مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (1) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (1) 2015

Studying the Small Movements of a System of Rotating-Relaxing Fluids

Dr. Wadee Ali*

(Received 15 / 10 / 2014. Accepted 6 / 1 /2015)

□ ABSTRACT □

This work suggests a study of small motions of system of anideal-relaxing fluids which rotate ina limited space. First, we present the problem and reducethe initial boundary value problem that describe it to Cauchy problem for an ordinary differential equation of the second order form in Hilbert space. This allows us to prove the unique solvability theorem.

Key Words: Hydrodynamical systems , Hilbert space, Operator approach, differential equations in Hilbert space.

***Associate professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.**

دراسة مسألة الحركات الصغيرة لجملة من السوائل المسترخية الدوّارة

الدكتور وديع علي*

(تاريخ الإيداع 15 / 10 / 2015. قُبِل للنشر في 6 / 1 /2015)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة الحركات الصغيرة لمجموعة من السوائل المثالية المسترخية التي تدور في حيّزٍ محدود. ونقدم في بداية البحث عرضاً للمسألة المطروحة، ثم نحوّل مسألة القيمة الحدية الابتدائية التي تصف هذه المسألة إلى مسألة كوشي بمعادلة تكاملية تفاضلية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت، ونبرهن على وجود حل هذه المعادلة ووحدانيتها.

تعدُّ الطريقة المعتمدة في هذا البحث من الطرائق المهمة والحديثة في دراسة الحركات الصغيرة للجمل الهيدروديناميكية.

الكلمات المفتاحية: جمل هيدروديناميكية، فضاء هلبرت، مقاربة مؤثر، المعادلات التفاضلية في فضاء هلبرت.

*أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مقدمة:

درست مسألة الحركات الصغيرة لسائل مثالي مسترخي في حيز محدود وبوجود قوى الجذب المؤثرة في الجملة المدروسة $[1,2,3,4]$. وتمَّي هذا البحث دراسة مسألة الحركات الصغيرة لمجموعة من السوائل المسترخية وبالشروط نفسها، إذ تم تحويل مسالة القيمة الحدية الابتدائية المتعلقة بهذه الجملة الهيدروديناميكية إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت، وذلك باستخدام بعض طرائق التحليل الدالي ونظرية المؤثرات، وتحديداً طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة الحركات الصغيرة لمجموعة من السوائل المثالية المسترخية التي تدور في حيزٍ محدود باستخدام طريقة الإسقاط عل منشور متعامد لفضاء هلبرت من أجل تحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية الموافقة لمسألة الحركات الصغيرة إلى مسألة كوشي في فضاء هلبرت بمعادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والبرهان على وجودها، ووحدانية حلها.وتكمن أهمية هذا البحث في تطبيقاته العملية في حل الكثير من القضايا العلمية الفيزيائية والهندسية.

طرائق البحث ومواده:

نبدأ أولاً بتشكيل مسألة القيمة الحدية الابتدائية الموافقة لمسألة الحركات الصغيرة للجملة الهيدروديناميكية المذكورة أعلاه بالاعتماد على المراجع $[2,5,6,7,8]$، ثم نعطي بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي تستخدم في تحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية إلى مسألة كوشي في فضاء هلبرت، وفي برهان النتائج التي حصلنا عليها.

النتائج والمناقشة:

1.المسألة المطروحة:

لنفرض أنّ خزان ما، يدور بشكل منتظم حول محور مفروض موجه بعكس اتجاه حقل الجاذبية الأرضية، وهو مملوء كلياً بـــ m من السوائل المثالية المسترخية وغير المتجانسة التي كثافاتها $\rho_{0,k}, k=\overline{1,m}$، بحيث يكون $0 < \rho_{0,m} < .... < \rho_{0,k} < .... < \rho_{0,2} < \rho_{0,1}$. سنفرض أن جملة السوائل تشغل منطقة محدودة $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

لتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية ديكارتية مثبتة بالخزان بحيث ينطبق المحور Ox_3 على محور الدوران وموجه بعكس اتجاه الجاذبية، ومبدأ الإحداثيات يقع في المنطقة Ω. في هذه الحالة تعطى السرعة المنتظمة لدوران الخزان بالعلاقة: $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3 \,, \omega_0 > 0$ حيث $\vec{e}_3$ متجه واحدة المحور Ox_3.يعطى حقل القوى الخارجية المؤثرة في الجملة بالعلاقة $\vec{F}_0 = -g\,\vec{e}_3 \,, g > 0$.يعطى الضغط $P_{0,k}(x)$ في السائل k في حالة الاستقرار النسبي بالعلاقة:

$$P_{0,k}(x) = -\rho_{0,k}\, g\, x_3 + \tfrac{1}{2}\rho_{0,k}\,\omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) + P_{0,k}(x_1, x_2, 0),\; x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_k \,, k = \overline{1,m} \quad (1.1)$$

حيث $P_{0,k}(x_1, x_2, 0)$ضغط السائل k في المستوي $O\,x_1x_2$، و Ω_k منطقة مشغولة بالسائل k.

ندرس الحركات الصغيرة لجملة السوائل مع الخزان، إذ نفرض أنّ للضغط الكلي والكثافة الكلية لكل سائل الشكل:

$$P_k(t,x) = P_{0,k}(x) + p_k(t,x)\ ,\ \vec{\rho}_k(t,x) = \rho_{0,k} + \rho_k(t,x)\ ;x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega_k \qquad (1.2)$$

حيث $p_k(t,x)$ الضغط الديناميكي ، $\rho_k(t,x)$ الكثافة الديناميكية للسائل k.

من معادلة أولر اللاخطية حول الحركات الصغيرة لسائل مثالي غير متجانس نحصل على:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{0,k}\vec{w}^k\right) - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{0,k}\vec{w}^k \times \vec{e}_3\right) = -\nabla p_k - \rho_k g\,\vec{e}_3 + \rho_{0,k}\vec{f}\ ,\ \rho_k + div\left(\rho_{0,k}\vec{w}^k\right) = 0\ (in\,\Omega_k)\ (1.3)$$

حيث $\vec{w}^k(t,x)$ حقل الخلط في السائل و $\vec{f}(t,x)$ حقل القوى الخارجية الصغير المتوضع على حقل الجذب $\vec{F}_0 = -g\,\vec{e}_3$.

