Boundeness of Cauchy Singular Integular in Morrey Space $L^{\rho,\varphi,t}$ with Variable (t)

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Hassan Khalifah **
Kawther Mtawje ***

(Received 19 / 11 / 2022. Accepted 26 / 2 /2023)

□ ABSTRACT □

Regarded Cauchy singular integral of the important mathematical tools used to answers to many of mathematical problems , so in this research we studied some features singular Cauchy's integral for functions belong to wide classes of functions on a famous curves families.It is one of the most important properties that are studied on the singular Cauchy's integral is its boundness ,existence,and affiliation ,All of these properties are studied when belonging to the function f to a space ,And through this study we have obtained some results about singular Cauchy's integral and its boundness in Generalized Morrey space with variable (t).

Keywords: Singural Cauchys integral – Generalized Morrey space.

* **Professor- Department of mathematics, faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Professor- Department of mathematics, faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****postgraduate Student (Master), Department of mathematics, faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

محدودية تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري مع الوسيط (t) $L^{\rho,\varphi,t}$

د. محمد علي*
د. حسن خليفة**
كوثر متوج ***

(تاريخ الإيداع 19 / 11 / 2022. قُبِل للنشر في 26 / 2 /2023)

□ ملخّص □

يعتبر مؤثر كوشي الشاذ من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في حل العديد من المسائل الرياضية، في هذه المقالة تمت دراسة بعض خواص مؤثر كوشي الشاذ لتوابع تنتمي إلى صفوف واسعة من التوابع على أسرة شهيرة من المنحنيات . ومن أهم الخواص التي تدرس على مؤثر كوشي الشاذ هي محدوديته ووجوده وانتماؤه ، وكل هذه الخواص تدرس عند انتماء التابع f إلى فضاء ما، في هذا البحث حصلنا على بعض النتائج التي تخص تكامل كوشي الشاذ ومحدوديته في فضاء موري المعمم من خلال إدخال الوسيط t

الكلمات المفتاحية: تكامل كوشي الشاذ– فضاء موري المعمم– فضاء موري المعمم بإدخال الوسيط t

*أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
***طالبة دراسات عليا (ماجستير) قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.

مقدمة:

يندرج موضوع البحث الحالي ضمن نظرية التوابع العقدية وهو يعتبر امتداد لما يسمى بصيغة كوشي التكاملية التي درست من أجل حالات كثيرة وهي تحل مسألة إيجاد قيمة التكامل من الشكل: [1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - Z}d\xi$$

من المعلوم أن قيمة هذا التكامل متعلقة بانتماء Z إلى داخل أو خارج المنحني المغلق $\boldsymbol{\gamma}$ أما تكامل كوشي الشاذ فإنه يملك نفس شكل التكامل السابق عندما تقع Z على منحني التكامل (ليس بالضرورة أن يكون منحني التكامل مغلقاً) الأمر الذي يحول التكامل إلى شاذ.

لقد تمت دراسة محدودية تكامل كوشي الشاذ في العديد من الفضاءات التابعية مثل ليبيغ وهولدر ...الخ

1_في عام 2012 درس الباحث **Akbulut** محدودية تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري المعمم[1].

2_في عام 2017 درس العالم **Busteva** محدودية تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري وأثبت محدوديته على طول المنحني في الفضاء $L^{\rho,\varphi}(\Gamma)$[3].

3- في عام 2021 درس الباحث **Samko** وآخرون محدودية تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري [5].

قمنا في هذا البحث بالوصول إلى بعض النتائج التي تخص محدودية تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري المعمم بإدخال الوسيط t

أهمية البحث وأهدافه:

تتبع أهمية البحث من كون الموضوع المدروس هو محدودية تكامل كوشي الشاذ الذي يملك عدة تطبيقات نظرية وعملية هامة خصوصاً في نظرية التقريب وحلول المعادلات التفاضلية:

ويهدف هذا البحث إلى ما يلي:

1. دراسة محدودية مؤثر كوشي الشاذ على بعض الفضاءات التابعية
2. دراسة محدودية مؤثر كوشي الشاذ وفق مفهوم ليبتشز
3. دراسة انتماء مؤثر كوشي الشاذ إلى بعض الفضاءات التابعية

طرائق البحث وموادە:

