p}_{m+1}d\Gamma_{m+1} = 0\ ,\ \int_{\Gamma_i}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_{i+1})d\Gamma_i = 0\ , \\
&\vec{u}_i(0,x) = u_i^0(x)\ ,\ \zeta_i(0,x_1,x_2) = \zeta_i^0(x_1,x_2) \qquad ; i=\overline{0,m} \\
&\vec{u}_{m+1}(0,x) = \nabla\Phi(0,x) = \left(P_{h,S_{m+1}}u_{m+1}^0\right)(x)\ ,\ \zeta_{m+1}(0,x_1,x_2) = \zeta_{m+1}^0(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

من أجل تحويل المسألة (21) إلى مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى نحتاج إلى المسائل الحدية المساعدة الآتية:

المسألة الحدية (I):[4]

$$-\mu_i P_{0,S_i}\Delta\vec{u}_i+\nabla\varphi_i^1:=\mu_i\left(Au\right)_i=\eta:=\left(-\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}-\nabla\varphi_i^2+P_{0,S_i}\vec{f}\right)$$
$$div\,\vec{u}_i=0\ in\ \Omega_i\ ,\qquad \vec{u}_i=0\ on\ S_i\ , \qquad (22)$$
$$\tau_{j,3}\left(\vec{u}_i\right)-\tau_{j,3}\left(\vec{u}_{i+1}\right)=0,\quad j=1,2\ ,\ i=\overline{0,m-1}$$
$$-\varphi^1{}_i+2\mu_i\tau_{33}\left(\vec{u}_i\right)=-\varphi^1{}_{i+1}+2\mu_{i+1}\tau_{33}\left(\vec{u}_{i+1}\right)\ on\ \Gamma_i\ \ ,\ i=\overline{0,m-1}$$

تمهيدية $(1):[3]$

من أجل كل $\eta\in\vec{J}_{0,S_i}\left(\Omega_i\right)$ يكون للمسألة (22) حلاً عاماً وحيداً $\vec{u}_i\in D\left(A_i\right)\subset\vec{J}_{0,S_i}\left(\Omega_i\right)$ حيث

$$\mu_i\vec{u}_i=A_i^{-1}\eta:=\left(-\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}-\nabla\varphi_i^2+P_{0,S_i}\vec{f}\right). \qquad (23)$$

والمؤثر A_i غير محدود وموجب .

المسألة الحدية $(\mathrm{II}):[1,4]$

$$\Delta\varphi_i^2=0\ in\ \ \Omega_i\ \ ,\qquad \frac{\partial\varphi_i^2}{\partial n}=0\ on\ S_i\ \ ,\ i=\overline{0,m}$$
$$\varphi_i^2=\psi:=\varphi_{i+1}^2+\mathrm{g}\left(\Delta\rho\right)_i\vec{\zeta}_i\quad on\ \Gamma_i\ ,\left(i=\overline{0,m-1}\right) \qquad (24)$$
$$\varphi_m^2=\psi:=\tilde{p}_{m+1}+\mathrm{g}\left(\Delta\rho\right)_m\vec{\zeta}_m\quad on\ \Gamma_m$$

واضح أنّه بتحقق العلاقتين (22) , (24) تتحقق المعادلة (18)، والشروط الحديّة الموافقة من أجل الدوال $\vec{u}_i\left(t,x\right)$, $p_i\left(t,x\right)$, $\zeta_i\left(t,x\right)$; $\left(i=0,m\ \right)$.

يمكن الاستعاضة عن المسألة (24) بالعلاقة:

$$\nu A\hat{u}=\hat{\psi} \qquad (25)$$

حيث A مؤثر معرّف على $D\left(A\right)\subset\hat{J}_{0,S}^1\left(\Omega\right)\subset\hat{J}_{0,S}\left(\Omega\right)$ ، وغير محدود ومترافق ذاتياً ، وموجب محدد وله مؤثر عكسي A^{-1} و $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\subset\hat{J}_{0,S}^1\left(\Omega\right)$.