بالإضافة إلى (1.3) نضيف شرط عدم التسرب :

$$\vec{w}^k.\vec{n}_k = 0 \quad (on\,S_k)\ ;k = \overline{1,m} \qquad (1.4)$$

تعطى العلاقة التي تربط بين الضغط الديناميكي $p_k(t,x)$ والكثافة الديناميكية $\rho_k(t,x)$ من أجل السائل المسترخي k بالشكل:

$$p_k(t,x) = a_\infty^{2,k}(x)\,\rho_k(t,x) - \int_0^t K(t-s,x)\,\rho_k(s,x)\,ds \qquad (1.5)$$

حيث الدالة الموجبة $K(t,x)$ هي نواة مؤثر فولتيرا ، و $a_\infty^{2,k}(x)$ مربع سرعة الصوت في السائل غير المتجانس، وكحالة خاصة يمكننا التعبير عن هذه النواة بالصورة:

$$K(t,x) = K_0(x)\exp(-b(x)t) \qquad (1.6)$$

حيث $K_0(x)$ ، $b(x)$ دالتان موجبتان في المنطقة Ω.

تتلخص مسألة الحركات الصغيرة لسائل مثالي مسترخ في إيجاد الحقول $\vec{w}^k(t,x)$ ، $p_k(t,x)$ ، $\rho_{0,k}(t,x)$ من المعادلة (1.3)، ومن الشرط الحدي (1.4) والعلاقة (1.5) عندما تتحقق شروط البدء:

$$\vec{w}^k(0,x) = \vec{w}^{0,k}(x)\ ,\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}^k(0,x) = \vec{w}^{1,k}(x) \qquad (1.7)$$

2.إيجاد المعادلة المؤثرية:

2.1 .إسقاط معادلات الحركة:

من أجل الانتقال إلى المعادلة المؤثرية في المسالة المدروسة نعتمد طريقة الإسقاط المتعامد لمعادلات الحركة على فضاءات جزئية خاصة. من أجل ذلك نستخدم المنشور الآتي: [2,8]

$$L_2(\Omega) := \hat{J}_0(\Omega) \oplus \hat{G}_0(\Omega) \oplus \hat{G}_h(\Omega) \qquad (2.1)$$

حيث

$$\hat{J}_0(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{m}\vec{J}_0(\Omega_k) := \left\{\hat{w} = \{\vec{w}_k(x)\}_{k=1}^m \in \hat{L}_2(\Omega) : div\,\vec{w}_k = 0\ (in\,\Omega_k), \vec{w}_k.\vec{n} = 0\ \ (on\,\partial\Omega_k)\right\}$$

$$\hat{G}_0(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{m}G_0(\Omega_k) = \{\hat{v} = \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^m \in \hat{L}_2(\Omega) : \hat{v}_k = \nabla\varphi_k \quad , \quad \varphi_k \quad (on\ S_k)\ , k = \overline{1,m}\ \}$$

$$\hat{G}_h(\Omega) := \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} G_h(\Omega_k) = \{\hat{v} = \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^m \in \hat{L}_2(\Omega) : \hat{v}_k = \nabla\varphi_k \ , \Delta\varphi_k = 0 \quad (in\,\Omega_k) \ , \int_{S_k} \varphi_k \, dS_k = 0\}$$

نرمز بـ $P_{hk}\ ,\ P_{0,S_k}\ , P_{0k}$ لمؤثرات الإسقاط العمودي على $\hat{J}_0(\Omega)\ , \hat{G}_0(\Omega), \hat{G}_h(\Omega)$ على الترتيب.

استناداً إلى الشرط الحدي (1.4)نجد أنّ مركبة الحقل $\rho_{0,k}\,\vec{w}^{\,k}$ غير موجودة في الفضاء الجزئي $\hat{G}_h(\Omega)$، ولذلك سنبحث عن الحقل $\rho_{0,k}\,\vec{w}^{\,k}$ بالشكل:

$$\rho_{0,k}\,\vec{w}^{\,k} = \vec{v}^{\,k} + \nabla\varphi_k \ ; \vec{v}^{\,k} \in \hat{J}_0(\Omega), \nabla\varphi_k \in \hat{G}_0(\Omega) \qquad (2.2)$$

بتعويض العلاقة (2.2) في المعادلة الأولى من (1.3) وبتطبيق مؤثرات الإسقاط $P_h\ , P_{0,S_k}\ , P_0$ عل طرفيها الأيمن و الأيسر نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}^{\,k}}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{0k}(\vec{v}^{\,k} \times \vec{e}_3) + P_{0k}(\nabla\varphi_k \times \vec{e}_3)\right) = -g\,P_{0k}(\rho_k \vec{e}_3) + \rho_{0,k}\,P_{0k}\,\vec{f} \quad (in\,\Omega_k) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \nabla\varphi_k}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{0,S_k}(\vec{v}^{\,k} \times \vec{e}_3) + P_{0,S_k}(\nabla\varphi_k \times \vec{e}_3)\right) = -P_{0,S_k}\nabla p_k - g\,P_{0,S_k}(\rho_k \vec{e}_3) +$$
$$+ \rho_{0,k}\,P_{0,S_k}\,\vec{f} \quad (in\,\Omega_k) \qquad (2.4)$$

$$-2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{hk}(\vec{v}^{\,k} \times \vec{e}_3) + P_{hk}(\nabla\varphi_k \times \vec{e}_3)\right) = -P_{hk}\nabla p_k - g\,P_{hk}(\rho_k \vec{e}_3) + \rho_{0,k}\,P_{hk}\,\vec{f} \quad (in\,\Omega_k) \qquad (2.5)$$

نلاحظ في العلاقة (2.5) أنه بمعرفة $\rho_{0,k}(t,x), \nabla\varphi_k(t,x), \vec{w}^{\,k}(t,x)$ يمكننا إيجاد مركبة حقل الجهد $p_k(t,x)$ في الفضاء الجزئي $\hat{G}_h(\Omega)$، لذلك سنكتفي بدراسة العلاقتين $(2.3),(2.4)$.