تعتمد دراسة هذا البحث على بعض المفاهيم والتعاريف الرياضية المعروفة في التحليل التابعي لأن البحث يقع ضمن الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل العقدي لذلك فإن الطرق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية التوابع التحليلية

تعاريف ومفاهيم أساسية :

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

تعريف (1) فضاء موري:Morrey Space [6]، [5]

من أجل $1\leq P < \infty$ يعرف فضاء موري $L^{\rho,\varphi} = L^{\rho,\varphi}\ (R^n)$ بأنه مجموعة كل التوابع f القابلة للمكاملة محلياً من الدرجةP على R^n والتي تحقق:

$$\|f\|_{L^{\rho,\varphi}} = \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \left[\frac{1}{\varphi(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p}\ d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

تعريف (2):أسرة توابع موري مع الوسيط t : $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$: [4]

من أجل $1\leq t \leq p < \infty$ نرمز ب : $L^{\rho,\varphi,t} = L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$ للأسرة :

$$L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n) := \{ f \in L^{p}_{loc}(R^n) \ :\ \|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} < \infty \}$$

حيث أن $\|.\|_{L^{\rho,\varphi,t}}$ يعطى بالشكل:

$$\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} = \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \left[\frac{1}{\varphi(r)} \int_{B(x,r)} |f(\tau)|^{\frac{p}{t}}\ d\mu(\tau) \right]^{\frac{t}{p}} \quad ; \quad B(x,r)=\{ y\in X; d(x,y) < r\}$$

أي أن B(x,r) : هي كرة مفتوحة مركزها $x \in R^n$ ونصف قطرها $r > 0$

و $\varphi(r)$: دالة تابعة ل r

النتائج والمناقشة:

من تعريف $L^{\rho,\varphi,t}$ ينتج لدينا:[8]

1- من أجل t=1 يصبح : $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n) = L^{\rho,\varphi}\ (R^n)$ أي أن أسرة توابع فضاء موري $L^{\rho,\varphi}\ (R^n)$ هي حالة خاصة من أسرة توابع موري مع الوسيط **t** $L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$

2- من أجل t=1 وφ=p يصبح $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n) = L^{\rho}\ (R^n)$ أي أن توابع فضاء ليبيغ هو حالة خاصة من فضاء موري مع الوسيط t . $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$

نعرف على المجموعة $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$ العمليتين الآتيتين :

1- $(f+g)(y)=f(y)+g(y)$

2- $(\lambda f)(y)= \lambda f(y) \qquad \forall \lambda \in R, \forall f,g \in L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$

مبرهنة (1):

المجموعة $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$ مع العمليتين السابقتين تشكل فضاءً خطياً فوق الحقل R

الإثبات:

لكي يكون الفضاء$L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$ فضاء خطي يجب أن يحقق الشرط :

$$\propto f + \beta g \in L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)\ \forall f,g \in L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)\ \forall \propto, \beta \in R$$

لتكن f و g من $L^{\rho,\varphi,t}\ (R^n)$ و $\propto, \beta$ من R عندها:

$\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} < \infty$ و $\|g\|_{L^{\rho,\varphi,t}} < \infty$

$$\left(\int_{B(x,r)} |(\propto f + \beta g)(y)|^{\frac{p}{t}}\ dy \right)^{\frac{t}{p}} = \left(\int_{B(x,r)} |\propto f(y) + \beta g(y)|^{\frac{p}{t}}\ dy \right)^{\frac{1}{p/t}}$$

Print ISSN: 2079-3057 , Online ISSN:2663-4252

وبتطبيق متراجحة مينكوفسكي (minkowskis inequality) نجد:

$$\left(\int_{B(x,r)} |(\propto f)(y)+\beta g(y))|^{\frac{p}{t}}\, dy\right)^{\frac{1}{p/t}}$$

$$\leq \left(\int_{B(x,r)} |\propto f(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right)^{\frac{1}{p/t}} + \left(\int_{B(x,r)} |(\beta g(y))|^{\frac{p}{t}}\, dy\right)^{\frac{1}{p/t}}$$

وبالتالي:

$$\left(\frac{1}{\varphi(r} \int_{B(x,r)} |\propto f(y)+\beta g(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right)^{\frac{t}{p}} \leq \left(\frac{1}{|\varphi(r)|}\int_{B(x,r)} |\propto f(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$+\left(\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)} |\beta g(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

وبأخذ ال sup لطرفي المتراجحة الأخيرة نجد أن :

$$\|\propto f+\beta g\|_{L^{\rho,\varphi,t}} \leq |\propto|\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} + |\beta|\|g\|_{L^{\rho,\varphi,t}} < \infty$$

أي أن :

$$\Rightarrow \quad \alpha f+\beta g \in L^{\rho,\varphi,t}\,(R^n)$$

بالاعتماد على المبرهنة السابقة فإن المبرهنة التالية تبين أن الفضاء $L^{\rho,\varphi,t}\,(R^n)$ تشكل فضاءاً منظماً.