إذا كان $\hat{\psi}\in\hat{J}_{0,S}\left(\Omega\right)$ فإنّ للمسألة (24) حلاً من الشكل:

$$\nu\hat{u}=A^{-1}\hat{\psi}\in D\left(A\right)\subset\hat{J}_{0,S}\left(\Omega\right) \qquad (26)$$

تمهيدية $(2):[4]$

من أجل كلّ $\psi\in H_{\Gamma_i}^{1/2}$ يكون للمسألة(24) حلّ عامٌّ وحيد $\varphi_i{}^2\left(x\right)\in\vec{H}_i\left(\Omega_i\right)$ حيث

$$\nabla\varphi^2{}_i:=G_i\psi=G_i\left(\nabla\varphi^2{}_{i+1}+\mathrm{g}\left(\Delta\rho\right)_i\vec{\zeta}_i\right)\ ,i=\overline{0,m-1}$$
$$\nabla\varphi^2{}_m:=G_m\psi=G_m\left(\tilde{p}_{m+1}+\mathrm{g}\left(\Delta\rho\right)_m\vec{\zeta}_m\right) \qquad (27)$$

والمؤثر $G_i:\vec{H}_{\Gamma_i}^{1/2}\to\vec{G}_{h,S_i}\left(\Omega_i\right)$ إيزومتري ومحدود.

باستخدام المؤثرات A_i , G_i والمسألتين المساعدتين (I) , (II)، يمكننا كتابة المعادلات والشروط الحدية التي تحوي الدوال $\vec{u}_i\left(t,x\right)$, $\tilde{p}_i=\varphi_i^1+\varphi_i^2$, $i=\overline{0,m}$ بالشكل الآتي:

$$\mu_i\,\vec{u}_i=A_i^{-1}\vec{\eta}=A_i^{-1}\left(-\rho_i\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}+\rho_i P_{0,S_i}\vec{f}-G_m\left(\tilde{p}_{m+1}+\mathrm{g}\left(\Delta\rho\right)_m\vec{\zeta}_m\right)\right) \qquad (28)$$

المسألة الحدية $(\text{III}):[4]$

$$\Delta\Phi_1 = 0 \ in \ \Omega_{m+1} \ , \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \ on \ S_{m+1} ,$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{m+1}} = 0 \ on \ \Gamma_{m+1} , \tag{29}$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{m+1}} = \eta_1 := \vec{u}_m . \vec{n}_m = \vec{u}_{m+1} . \vec{n}_m \qquad on \ \Gamma_m \ , \qquad \int_{\Gamma_{n_m}} \Phi_1 \, d\Gamma_{n_m} = 0 \ .$$

المسألة الحدية $(\text{IV}):[1,4]$

$$\Delta\Phi_2 = 0 \ in \ \Omega_{m+1} \ , \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \ on \ S_{m+1} ,$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_m} = 0 \ on \ \Gamma_m \ , \tag{30}$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_{m+1}} = \eta_2 := \vec{u}_{m+1} . \vec{n}_{m+1} \qquad on \ \Gamma_{m+1} , \qquad \int_{\Gamma_{m+1}} \Phi_2 \, d\Gamma_{m+1} = 0 \ .$$

تمهيدية $(3):[4]$

1. من أجل كل $\eta_1 \in \vec{H}^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_m}(\Omega_m)$ يكون للمسألة (III) حلّ عام وحيد $\Phi_1 \in \vec{H}^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_m}(\Omega_m)$.
2. من أجل كل $\eta_2 \in \vec{H}^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_{m+1}}(\Omega_{m+1})$ يكون للمسألة (IV) حلّ عام وحيد $\Phi_2 \in \vec{H}^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_{m+1}}(\Omega_{m+1})$.

من أجل هذه الحلول ، نعرّف المؤثرات C_{ik} كماياتي:

$$\Phi_1 |_{\Gamma_m} =: -C_{11}\eta_1 , \qquad \Phi_1 |_{\Gamma_{m+1}} =: -C_{21}\eta_1 \ ,$$
$$\Phi_2 |_{\Gamma_m} =: -C_{12}\eta_2 , \qquad \Phi_2 |_{\Gamma_{m+1}} =: -C_{22}\eta_2 \ . \tag{31}$$

في المسألة (21)، ينتج من معادلة أولر في المنطقة (Ω_{m+1}) أنّ تكامل كوشي – لاغرانج الآتي محقق، أي أن:

$$\tilde{p}_{m+1} + \rho_{m+1}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho_{m+1}\psi_f = c(t) \tag{32}$$

حيث $\psi_f := \nabla\left(P_{0,S_{m+1}}\vec{f}\right)$.