بتعويض العلاقة (2.2) في المعادلة الثانية من (1.3)وفي الشرط الحدي (1.4)نجد أنّ:

$$\rho_{0,k} = -\Delta\varphi_k \ \ (in\,\Omega_k)\ , \ \frac{\partial\varphi_k}{\partial n_k} = 0 \ \ (on\,S_k) \qquad (2.6)$$

من العلاقتين $(1.5),(2.6)$ ومن المعادلتين $(2.3),(2.4)$ نحصل على المسألة الآتية:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}^{\,k}}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{0k}(\vec{v}^{\,k} \times \vec{e}_3) + P_{0k}(\nabla\varphi_k \times \vec{e}_3)\right) = g\,P_{0k}(\vec{e}_3\,\Delta\varphi_k) + \rho_{0,k}\,P_{0k}\,\vec{f} \quad (in\,\Omega_k) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \nabla\varphi_k}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{0,S_k}(\vec{v}^{\,k} \times \vec{e}_3) + P_{0,S_k}(\nabla\varphi_k \times \vec{e}_3)\right) = -\left[-P_{0,S_k}\nabla\left(a_\infty^{2,k}(x)\,\Delta\varphi_k\right)\right] +$$
$$+ \int_0^t \left[-P_{0,S_k}\nabla\left(K(t-s,x)\,\Delta\varphi_k\right]ds + g\,P_{0,S_k}(\vec{e}_3\,\Delta\varphi_k) + \rho_{0,k}\,P_{0,S_k}\,\vec{f} \quad (in\,\Omega_k) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (on\,S_k) \qquad (2.9)$$

وتأخذ شروط البدء للمسألة $(2.8)-(2.7)$ الشكل:

$$\vec{v}^{\,k}(0,x) = P_{0k}\left(\rho_{0,k}\vec{w}^{\,0,k}(x)\right) =: \vec{v}^{\,0,k}(x), \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}^{\,k}(0,x) = P_{0k}\left(\rho_{0,k}\vec{w}^{\,1,k}(x)\right) =: \vec{v}^{\,1,k}(x)$$

$$\nabla\varphi_k(0,x) = P_{0,S_k}\left(\rho_{0,k}\vec{w}^{\,0,k}(x)\right) =: \nabla\varphi_k^0\ , \frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi_k(0,x) = P_{0,S_k}\left(\rho_{0,S_k}\vec{w}^{\,1,k}(x)\right) =: \nabla\varphi_k^1\ . \ (2.10)$$

2.2.المؤثرات المساعدة و خواصها:

من أجل الانتقال إلى المعادلة المؤثرية ندخل بعض المؤثرات الجديدة وندرس خواصها. ليكن فضاء هلبرت

المؤلف من الأزواج $\hat{H} := \hat{J}_0(\Omega)\oplus\hat{G}_0(\Omega)$ حيث: $\xi := \left(\hat{v};\nabla\varphi\right)^t$

$$\hat{v} := \{\vec{v}^{\,k}\}_{k=1}^{m} \in \hat{J}_0(\Omega), \nabla\varphi := \{\nabla\varphi_k\}_{k=1}^{m} \in \hat{G}_0(\Omega).$$

يعرف الجداء الداخلي في الفضاء $\hat{H}$ بالشكل:

$$\left((\hat{v}_1;\nabla\overset{1}{\varphi})^t,(\hat{v}_2;\nabla\overset{2}{\varphi})^t\right)_{\hat{H}} := \sum_{k=1}^{m}\rho_{0k}\int_{\Omega_k}\left(\vec{v}_1^{\,k}.\vec{v}_2^{\,k}+\nabla\varphi_k^1.\nabla\varphi_k^2\right)d\Omega_k$$

$$\left\|(\hat{v};\nabla\varphi)^t\right\|_{\hat{H}}^2 := \sum_{k=1}^{m}\rho_{0k}\int_{\Omega_k}\left(\left|\vec{v}^{\,k}\right|^2+\left|\nabla\varphi_k\right|^2\right)d\Omega_k$$

لنعرف المؤثر S حيث:

$$S\,\xi := \begin{pmatrix}\hat{S}_{11} & \hat{S}_{12}\\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{v}\\ \nabla\varphi\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

و $\hat{S}_{11}\hat{v} := \{iP_{0k}(\vec{v}^{\,k}\times\vec{e}_3)\}_{k=1}^{m}$ ، $\hat{S}_{12}\hat{v} := \{iP_{0k}(\nabla\varphi_k\times\vec{e}_3)\}_{k=1}^{m}$ ، $\hat{S}_{21}\hat{v} := \{iP_{0,S_k}(\vec{v}^{\,k}\times\vec{e}_3)\}_{k=1}^{m}$

$\hat{S}_{11}\hat{v} := \{iP_{0,S_k}(\nabla\varphi_k\times\vec{e}_3)\}_{k=1}^{m}$ ،

تمهيدية (2.1):

المؤثر S مترافق ذاتياً ومحدود في $\hat{H}$ ونظيمه يساوي الواحد.

البرهان:

يكفي أن نبرهن أنّ $\|S\|\le 1$, $S = S^*$.

ليكن $\xi_1 = \left(\hat{v}_1;\nabla\overset{2}{\varphi}\right)^t, \xi_2 = \left(\hat{v}_2;\nabla\overset{1}{\varphi}\right)^t$ عنصرين كيفيين من فضاء هلبرت $\hat{H} := \hat{J}_0(\Omega)\oplus\hat{G}_0(\Omega)$.

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
(S\,\xi_1,\xi_2)_{\hat{H}} &= (\hat{S}_{11}\hat{v}_1,\hat{v}_2)_{\hat{J}_0(\Omega)} + (\hat{S}_{12}\nabla\overset{1}{\varphi},\hat{v}_2)_{\hat{J}_0(\Omega)} + (\hat{S}_{21}\hat{v}_1,\nabla\overset{2}{\varphi})_{\hat{G}_0(\Omega)} + (\hat{S}_{22}\nabla\overset{1}{\varphi},\nabla\overset{2}{\varphi})_{\hat{G}_0(\Omega)}\\
&= \left(i\hat{P}_0(\hat{v}_1\times\vec{e}_3),\hat{v}_2\right)_{\hat{J}_0(\Omega)} + \left(i\hat{P}_0(\nabla\overset{1}{\varphi}\times\vec{e}_3),\hat{v}_2\right)_{\hat{J}_0(\Omega)} + \left(i\hat{P}_{0,S}(\hat{v}_1\times\vec{e}_3),\nabla\overset{2}{\varphi}\right)_{\hat{G}_0(\Omega)} +\\
&\quad + \left(i\hat{P}_{0,S}(\nabla\overset{1}{\varphi}\times\vec{e}_3),\nabla\overset{2}{\varphi}\right)_{\hat{G}_0(\Omega)} =\\
&= i\sum_{k=1}^{m}\rho_{0,k}\int_{\Omega_k}\left[(\vec{v}_1^{\,k}\times\vec{e}_3).\vec{v}_2^{\,k} + (\nabla\varphi_k^1\times\vec{e}_3).\vec{v}_2^{\,k} + (\vec{v}_1^{\,k}\times\vec{e}_3).\nabla\varphi_k^2 + (\nabla\varphi_k^1\times\vec{e}_3).\nabla\varphi_k^2\right]d\Omega_k\\
&= i\sum_{k=1}^{m}\rho_{0,k}\int_{\Omega_k}\left((\vec{v}_1^{\,k}+\nabla\varphi_k^1)\times\vec{e}_3\right).\left(\vec{v}_2^{\,k}+\nabla\varphi_k^2\right)d\Omega_k\\
&= \sum_{k=1}^{m}\rho_{0,k}\int_{\Omega_k}\left((\vec{v}_1^{\,k}+\nabla\varphi_k^1)\right).\overline{\left(i\,(\vec{v}_2^{\,k}+\nabla\varphi_k^2)\times\vec{e}_3\right)}\,d\Omega_k\\
&= \ldots\ldots\ldots = \left(\xi_1,S\,\xi_2\right)_{\hat{H}}
\end{aligned}$$