مبرهنة (2):

يشكل التابع:

$$\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} := \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \left[\frac{1}{\varphi(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right]^{\frac{t}{p}} \qquad [1]$$

نظيماً على الفضاء الخطي $L^{\rho,\varphi,t}\,(R^n)$

الإثبات:

1- $\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} \geq 0$ من أجل كل f من $L^{\rho,\varphi,t}\,(R^n)$

2- كما أن f=0 $\Leftrightarrow$ $\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} = 0$

3-نثبت فيما يلي أن : $\|\lambda f\|_{L^{\rho,\varphi,t}}=|\lambda|\,\|f\|$ من أجل كل f من $L^{\rho,\varphi,t}$ و λ من R

$$\|\lambda f\|_{L^{\rho\varphi t}} = \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \left\{\frac{1}{\varphi(r)}\int |(\lambda f)(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right\}^{t/p} = \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \left\{\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)} |\lambda f(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right\}^{t/p} =$$

$$\underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \left\{\frac{|\lambda|^{p/t}}{|\varphi(r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\right\}^{t/p} = |\lambda|\, \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0} \frac{1}{|\varphi(r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|^{\frac{p}{t}}\, dy\}^{t/p}$$

$=|\lambda|\,\|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}}$

4-نثبت متراجحة المثلث : $\|f+g\|_{L^{\rho,\varphi,t}} \le \|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} + \|g\|_{L^{\rho,\varphi,t}}$

ليكن f و g من $L^{\rho,\varphi,t}$ وبتطبيق متراجحة مينكوفسكي نجد:

$$\left(\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)} |f(y)+g(y)|^{p/t}\,dy\right)^{\frac{t}{p}} \le \left(\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)} |f(y)|^{p/t}\,dy\right)^{\frac{t}{p}} + \left(\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)} |g(y)|^{p/t}\,dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

وبأخذ sup لطرفي المتراجحة الاخيرة نجد أن:

$\|f+g\|_{L^{\rho,\varphi,t}} \le \|f\|_{L^{\rho,\varphi,t}} + \|g\|_{L^{\rho,\varphi,t}}$:

نتيجة (1):

من المبرهنة (1) والمبرهنة (2) ينتج أن :

$\left(L^{\rho,\varphi,t}(R^n), \|.\|_{L^{\rho,\varphi,t}}\right)$ فضاء منظم

وذلك لأننا وجدنا في المبرهنة (1) أن $L^{\rho,\varphi,t}$ يشكل فضاء خطياً فوق R ومن المبرهنة (2) وجدنا أن التابع $\|.\|_{L^{\rho,\varphi,t}}$ يشكل نظيماً على الفضاء الخطي $L^{\rho,\varphi,t}$ فينتج أن $\left(L^{\rho,\varphi,t}(R^n), \|.\|_{L^{\rho,\varphi,t}}\right)$ فضاء منظم

مبرهنة (3):

الفضاء $\left(L^{\rho,\varphi,t}(R^n), \|.\|_{L^{\rho,\varphi,t}}\right)$ فضاء باناخ

الاثبات:

إن $\left(L^{\rho,\varphi,t}(R^n), \|.\|_{L^{\rho,\varphi,t}}\right)$ فضاء منظم حسب النتيجة(1) ولنبرهن أنه تام .