نجد من العلاقتين $(31),(32)$ أنّ الشرط الحدي $\tilde{p}_{m+1} = \rho_{m+1} \mathrm{g} \vec{\zeta}_{m+1}$ يكتب بالشكل:

$$-\rho_{m+1}\frac{\partial}{\partial t}(C_{21}\gamma_m \vec{u}_m + C_{22}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}) + \rho_{m+1}\psi_f + c(t) = \rho_{m+1}\mathrm{g}\vec{\zeta}_{m+1} \qquad on \ \Gamma_{m+1} \tag{33}$$

نصوغ الآن مسألة زاريمبا المشابهة للمسألة (II):

المسألة الحدية $(\text{V}):[1,3]$

$$\Delta\Psi = 0 \;\; in \;\; \Omega_{m+1} \;\; , \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \;\; on \;\; S_{m+1} \;\; , \; \frac{\partial \Psi}{\partial n_m} = 0 \;\; on \;\; \Gamma_{m+1}$$

$$\Psi = \psi := \mathrm{g}\rho_{m+1}\vec{\zeta}_{m+1} \quad on \; \Gamma_{m+1} \tag{34}$$

تمهيدية (4): $[3]$

من أجل كل $\vec{\psi} \in \vec{H}^{1/2}_{\Gamma_{m+1}}$ يوجد للمسألة (V) حل عام وحيد $\Psi(x) \in \vec{H}^1(\Omega_{m+1})$ حيث:

$$\nabla\Psi =: G_{m+1}\psi = G_{m+1}\left(\mathrm{g}\rho_{m+1}\vec{\zeta}_{m+1}\right) = G_{m+1}\left(-\rho_{m+1}\frac{\partial}{\partial t}(C_{21}\gamma_m\vec{u}_m + C_{22}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}) + \rho_{m+1}\psi_f\right) \tag{35}$$

استناداً إلى العلاقتين(28), (35) والمسائل الحدية (I)–(V) والمؤثرات الموافقة لها، نجد أنّ حلول المسألة (21) تحقق جملة المعادلات:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\rho_i\vec{u}_i + \rho_{m+1}(G_iC_{11}\gamma_m\vec{u}_m + G_iC_{12}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1})\right) + \mu_iA_i\vec{u}_1 + G_i\left(\mathrm{g}(\Delta\rho)_i\,\vec{\zeta}_i\right) = \\
&= \rho_{m+1}G_i\psi_f + \rho_iP_{0,S_i}\vec{f} \;, \\
&\frac{d}{dt}\left(\rho_{m+1}(G_{m+1}C_{21}\gamma_m\vec{u}_m + G_{m+1}C_{22}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1})\right) + \mathrm{g}\rho_{m+1}G_{m+1}\vec{\zeta}_{m+1} = \rho_{m+1}G_{m+1}\psi_f \;, \\
&\frac{d}{dt}\left(\mathrm{g}(\Delta\rho)_i\,\vec{\zeta}_i\right) - \mathrm{g}(\Delta\rho)_i\,\gamma_i\vec{u}_i = 0 \;, \quad i = \overline{0,m} \\
&\frac{d}{dt}\left(\mathrm{g}\rho_{m+1}\vec{\zeta}_{m+1}\right) - \mathrm{g}\rho_{m+1}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1} = 0 \;, \\
&\vec{u}_i\,(0,x) = \vec{u}_i^{\,0}(x), \vec{u}_{m+1}(0,x) = \nabla\Phi(0,x) = \left(P_{h,S_{m+1}}\vec{u}^{\,0}_{m+1}\right)(x) \;, \; i = \overline{0,m} \\
&\vec{\zeta}_i\,(0,x_1,x_2) = \vec{\zeta}_i^{\,0}(x_1,x_2) \;, \; \vec{\zeta}_{m+1}(0,x_1,x_2) = \vec{\zeta}^{\,0}_{m+1}(x_1,x_2) \;.
\end{aligned} \tag{36}$$

نستطيع أن نكتب المعادلتين الأولى والثانية في الجملة (36) بالشكل:

$$C\,\frac{d\,\hat{u}}{d\,t} + \left(\mu A\right)\hat{u} + \mathrm{g}V_1\,\hat{\zeta} = \hat{f} \;\; ; \hat{u} := \left(\vec{u}_0, \ldots\ldots, \vec{u}_{m+1}\right)^t \;\; , \hat{\zeta} := \left(\zeta_0, \ldots\ldots, \zeta_{m+1}\right)^t \tag{37}$$