الأمر الذي يعني أنّ $S = S^*$. بوضع $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ وباستخدام المتراجحة $\left|(\hat{w}\times\vec{e}_3,\hat{w})_{\hat{H}}\right| \le \|\hat{w}\|_{\hat{H}}^2$

نجد أنّ :

$$\left|\left(S\,\xi,\xi\right)_{\hat{H}}\right| = \left(\left(\hat{v}+\nabla\varphi\right)\times\vec{e}_3,\hat{v}+\nabla\varphi\right)_{\hat{H}} \le \left\|\hat{v}+\nabla\varphi\right\|^2_{\hat{H}} = \|\hat{v}\|^2_{\hat{J}_0(\Omega)} + \left\|\nabla\varphi\right\|^2_{\hat{G}_0(\Omega)} = \|\xi\|^2_{\hat{H}} \quad (2.12)$$

نجد من (2.12) أنّ $\|S\| \le 1$ ، وبما أن $\|S_{11}\| = 1$ يكون $\|S\| = 1$.

لنفرض أنّ الدالتين $K(t,x)$ ، $a^{2,k}_\infty(x)$ قابلتان للمفاضلة باستمرار، ولنعرّف الفضاء:

$$\hat{H}_A := \oplus_{k=1}^m H_A(\Omega_k) := \left\{\nabla\varphi := \{\nabla\varphi\}_{k=1}^m \in \hat{W}^1_2(\Omega_k) : \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \ \left(on\,S_k\right)\right\}$$

حيث الجداء الداخلي والنظيم معرفان بالشكل:

$$\left(\nabla\varphi^1,\nabla\varphi^2\right)_A := \sum_{k=1}^m \rho_{0k}\int_{\Omega_k} a^{2,k}_\infty(x)\,\Delta\varphi^1_k\,\Delta\varphi^2_k\,d\Omega_k \quad (2.13)$$

$$\left\|\nabla\varphi\right\|^2_A := \sum_{k=1}^m \rho_{0k}\int_{\Omega_k} a^{2,k}_\infty(x)\left|\Delta\varphi_k\right|^2 d\Omega_k$$

ملاحظة: إنّ الفضاء $\hat{H}_A$ المعرّف أعلاه فضاء هلبرت و $(\hat{H}_A;\hat{G}_0(\Omega))$ تشكل ثنائية هلبرت وذلك استناداً إلى التمهيدية (2.2) في [2].

تمهيدية (2.2):

من أجل كل $\nabla q := \{\nabla q_k\}_{k=1}^m \in \hat{G}_0(\Omega)$ يوجد حلاً وحيداً عاماً للمسألة:

$$-\hat{P}_{0,S}\left\{\nabla\left(a^{2,k}_\infty(x)\,\Delta\varphi_k\right)\right\}_{k=1}^m = \nabla q_k \ \left(in\,\Omega_k\right),\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0\ \left(on\,S_k\right) \quad (2.14)$$

من الشكل : $\nabla\varphi = A^{-1}\nabla q\ ;\ \nabla\varphi := \{\nabla\varphi_k\}_{k=1}^m\ ,\nabla q := \{\nabla q_k\}_{k=1}^m$

حيث A مؤثر موّلد من ثنائية هلبرت $(\hat{H}_A;\hat{G}_0(\Omega))$.

البرهان:

يعرف المؤثر A الموّلد من الثنائية $(\hat{H}_A;\hat{G}_0(\Omega))$ من خلال المتطابقة:

$$\left(A\nabla\varphi^1;\nabla\varphi^2\right)_{\hat{G}_0(\Omega)} = \left(\nabla\varphi^1;\nabla\varphi^2\right)_{\hat{H}_A} ;\nabla\varphi^1 \in D(A)\subset D(A^{1/2}) = \hat{H}_A\ ,\nabla\varphi^2 \in \hat{H}_A \quad (2.17)$$

باستخدام صيغة غرين[3] من أجل مؤثر لابلاس يمكننا كتابة العلاقة (2.17) بالشكل الآتي:

$$\left(A\nabla\varphi^1;\nabla\varphi^2\right)_{\hat{G}_0(\Omega)} = \sum_{k=1}^m \rho_{0k}\int_{\Omega_k} A\,\nabla\varphi^1_k.\nabla\varphi^2_k\,d\Omega_k =$$

$$= \sum_{k=1}^m \rho_{0k}\int_{\Omega_k} a^{2k}_\infty div\,\nabla\varphi^1_k.div\,\nabla\varphi^2_k\,d\Omega_k = \quad (2.18)$$

$$= -\sum_{k=1}^m \rho_{0k}\int_{\Omega_k} \nabla\left(a^{2k}_\infty div\,\nabla\varphi^1_k\right).\nabla\varphi^2_k\,d\Omega_k + \sum_{k=1}^m\int_{S_k} a^{2k}_\infty div\,\nabla\varphi^1_k.\left(\varphi^2_k\right)_n d\Omega_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^m \rho_{0k}\int_{\Omega_k} P_{0.S_k}\nabla\left(a^{2k}_\infty div\,\nabla\varphi^1_k\right).\nabla\varphi^2_k\,d\Omega_k = \left(-\hat{P}_{0,S}\left\{\nabla\left(a^{2k}_\infty div\,\nabla\varphi^1_k\right)\right\}_{k=1}^m;\nabla\varphi^2\right)_{\hat{G}_0(\Omega)}.$$

ينتج أنّ الحل القابل للمفاضلة مرتين للمعادلة $A\,\nabla\varphi^1 = \nabla q$ هو حل للمسألة:

$$-\hat{P}_{0,S}\left\{\nabla\left(a^{2,k}_\infty(x)\,\Delta\varphi^1_k\right)\right\}_{k=1}^m = \nabla q_k \ \left(in\,\Omega_k\right),\ \frac{\partial\varphi^1_k}{\partial n} = 0\ \left(on\,S_k\right).$$

إنّ لهذه المسالة حلاً وحيداً هو $\nabla \overset{1}{\varphi} = A^{-1} \nabla q$ من أجل كل $\nabla q := \{\nabla q_k\}_{k=1}^m \in \hat{G}_0(\Omega)$.

بشكل مشابه من أجل المؤث A نعرف المؤثر $K(t)$ كمؤثر ناتج عن ثنائية هلبرت $(\hat{H}_{K(t)}; \hat{G}_0(\Omega))$

حيث:

$$\hat{H}_{K(t)} := \oplus_{k=1}^m H_{K(t)}(\Omega_k) := \left\{ \nabla \varphi := \{\nabla \varphi\}_{k=1}^m \in \hat{W}_2^1(\Omega_k) : \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \ \ (on\, S_k) \right\} \quad (2.19)$$

$$\left(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2\right)_{K(t)} := \sum_{k=1}^m \rho_{0k} \int_{\Omega_k} K(t) \Delta \varphi_{1,k} \Delta \varphi_{2,k} \, d\Omega_k \,, \left\|\nabla \varphi\right\|_A^2 := \sum_{k=1}^m \rho_{0k} \int_{\Omega_k} K(t) \left|\Delta \varphi_k\right|^2 d\Omega_k$$

وبذلك يتطابق بالعناصر $\hat{H}_A$ و $\hat{H}_{K(t)}$ حيث $D(\hat{A}) = D(K(t))$ من أجل كل $t \in \mathbb{R}^+$.

لنعرف المؤثرين $\hat{B}_0 := diag\{B_{0k}\}_{k=1}^m \,,\, \hat{B}_G := diag\{B_{Gk}\}_{k=1}^m$ بالشكل:

$$\hat{B}_0 \nabla \varphi := \{B_{0k} \nabla \varphi_k\}_{k=1}^m := \hat{P}_0 \{\vec{e}_3 \Delta \varphi_k\}_{k=1}^m ,$$

$$\hat{B}_G \nabla \varphi := \{B_{Gk} \nabla \varphi_k\}_{k=1}^m := \hat{P}_0 \{\vec{e}_3 \Delta \varphi_k\}_{k=1}^m \ \ , \ D(\hat{B}_0) = D(\hat{B}_G) = \hat{H}_A \qquad (2.20)$$

تمهيدية (2.3):

من أجل المؤثرين $\hat{B}_0 := diag\{B_{0k}\}_{k=1}^m \,,\, \hat{B}_G := diag\{B_{Gk}\}_{k=1}^m$ تتحقق الخواص الآتية:

$$\hat{B}_0 A^{-1/2} =: Q_0 \in \mathrm{L}\left(\hat{G}_0(\Omega); \hat{J}_0(\Omega)\right), \hat{B}_G A^{-1/2} =: Q_G \in \mathrm{L}\left(\hat{G}_0(\Omega)\right) \qquad (2.21)$$

البرهان:

ليكن $\{\nabla \varphi_k\}_{k=1}^m$ عنصراً كيفياً من $D\left(B_{0k}\right)$، عندئذٍ:

$$\left\|B_{0k} \nabla \varphi_k\right\|_{J_0(\Omega_k)}^2 \le \left\| \vec{e}_3 \, div \nabla \varphi_k \right\|_{J_0(\Omega_k)}^2 \le \left(\min_{x \in \Omega_k} a_\infty^{2,k}(x) \right)^{-1} \int_{\Omega_k} a_\infty^{2,k} \left|\Delta \varphi_k\right|^2 d\Omega_k =$$

$$= \left(\min_{x \in \Omega_k} a_\infty^{2,k}(x) \right)^{-1} \left\|A_k^{1/2} \nabla \varphi_k\right\|_{\hat{G}_0(\Omega_k)}^2 = \left(\min_{x \in \Omega_k} a_\infty^{2,k}(x) \right)^{-1} \left\|A^{1/2} \ \nabla \varphi_k\right\|.$$

نجد بعد إجراء التحويل $A^{1/2} \ \nabla \varphi_k = \nabla \psi_k$ أنّ:

$B_{0k} A^{-1/2} \in \mathrm{L}\left(\vec{G}_0(\Omega_k); \vec{J}_0(\Omega_k)\right)$، وبالتالي $\hat{B}_0 A^{-1/2} := Q_0 \in \mathrm{L}\left(\hat{G}_0(\Omega); \hat{J}_0(\Omega)\right)$.

وبشكل مشابه نجد أنّ: $\hat{B}_G A^{-1/2} =: Q_G \in \mathrm{L}\left(\hat{G}_0(\Omega)\right)$.

باستخدام المؤثرات المعرفة أعلاه نستطيع كتابة المسألة $(2.10)-(2.7)$ على شكل مسالة كوشي من أجل معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت $\hat{H} := \hat{J}_0(\Omega) \oplus \hat{G}_0(\Omega)$:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\omega_0 i S \frac{d\xi}{dt} = -\mathrm{Q} \, \mathrm{A} \, \xi + \int_0^t \mathrm{K}(t-s) \xi(s) ds \ + \mathrm{F}(t)$$

$$\xi(0) = \xi^0 \quad , \ \xi'(0) = \xi^1 \qquad (2.22)$$

حيث :

$$\mathrm{Q}:=\begin{pmatrix}0 & -g\,Q_0\,A^{-1/2}\\ 0 & I-g\,Q_G\,A^{-1/2}\end{pmatrix},\mathrm{A}:=diag\left(I\,;A\right),\mathrm{K}(t):=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & K(t)\end{pmatrix},\mathrm{F}\,(t):=\begin{pmatrix}\hat{P}_0\{\rho_{0,k}\vec{f}\,(t)\}\\ \hat{P}_{0,S}\,\{\rho_{0,k}\vec{f}\,(t)\}\end{pmatrix}$$

$$\xi(0)=\xi^0:=\left(\hat{v}^{\,0}\,;\nabla\varphi^{0}\right)^t=\left(\hat{P}_0\{\rho_{0,k}\vec{w}^{\,0k}\};\hat{P}_{0,S}\,\{\rho_{0,k}\vec{w}^{\,0k}\}\right)^t,$$

$$\xi'(0)=\xi^1:=\left(\hat{v}^{1}\,;\nabla\varphi^{1}\right)^t=\left(\hat{P}_0\{\rho_{0,k}\vec{w}^{\,1k}\};\hat{P}_{0,S}\,\{\rho_{0,k}\vec{w}^{\,1k}\}\right)^t.$$