حيث
$$\mu A := diag\,\left(\mu_0A_0, \ldots\ldots, \mu_mA_m \;, 0\right)$$

$$C = \begin{pmatrix}
\rho_1 I & 0I & \ldots\ldots\ldots\ldots & \rho_{m+1}G_1C_{11}\gamma_m\vec{u}_m & \rho_{m+1}G_1C_{11}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1} \\
0I & \rho_2 I & 0I\ldots\ldots\ldots\ldots & \rho_{m+1}G_2C_{11}\gamma_m\vec{u}_m & \rho_{m+1}G_2C_{11}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0I & 0I & \ldots\ldots\ldots\ldots & \rho_m I + \rho_{m+1}G_2C_{11}\gamma_m\vec{u}_m & \rho_{m+1}G_2C_{11}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1} \\
0I & 0I & \ldots\ldots\ldots\ldots & \rho_{m+1}G_{m+1}C_{21}\gamma_m\vec{u}_m & \rho_{m+1}(I + G_{m+1}C_{22}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1})
\end{pmatrix}$$

$$V_1=\begin{pmatrix}(\Delta\rho)_0 G_0 & 0 & \dots\dots\dots & 0\\ 0 & (\Delta\rho)_1 G_1 & \dots\dots\dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0\\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & \rho_{m+1}G_{m+1}\end{pmatrix},\ \hat{f}=\begin{pmatrix}\rho_{m+1}G_0\psi_f+P_{0,S_0}f\\ \rho_{m+1}G_1\psi_f+P_{0,S_1}f\\ \vdots\\ \rho_{m+1}G_{m+1}\psi_f\end{pmatrix}$$

و المعادلتين الثالثة والرابعة بالشكل:

$$\mathrm{g}B\,\frac{d\,\hat{\zeta}}{d\,t}+\mathrm{g}V_2\,\hat{u}=0 \qquad (38)$$

$$B:=diag\left((\Delta\rho)_0 I_{\Gamma_0},\dots\dots,(\Delta\rho)_m I_{\Gamma_m},\rho_{m+1}I_{\Gamma_{m+1}}\right)$$

$$V_2:=-diag\left((\Delta\rho)_0\gamma_0,\dots\dots,(\Delta\rho)_m\gamma_m,\rho_{m+1}\gamma_{m+1}\right)$$

حيث يمكننا كتابة المعادلتين (37) , (38) بالشكل:

$$\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & \mathrm{g}B\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{\zeta}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu\tilde{A} & \mathrm{g}V_1\\ \mathrm{g}V_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{\zeta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{f}\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\hat{u}(0)\\ \zeta(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}^0\\ \hat{\zeta}^0\end{pmatrix}, \qquad (39)$$

أو بالشكل :

$$\mathcal{T}\frac{dy}{dt}=-\mathcal{A}y+f(t)\,,\qquad y(0)=y^0\,; \qquad (40)$$

$$\mathcal{T}:=\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & \mathrm{g}B\end{pmatrix},\ \mathcal{A}:=\begin{pmatrix}\mu\tilde{A} & \mathrm{g}V_1\\ \mathrm{g}V_2 & 0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\zeta}\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}f_1\\ 0\end{pmatrix}$$

حيث $y:=\left(\hat{u},\hat{\zeta}\right)^t$ من فضاء هلبرت:

$$\tilde{H}:=\hat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{G}_{h,S_{m+1}}\left(\Omega_{m+1}\right)\oplus\hat{H}\;; \qquad (41)$$

حيث $\hat{J}_{0,S}(\Omega):=\bigoplus_{i=0}^{m}\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i)\,,\ \hat{H}:=\bigoplus_{i=0}^{m+1}\left\{\vec{L}_2\left(\Gamma_i\right)\ominus\{1_i\}\right\}$.

استناداً إل ما سبق نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة (1):

المسألة الحدية – الابتدائية $(1)-(10)$ تكافئ تماماً مسألة كوشي (40) في فضاء هلبرت $\tilde{H}$.