وهكذا إذا كانت $\nabla p:=\{\nabla p_k\}_{k=1}^m,\hat{\rho}:=\{\nabla\rho_{0,k}\}_{k=1}^m\,,\hat{w}:=\{\vec{w}^{\,k}\}_{k=1}^m$ حلولاً للمسالة $(1.3)-(1.7)$ فإنّ الدالة $\xi(t)$ هي حل لمسالة كوشي لمعادلة تكاملية تفاضلية من المرتبة الثانية (2.22).

تسمى الدوال $\nabla p:=\{\nabla p_k\}_{k=1}^m,\hat{\rho}:=\{\nabla\rho_{0,k}\}_{k=1}^m\,,\hat{w}:=\{\vec{w}^{\,k}\}_{k=1}^m$ حلاً قوياً لمسالة القيمة الابتدائية $(1.7)-(1.3)$ إذا كانت الدالة $\xi(t)$ حلاً قوياً لمسالة كوشي (2.22). وبدورها تسمى الدالة $\xi(t)$ حلاً قوياً لمسالة كوشي (2.22) إذا كانت $\xi(t)\in D(A)$, $\xi'(t)\in D(A^{1/2})$ من أجل كل $t\in\mathbb{R}^+$ وكانت $A^{1/2}\xi'(t),A^{1/2}\xi(t)\in C\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}\right)$ و $\xi(t)\in C^2\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}\right)$ وشروط البدء في (2.22) محققة .

3. حل مسألة القيمة الحدية الابتدائية:

نجري في المسألة (2.22) التحويل $\mathrm{A}^{1/2}\xi(t)=\eta'(t),\eta(0)=0$ فنحصل على:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=-2\omega_0 iS\,\frac{d\xi}{dt}-\mathrm{Q}\,\mathrm{A}^{1/2}\frac{d\eta}{dt}+\int_0^t\mathrm{K}(t-s)\,\mathrm{A}^{-1/2}\frac{d\eta(s)}{ds}ds\;+\mathrm{F}\,(t)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\mathrm{A}^{1/2}\frac{d\xi}{dt},\quad\xi'(0)=\xi^1,\;\eta'(0)=\mathrm{A}^{1/2}\xi^0\qquad(3.1)$$

وبالحساب المباشر يمكننا التحقق من أنّ:

$$\mathrm{QA}^{1/2}=\begin{pmatrix}0 & -g\,Q_0\,A^{-1/2}\\ 0 & I-g\,Q_G\,A^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-I & -g\,Q_0\\ 0 & -g\,Q_G\end{pmatrix}=:\mathrm{A}^{1/2}+\mathrm{R}$$

$$\mathrm{K}(t)\mathrm{A}^{-1/2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & K(t)A^{-1/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & K(t)A^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & A^{1/2}\end{pmatrix}=:\mathrm{K}_b(t)\mathrm{A}^{1/2}$$

حيث: $\mathrm{K}_b(t)\in\mathrm{L}(\hat{H})\;,\;\mathrm{R}\in\mathrm{L}(\hat{H})\;\;\forall t\in\mathbb{R}^+$.

وبذلك يمكننا كتابة المعادلة (3.1) في $\hat{H}^2:=\hat{H}\oplus\hat{H}$ بالشكل الآتي:

$$\frac{dy}{dt}=\hat{\mathrm{A}}\;y+\hat{\mathrm{R}}\;y+\int_0^t\hat{\mathrm{K}}(t-s)\hat{C}\;y\,(s)ds+\hat{\mathrm{F}}\,(s),y\,(0)=y^{\,0}\qquad(3.2)$$

حيث:

$$\hat{\mathrm{A}}:=\begin{pmatrix}-2\omega_0 iS & -\mathrm{A}^{1/2}\\ \mathrm{A}^{1/2} & 0\end{pmatrix},\hat{\mathrm{R}}:=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{R}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\hat{\mathrm{K}}:=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{K}_b(t)\\ 0 & 0\end{pmatrix},\hat{C}:=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathrm{A}^{1/2}\end{pmatrix}$$

$$y:=\left(\xi';\eta'\right)^t\;,y^{\,0}:=\left(\xi';\mathrm{A}^{1/2}\right)^t\;,\hat{\mathrm{F}}\,(t):=\left(\mathrm{F}\,(t);0\right)^t.$$

عندئذٍ يكون: $\hat{\mathrm{R}}\in\mathrm{L}(\hat{H}^{(2)}),\hat{\mathrm{K}}(t)\in\mathrm{L}(\hat{H}^{(2)})\;\forall t\in\mathbb{R}^+$ و $D(\hat{\mathrm{A}})\subset D(\hat{C})$.

تسمى الدالة $y(t)$ حلاً قوياً لمسألة كوشي (3.2) إذا كانت $y(t)\in D(\hat{A})\,\forall t\in\mathbb{R}^+$ و $y(0)=y^0,\ y(t)\in C^1\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}^{(2)}\right),\hat{A}\,y(t)\in C\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}^{(2)}\right)$ وتحقق المعادلة (3.2) لكل $t\in\mathbb{R}^+$.

مبرهنة (3.1) :

ليكن $\hat{K}(t)\in C^1\left(\mathbb{R}^+;L(\hat{H}^{(2)})\right)$, $\hat{F}(t)\in C^1\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}^{(2)}\right)$ عندئذٍ يوجد من أجل كل $y^0\in D(\hat{A})$ حلاً قوياً وحيداً لمسالة كوشي (3.2).

البرهان:

إنّ المؤثر $\hat{A}$ مولد لزمرة المؤثرات التناظرية المستمرة بقوة في فضاء هلبرت $\hat{H}^{(2)}$، والمؤثر $\hat{R}$ محدود في $\hat{H}^{(2)}$. من هنا نجد أنّ يوجد $\lambda_0\in\rho(\hat{A}+\hat{R})$.

نجري في مسألة كوشي (3.2) التحويل $y(t)=\exp(\lambda_0 t)z(t)$ فنجد أنّ:

$$\frac{dz}{dt}=\hat{B}z+\int_0^t\hat{K}_0(t-s)\hat{C}\,y(s)ds+\hat{F}_0(s),z(0)=z^0 \qquad (3.3)$$

حيث $\hat{B}:=\hat{A}+\hat{R}-\lambda_0\hat{I}$, $\hat{K}_0(t):=\exp(-\lambda_0 t)\hat{K}(t)$ ، $\hat{F}_0(t):=\exp(-\lambda_0 t)\hat{F}(t)$.

المؤثر $\hat{B}$ هو مولد الزمرة $U(t)=\exp(t\hat{B})$ المستمرة بقوة في $\hat{H}^{(2)}$ ، وعندئذٍ يكون:

$$\hat{B}^{-1}\in L\left(\hat{H}^2\right),\ D(\hat{B})\subset D(\hat{C})$$

من الفرض نجد أنّ $\hat{K}_0(t)\in C^1\left(\mathbb{R}^+;L(\hat{H}^{(2)})\right)$, $\hat{F}_0(t)\in C^1\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}^{(2)}\right)$.

من الواضح أنّه بوجود حل قوي وحيد للمسألة (3.3) يوجد حل قوي لمسألة كوشي (3.2).

لنفرض أنّ $y^0\in D(\hat{A})$، أنّ لمسألة كوشي (3.3) حلاً قوياً $z(t)$ ، عندئذٍ:

$$z(t)=U(t)y^0+\int_0^t U(t-s)\hat{F}_0(s)ds+\int_0^t U(t-s)\{\int_0^s\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau)d\tau\}ds$$
$$=U(t)y^0+\int_0^t U(t-s)\hat{F}_0(s)ds+\int_0^t d\tau\int_\tau^t U(t-s)\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau)ds. \qquad (3.4)$$

بما إنّ المؤثر $\hat{B}^{-1}$ موجود ، $z(t)\in D(\hat{B})\subset D(\hat{C})$ و $\hat{K}_0(t)\in C^1\left(\mathbb{R}^+;L(\hat{H}^{(2)})\right)$ فإنّ:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(U(t-s)\hat{B}^{-1}\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau)\right)=-U(t-s)\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau)+U(t-s)\hat{B}^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau).$$

بمكاملة العلاقة الأخيرة نجد أنّ:

$$\int_\tau^t\left(U(t-s)\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau)\right)=$$
$$=\hat{B}^{-1}\left(-\hat{K}_0(t-\tau)\hat{C}\,z(\tau)+U(t-\tau)\hat{K}_0(0)\hat{C}\,z(\tau)+\int_\tau^t U(t-s)\hat{B}^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\hat{K}_0(s-\tau)\hat{C}\,z(\tau)ds\right) \qquad (3.5)$$
$$=:\hat{B}^{-1}\hat{K}_1(t-\tau)z(\tau)$$

من $(3.4),(3.5)$ نجد أنّ الحل القوي $z(t)$ لمسألة كوشي (3.3) يحقق معادلة فولتيرا التكاملية الآتية:

$$z(t)=\hat{z}(t)+\int_0^t\hat{B}^{-1}\hat{K}_1(t,s)z(s)ds \qquad (3.6)$$

حيث $\hat{z}(t):=U(t)y^0+\int_0^t U(t-s)\hat{F}_0(s)ds$ و $z(t)$ هنا هو حل مسألة كوشي (3.3) من دون الحد التكاملي، لذلك يكون : $\hat{z}(t)\in C\left(\mathbb{R}^+;D(\hat{B})\right)\cap C^1\left(\mathbb{R}^+;\hat{H}^{(2)}\right)$.

سنبين الآن أنّ للمعادلة (3.6) حلاً وحيداً وهو عبارة عن حل قوي لمسألة كوشي (3.3). لنضع: $H(\hat{\mathrm{B}}) := \left(D(\hat{\mathrm{B}}), \|.\|_{\hat{\mathrm{B}}}\right)$ حيث $\|z\|_{\hat{\mathrm{B}}} := \|\hat{\mathrm{B}} z\|$ من أجل كل $z \in D(\hat{\mathrm{B}}) = D(\hat{\mathrm{A}})$ ومن المعلوم أنّ $H(\hat{\mathrm{B}})$ هو فضاء باناخ.

من (3.5) نجد أنّ $\hat{\mathrm{B}}^{-1}\hat{\mathrm{K}}_1(t,s) \in C\left(\mathbb{R}^+; \mathrm{L}(\hat{H}(\hat{\mathrm{B}}))\right)$، وهكذا نجد أنّ المعادلة (3.6) هي معادلة فولتيرا التكاملية من المرتبة الثانية ذات النواة المستمرة، بالتالي للمعادلة (3.6) حلاً وحيداً $\hat{z}(t) \in C\left(\mathbb{R}^+; \hat{H}(\hat{\mathrm{B}})\right)$ وكون $z(t) \in C\left(\mathbb{R}^+; \hat{H}(\hat{\mathrm{B}})\right)$.

بما أنّ $\hat{z}(t) \in C\left(\mathbb{R}^+; H^{(2)}\right)$ فإن $z(t)$ دالة قابلة للمفاضلة باستمرار وتأخذ قيمتها في فضاء هلبرت $H^{(2)}$.

واضح أنّ $z(t)$ تحقق تعريفالحل القوي، ولذلك تكون الدالة $z(t)$ حلاً قوياً وحيداً للمسألة (3.3)، وعندها يكون $y(t) = \exp(\lambda_0 t) z(t)$ حلاً قوياً وحيداً للمسألة (3.2).