تعريف (2):

نقول إنّ لمسألة كوشي (40) حلاً قوياً وحيداً معرفاً على $[0,T]$ ويأخذ قيمه في فضاء هلبرت $\tilde{H}$

المعرف بالعلاقة (41) إذا تحقق الآتي من الشروط:

1) $y(t)\in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}y(t)\in C([0,T];\tilde{H})$ من أجل كل $t\in[0,T]$.

2) $\frac{dy}{dt}\in C([0,T];\tilde{H})$.

3) تتحقق المعادلة (40) والشروط الابتدائية من أجل أي $t\in[0,T]$.

نعرض فيما يأتي المبرهنات التي أثبتناها التي تبيّن خواص المؤثرات الواردة في المعادلة (39):

مبرهنة (1):

المؤثران $\gamma_0:\vec{G}_{h,S_0}(\Omega_0)\to\vec{H}_{\Gamma_0}^{-1/2}$, $G_0:\vec{H}_{\Gamma_0}^{1/2}\to\vec{G}_{h,S_0}(\Omega_0)$ مترافقان تبادلياً.

البرهان:

بفرض أنّ $\vec{v}=\nabla\vec{w}\in\vec{G}_{h,S_0}(\Omega_0)$ و $\psi\in\vec{H}_{\Gamma_0}^{1/2}$ حيث $G_0\psi=\nabla\varphi_2$ و φ_2 حل للمسألة الحدية المساعدة الثانية ، عندئذٍ $\Delta\vec{w}=0(in\ \Omega_0)$, $\frac{\partial\vec{w}}{\partial n}=0\ (on\ S_0)$.

من صيغة غرين من أجل مؤثر لابلاس ، نجد أنّ:

$$(G_0\psi,\vec{v})_{\vec{G}_{h,S_0}(\Omega_0)}=(\nabla\varphi_2,\vec{v})_{\vec{G}_{h,S_0}(\Omega_0)}=(\psi,\gamma_0\vec{v})_{\vec{L}_2(\Gamma_0)}\qquad(42)$$

من أجل كل $\psi\in\vec{H}_{\Gamma_0}^{1/2}$، $\vec{v}\in\vec{G}_{h,S_0}(\Omega_0)$ ، وبذلك يتم المطلوب.

بشكل مشابه نبرهن أنّ المؤثرين $\gamma_i:\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i)\to\vec{H}_{\Gamma_i}^{-1/2}$, $G_i:\vec{H}_{\Gamma_i}^{1/2}\to\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i)$; $i=\overline{1,m+1}$ مترافقان أي أنّ $G_i=(\gamma_i)^*$.

مبرهنة (2):

المؤثر C محدود وغير سالب ويؤثر في فضاء هلبرت الحقيقي $\hat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})$.

البرهان:

لكي يكون المؤثر C محدوداً يكفي أن نبرهن أنّ المؤثرات $G_iC_{11}\gamma_m$، $G_iC_{12}\gamma_{m+1}$ ، $G_{m+1}C_{21}\gamma_m$ ، $G_{m+1}C_{22}\gamma_{m+1}$ محدودة لكون المؤثر المطابق I_1 محدود .

من أجل أي $\vec{u}_{m+1}=\nabla\Phi\in\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})$ نجد أنّ $\eta_2:=\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}=\partial\Phi_{m+1}/\partial n_{m+1}\in\vec{H}_{\Gamma_{m+1}}^{-1/2}$، واستناداً إلى المسألة الحدية المساعدة (1)يكون $\Phi_2\in\vec{H}_{\Gamma_{m+1}}^{1}(\Omega_{m+1})$ $C_{12}\vec{\eta}_2=C_{12}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}=-\Phi_2|_{\Gamma_m}\in\vec{H}^{1/2}(\Omega_m)$.

الآن و من أجل $\psi=C_{12}\vec{\eta}_2$ يكون حل المسألة الحدية الثانية $G_i\psi=G_iC_{12}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}\in\vec{G}_{h,S_m}(\Omega_m)$.

استناداً إلى التمهيدية (2) يكون المؤثر $G_iC_{12}\gamma_{m+1}$ محدوداً في $\vec{G}_{h,S_m}(\Omega_m)$، وبشكل مشابه نبرهن أنّ المؤثرات $G_iC_{11}\gamma_m$ ، $G_{m+1}C_{21}\gamma_m$ ، $G_{m+1}C_{22}\gamma_{m+1}$ محدودة.

والآن لنبرهن أنّ المؤثر C موجب ،أي أنّ $(Cu,u)\geq 0$ من أجل أي $\hat{u}\in\hat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1})$.

لدينا:

$$\left(C\,\hat{u},\hat{u}\right)=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\int_{\Omega_i}\left|\vec{u}_i\right|^2 d\Omega_i\ +$$

$$+\rho_{m+1}\left\{\sum_{i=0}^{m}\left\{\int_{\Omega_1}(G_iC_{11}\gamma_m\vec{u}_m)\,\vec{u}_i\,d\Omega_i+\int_{\Omega_i}(G_iC_{12}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1})\,\vec{u}_i\,d\Omega_i\right\}+\right.$$

$$\left.+\int_{\Omega_{m+1}}(G_{m+1}C_{21}\gamma_m\vec{u}_m)\,\vec{u}_{m+1}\,d\Omega_{m+1}+\int_{\Omega_{m+1}}(G_{m+1}C_{22}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1})\,\vec{u}_{m+1}\,d\Omega_{m+1}\right\}=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\int_{\Omega_i}\left|\vec{u}_i\right|^2 d\Omega_i\ +\rho_{m+1}\left\{\sum_{i=0}^{m}\left\{\int_{\Omega_1}(C_{11}\gamma_m\,\vec{u}_m).\overline{\gamma_i\vec{u}_i}\,d\,\Omega_i+\int_{\Omega_i}(C_{12}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}).\overline{\gamma_i\,\vec{u}_i}\,d\Omega_i\right\}\right.$$

$$\left.+\int_{\Omega_{m+1}}(C_{21}\gamma_m\,\vec{u}_m).\overline{\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}}\,d\,\Omega_{m+1}+\int_{\Omega_{m+1}}(C_{22}\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}).\overline{\gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1}}\,d\Omega_{m+1}\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\int_{\Omega_i}\left|\vec{u}_i\right|^2 d\Omega_i\ +\rho_{m+1}\left\{\sum_{i=0}^{m}\left\{-\int_{\Gamma_i}\Phi_1\overline{\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_i}}d\,\Gamma_i-\int_{\Gamma_i}\Phi_2\overline{\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_i}}d\,\Gamma_i\right\}\right.$$

$$\left.-\int_{\Gamma_{m+1}}\Phi_1\overline{\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_{\ m+1}}}d\,\Gamma_{m+1}-\int_{\Gamma_{m+1}}\Phi_2\overline{\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_{\ m+1}}}d\,\Gamma_{m+1}\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\int_{\Omega_i}\left|\vec{u}_i\right|^2 d\Omega_i\ +\rho_{m+1}\int_{\partial\Omega_{m+1}}(\Phi_1+\Phi_2)\overline{\frac{\partial}{\partial n}(\Phi_1+\Phi_2)}\,dS_{m+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\int_{\Omega_i}\left|\vec{u}_i\right|^2 d\Omega_i\ +\rho_{m+1}\int_{\Omega_{m+1}}\left|\nabla\Phi\right|^2 d\,\Omega_{m+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\rho_i\int_{\Omega_i}\left|\vec{u}_i\right|^2 d\Omega_i+\rho_2\int_{\Omega_2}\left|\vec{u}_2\right|^2 d\,\Omega_2\quad,\qquad \vec{u}_2=\nabla\Phi. \qquad (43)$$

ينتج مباشرةً من هذه المبرهنة أنّ المؤثر C قابل للعكس ومعكوسه موجب ومحدود.

مبرهنة (3):

المؤثر B محدود وموجب ويؤثر في فضاء هلبرت $\hat{H}$، حيث $\hat{H}:=\bigoplus_{i=0}^{m+1}\left\{\vec{L}_2\left(\Gamma_i\right)\ominus\left\{1_i\right\}\right\}$.

البرهان:

يتضح مباشرةً من تعريف المؤثر B أنّه محدود لكون المؤثر المطابق $I_{\Gamma_i}\ \left(i=\overline{0,m+1}\right)$ محدوداً دوماً.