مبرهنة (3.2):

لنفرض أنّ $K(t,s)$, $\vec{f}(t,x)$ دالتان قابلتان للمفاضلة باستمرار بالنسبة لـــ $t \in \mathbb{R}_+$ وتأخذان قيمهما في $C^1(\Omega)$, $\vec{L}_2(\Omega)$ على الترتيب في (1.5). عندئذٍ من أجل كل $\vec{w}^{1,k}(x)$, $\vec{w}^{0,k}(x)$ حيث:

$$\hat{P}_0\{\vec{w}^{0,k}(x)\}_{k=1}^m \in \hat{J}_o(\Omega),\ \hat{P}_0\{\vec{w}^{1,k}(x)\}_{k=1}^m \in \hat{J}_o(\Omega)$$
$$\hat{P}_{0,S}\{\vec{w}^{0,k}(x)\}_{k=1}^m \in D(A), \hat{P}_{0,S}\{\vec{w}^{1,k}(x)\}_{k=1}^m \in D(A^{1/2}). \qquad (3.7)$$

يوجد حل قوي وحيد لمسألة القيمة الحدية الابتدائية $(1.3)-(1.7)$.

البرهان:

لنتحقق من أنّ شروط المبرهنة (3.1) محققة ضمن معطيات هذه المبرهنة. من (3.7) , (2.22) نجد أنّ:

$$\xi(0) = \xi^0 = \left(\hat{P}_0\{\rho_{0,k}\,\vec{w}^{0,k}(x)\}_{k=1}^m; \hat{P}_{0,S}\{\vec{w}^{0,k}(x)\}_{k=1}^m\right)^t \in \hat{J}_0(\Omega) \oplus D(A) = D(\mathrm{A}),$$

$$\xi'(0) = \xi^1 = \left(\hat{P}_0\{\rho_{0,k}\,\vec{w}^{1,k}(x)\}_{k=1}^m; \hat{P}_{0,S}\{\vec{w}^{1,k}(x)\}_{k=1}^m\right)^t \in \hat{J}_0(\Omega) \oplus D(A^{1/2}) = D(\mathrm{A}^{1/2}),$$

عندئذٍ من (3.2) نجد أنّ:

$$y(0) = y^0 = \left(\xi^1; \mathrm{A}^{1/2}\xi^0\right)^t \in D(\mathrm{A}^{1/2}) \oplus D(\mathrm{A}^{1/2}) = D(\mathrm{A})$$

ومن (2.22) وكون $\vec{f}(t,x) \in C^1\left(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega)\right)$ ينتج أنّ:

$$\mathrm{F}(t) := \left(\hat{P}_0\{\rho_{0,k}\vec{f}(t)\}; \hat{P}_{0,S}\{\rho_{0,k}\vec{f}(t)\}\right)^t \in C^1\left(\mathbb{R}_+; \hat{J}_0(\Omega) \oplus \hat{G}_0(\Omega)\right) = C^1\left(\mathbb{R}_+; \hat{H}\right)$$

و ذلك لأنّ مؤثري الإسقاط المتعامد $\hat{P}_0$, $\hat{P}_{0,S}$ محدودان، ومنه ومن (3.2) ينتج أنّ:

$$\hat{\mathrm{F}}(t) := \left(\mathrm{F}(t); 0\right)^t \in C^1\left(\mathbb{R}_+; \hat{H}^2\right).$$

بما أنّ النواة لمؤثر فولتيرا التكاملي في (1.5) قابلة للمفاضلة باستمرار فإنّ:

$\mathrm{K}_b(t) = diag\left(0, K(t)A^{-1}\right) \in C^1\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{L}(\hat{H})\right)$ وينتج من ذلك أن $\hat{\mathrm{K}}(t) \in C^1\left(\mathbb{R}^+; \mathrm{L}(\hat{H}^{(2)})\right)$.

وبهذا الشكل نرى أنّه بتحقق معطيات هذه المبرهنة تتحقق جميع معطيات المبرهنة (3.1). وفي المبرهنة (3.1) يكون لمسألة كوشي (3.2) حل قوي ووحيدعلى $\mathbb{R}_{+}$ من الشكل:

$$y(t)\in\left(\xi'(t);\eta'(t)\right)^{t}\in C\left(\mathbb{R}_{+};D(\hat{\mathrm{A}})\right)\cap C^{1}\left(\mathbb{R}_{+};\hat{H}^{(2)}\right).$$

ومن هنا وبوضع $\xi(t)=\mathrm{A}^{-1/2}\eta'(t)$ في الجملة (3.1) نجد أنّ $\xi(t)$ حل قوي وحيد لمسألة كوشي (2.22). وهذا يعني وجود حل قوي ووحيد لمسالة القيمة الحدية الابتدائية $(1.3)-(1.7)$.

الاستنتاجات والتوصيات:

إنّ أهم ما توصلنا إليه من نتائج:

1. تشكيل مسالة القيمة الحدية الابتدائية التي تصف مسألة الحركات الصغيرة لـــ m من السوائل المثالية المسترخية غير القابلة للخلط تدور في حيزٍ محدود.

2. تحويل المسألة أعلاه إلى مسألة كوشي مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ودراسة خواص المؤثرات (المعاملات)الموجودة في المسألة.

3. البرهان على وجود حل قوي للمسألة المطروحة ووحدانيته.

ونوصي بالاستفادة من النتائج أعلاه في دراسة استقرار الجملة الهيدرديناميكية.

References:

[1]KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G; NGO ZUY CAN. *Operators Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems*. Nauka, Moscow, 1989,159-181..

[2] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G .*Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics* .Basel—Boston—Berlin, 2001,383.

[3] Ali, Wadia. *Operator Approach in Solving the Problem of Small Motions of a System of Ideal Capillary Fluids*. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies – Basic Science Series Vol. (33) No. (1) 2011, 65-76.

[4] Ali, W., Tfiha A. Using some Functional Analysis methods in studying small motions of a system of heavy viscous fluids. Al-baath University Journal, 2014.

KOPACHEVSKY,N.D. *On Stability and Instability of small motions of Hydro dynamical systems*, Methods of Functional Analysis and topology,Vol. 13 (2007), no. 2, 152–168.

[5] SUSLINA,T.A. *Spectral asymptotics of two prototype problems on oscillations of fluids*, Iz. St. Petersburg Electrotechn. Inst., 449, 82–88 (1992).

[6]GOLDSTEIN,DZH. *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Vyshcha Shkola, Kiev (1989).

[7]KOPACHEVSKY, N.D.,ORLOVA(BOLGOVA),L.D. *Equations Connected with the Problem of Small Oscillations of Relaxing Fluid* / Spectral and Evolutional Problems. Proceedings of the Fourth Crimean Autumn Math. School-Symp.- Vol. 4: Simferopol State University,1995, 102-106.

[8]ZAKORA, D.A.; *Problem on Small Movements of Rotating Ideal Relaxing Fluid* Dynamical Systems, 2009, Vol.26,31-42.(in Russian)