ولكون الصيغة التربيعية

$$\left(gB\hat{\zeta},\hat{\zeta}\right)_{\hat{H}}=g\left(\sum_{i=0}^{m}(\Delta\rho)_i\int_{\Gamma_1}\left|\vec{\zeta}_i\right|^2 d\,\Gamma_i+\rho_{m+1}\int_{\Gamma_{m+1}}\left|\vec{\zeta}_{m+1}\right|^2 d\,\Gamma_{m+1}\right)\geq 0 \qquad (44)$$

نجد أن B موجب.

استناداً إلى ما سبق وتعريف المؤثرين V_1,V_2 نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة (2):

إنّ $V_1=-\left(V_2\right)^*$ حيث $V_1:\hat{H}_{\Gamma}^{1/2}:=\bigoplus_{i=0}^{m+1}\vec{H}_{\Gamma_i}^{1/2}\rightarrow\hat{G}_{h,S}\left(\Omega\right),V_2:\hat{G}_{h,S}\left(\Omega\right)\rightarrow\hat{H}_{\Gamma}^{-1/2}$;

$$\hat{G}_{h,S}(\Omega) := \bigoplus_{i=0}^{m+1} G_{h,S_i}(\Omega_i) = \Big\{ \hat{u} := (\vec{u}_0, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{u}_{m+1})^t : \{\vec{u}_i\}_{i=0}^{m} \in \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i), \\ \vec{u}_{m+1} \in \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_2), \gamma_i \vec{u}_i = \gamma_i \vec{u}_{i+1}, i = \overline{0,m} \Big\}$$

مبرهنة (4):

إذا كانت $y^0 \in D(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0,T]; \tilde{H})$ فإنّ لمسألة كوشي (40) حلاً قوياً $y(t)$ في فضاء هلبرت $\tilde{H}$.

البرهان:

استناداً إلى المبرهنات (2) و (3) يكون المؤثر $\mathcal{T} := diag(C; \text{g}B)$ موجباً ومحدوداً في فضاء هلبرت

$$\tilde{H} := \hat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1}) \oplus \hat{H} \; .$$

من ناحية ثانية تتألف $D(\mathcal{A})$ ساحة تعريف المؤثر $\mathcal{A}$ من العناصر $y(t) = (\hat{u}; \hat{\zeta})^t \in \tilde{H}$ حيث $\mathcal{A}y(t) \in \tilde{H}$ أي:

$$\tilde{A}\hat{u} = (A_0 \vec{u}_0; A_1 \vec{u}_1; \ldots\ldots; 0)^t \in \hat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1}),$$
$$V_1 \hat{\zeta} = ((\Delta\rho)_0 G_0 \zeta_0; (\Delta\rho)_1 G_1 \zeta_1; \ldots; \rho_2 G_2 \zeta_2)^t \in \hat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1}),$$
$$-\text{g}V_2 \hat{u} = -\text{g}V_1^* \hat{u} = ((\Delta\rho)_0 \gamma_0 \vec{u}_0; (\Delta\rho)_1 \gamma_1 \vec{u}_1; \ldots\ldots; \rho_{m+1} \gamma_{m+1} \vec{u}_{m+1})^t \in \hat{H}$$

وبناءً عليه تكون ساحة تعريف المؤثر $\mathcal{A}$ مجموعة كثيفة في $\tilde{H}$ وتكتب بالشكل:

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \oplus M_2 \oplus \hat{H}_{\Gamma}^{1/2} \; ;$$
$$M_2 := \Big\{ \vec{u}_{m+1} \in \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1}) : (u_0, u_1, \ldots, \vec{u}_{m+1})^t \in \hat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S_{m+1}}(\Omega_{m+1}), \\ \{\vec{u}_i\}_{i=0}^{m} \in D(A), \gamma_i \vec{u}_i = \gamma_i \vec{u}_{i+1}, i = \overline{0,m}, \gamma_{m+1}\vec{u}_{m+1} \in \vec{H}_{\Gamma_{m+1}}^{1/2} \Big\}. \qquad (45)$$

لنبرهن الآن أنّ $\text{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\tilde{H}} \geq 0$.

في الحقيقة يمكن التعبير عن المؤثر $\mathcal{A}$ بالشكل:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + iV \; ; \; \mathcal{A}_0 = diag(\mu\tilde{A}; 0),$$
$$V = \begin{pmatrix} 0 & -iV_1 \\ iV_1^* & 0 \end{pmatrix} = V^* \qquad (46)$$

استناداً إلى التمهيدية (1) يكون المؤثر $\mathcal{A}_0 = diag(\mu\tilde{A}; 0)$ موجباً ، أي أنّ $\text{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\tilde{H}} \geq 0$.

وبشكل مشابه يمكن أن نبرهن أنّ $\text{Re}(\mathcal{A}^* y, y)_{\tilde{H}} \geq 0$ ، أي أنّ المؤثر $\mathcal{A}$- متبدد أعظمياً.

لنضع المسألة (40) بالشكل:

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}y + \mathcal{T}^{-1}f(t), \qquad y(0) = y^0 \tag{47}$$

واضح أنّ $\mathrm{Re}\left(-\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}y, y\right)_{\tilde{H}} \leq 0$ ، $\mathrm{Re}\left(\left(-\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\right)^* y, y\right)_{\tilde{H}} \leq 0$ و نجد أنّ المؤثر $-\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}$ متبدد أعظمياً .

نتيجةً لذلك ووفقاً للنتائج الواردة في القسم $(1.5.4)$ في $[3]$ وكذلك في $[8]$ ، يولّد المؤثر $-\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}$ شبه زمرة ضاغطة (Contractive semigroup) $U(t)$ ، أي أنّها شبه زمرة مؤلفة من مؤثرات ضاغطة.

عندئذٍ واستناداً للفرض يكون لمسألة كوشي (40) حلاً قوياً وحيداً $y(t)$ من الشكل:

$$y(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-\tau)\mathcal{T}^{-1}f(\tau)\,d\tau \,. \tag{48}$$

وبذلك يتمّ المطلوب.

الاستنتاجات والتوصيات:

إنّ أهم ما توصلنا إليه من نتائج :

1. تشكيل مسألة القيمة الحدية الابتدائية التي تصف مسألة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية مؤلفة من $m+1$ سائل لزج + سائل مثالي.

2. تحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية إلى مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية مؤثراتية من المرتبة الأولى، ودراسة خواص المؤثرات (المعاملات) الموجودة في مسألة كوشي.

3. البرهان على وجود و وحدانية حل قوي للمسألة المطروحة.

ونوصي بالاستفادة من النتائج أعلاه في دراسة الحركات النظامية للجملة الهيدروديناميكية.

المراجع:

[1] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G; NGO ZUY CAN. *Operators Methods in Linear Hydrodynamics:Evolution and Spectral Problems*. Nauka, Moscow, 1989, 159-181.

[2] ZAKORA,D.A. KOPACHEVSKY,N.D. *O malyh dvizhenijah I normalnyh kolebanijah gidrosistemy* (*vjazkaja zhidkost+sistema idealnyh zhidkostej*) // Matematicheskaja fizika,analiz,geometrija. – 2002. – V.9,No 3. – 1-7. (in Russian).

[3] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G .*Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics* Vol. 1: Self-adjoint Problems for Ideal Fluid, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2001,383.

[4] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics*.Vol.2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2003, 444.

[5] KOPACHEVSKY,N.D. *On Stability and Instability of small motions of Hydrodynamicalsystems*,Methods of Functional Analysis and topology,V. 13 (2007), no. 2, 152–168.

[6] AZIZOV,T.Y; HARDT,V; KOPACHEVSKY,N.D ; MENNIKEN,R.*On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container* . Math.Nachr.248-249 ,2003,no 3-39.

[7] GAZIEV,E.L., KOPACHEVSKY,N.D.*Malye dvizhenija I sobstvennye kolebanija gidrosistemy* (*idealnaja zhidkost-barotropnyj gaz*) // Ukrainskij matematicheskij vestnk. – 2013. – V. 10, No 1. 16-53 (in Russian).

[8] GOLDSTEIN,DZH. *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Vyshcha Shkola, Kiev (1989).

[9] Wadia Ali. Studying the Small Movements of a System of Rotating-Relaxing Fluids. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series; 37(1) ;2015.

[10] Wadia Ali. Stability and instability of small motions of a pendulum with a cavity filled with a system of ideal capillary fluids. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series; 36(4) ;2014.

[11] Wadia Ali. Operator Approach in Solving the Problem of Small Motions of a System of Ideal Capillary Fluids. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series; 33(1) ;2011.