لتكن $(f_n)_{n\ge1}$ متتالية أساسية في $L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$ وبما أن الفضاء $L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$ جزئي من $L^{\rho}(R^n)$ فإن $(f_n)_{n\ge1}$ متتالية أساسية في $L^{\rho}(R^n)$ وبما أن $L^{\rho}(R^n)$ فضاء تام فإنه يوجد $f \in L^{\rho}(R^n)$ يحقق المساواة:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^{\rho}} = 0$$

أي أن المتتالية n تملك نهاية هي f بقي أن نبرهن أن $f \in L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$:

من الفرض $(f_n)_{n\ge1}$ متتالية أساسية في $L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$ فهي تحقق الشرط التالي :

$\forall\varepsilon > 0 ; \exists\, n_0 = n(\varepsilon) : n,m > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\rho,\varphi,t} < \varepsilon$

ومنه يكون :

$$\|f_n - f_m\| = \underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0}\left[\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|f_n - f_m|^{\frac{p}{t}}\,d\mu(\tau)\right]^{\frac{t}{p}} < \varepsilon \quad ; \quad n,m > n_0$$

$$\left[\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|f_n - f_m|^{\frac{p}{t}}\,d\mu(\tau)\right]^{\frac{t}{p}} < \varepsilon \quad ; \quad n,m > n_0$$

وبجعل: $m \to \infty$ نحصل على التالي :

$$\underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0}\left[\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|f_n - f|^{\frac{p}{t}}\,d\mu(\tau)\right]^{\frac{t}{p}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\|f_n - f\right\| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن : $f_n - f \in L^{\rho,\varphi,t}$ من أجل كل $n > n_0$ وبما أن : $L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$ فضاء خطي يكون لدينا :

$$f = f_n - (f_n - f) \in L^{\rho,\varphi,t}(R^n)$$

المبرهنة التالية تدرس محدودية مؤثر كوشي الشاذ في فضاء موري مع الوسيط t

نذكر بعض التعاريف والمبرهنات المستخدمة:

يعرف المؤثر الأعظمي $M f(x)$ (Maximal operator) بالشكل : [3]

$$M f(x) = \underbrace{\sup}_{r>0} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

ويعرف المؤثر $M^{\#}$ بالشكل التالي : [3]

$$M^{\#} f(x) := \underbrace{\sup}_{r>0} \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| d\mu(y) \quad ; \quad f_{B(x,r)} = \int_{B(x,r)} f(y)\, d\mu(y)$$

مبرهنة مساعدة (1): [3]

ليكن (X, d, μ) فضاء قياس حيث $\mu(X) = \infty$ إذا كان $f \in L^{\rho,\varphi}$ و:

$C_1 . r^N \leq \mu B(x,r) \leq C_2 . r^N$ فإن:

$$(1) \qquad \|M f\|_{p,\varphi} \leq C \|M^{\#} f\|_{p,\varphi} \qquad ; 1 < P < \infty, \; 0 \leq M(\varphi) < N$$

$$(2) \quad \|M^{\#}(S_\Gamma f)^s\|_{\frac{p}{s},\varphi} \leq c\|(Mf)^s\|_{\frac{p}{s},\varphi} \qquad ; 0 < s < 1$$

$$(3) \qquad \|(S_\Gamma f)^s\|_{\frac{p}{s},\varphi} \leq \left\|M(S_\Gamma f)^s\right\|_{\frac{p}{s},\varphi} \qquad ; 0 < s < 1$$

مبرهنة(4):

إذا كان $f \in L^{\rho,\varphi,t}$ فإن :

$$(4) \qquad \|M f\|_{p,\varphi,t} \leq C \|M^{\#} f\|_{p,\varphi,t}$$

$$(5) \qquad \|M^{\#}(S_\Gamma f)^s\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \leq c\|(Mf)^s\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \qquad ; 0 < s < 1$$

$$(6) \qquad \|(S_\Gamma f)^s\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \leq \left\|M(S_\Gamma f)^s\right\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \qquad ; 0 < s < 1$$

البرهان:

بما أن :

$$\|M f\|_{p,\varphi} \leq C \|M^{\#} f\|_{p,\varphi}$$

أي أن :

$$\underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0}\left\{\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|Mf(y)|^{p}\, d\mu(y)\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C.\underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0}\left\{\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|M^{\#}f(y)|^{p}\, d\mu(y)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

باستبدال كل P ب $\frac{p}{t}$ نجد أن :

$$\underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0}\left\{\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|Mf(y)|^{\frac{p}{t}}\, d\mu(y)\right\}^{\frac{t}{p}} \leq C.\underbrace{\mathrm{Sup}}_{r>0}\left\{\frac{1}{\varphi(r)}\int_{B(x,r)}|M^{\#}f(y)|^{\frac{p}{t}}\, d\mu(y)\right\}^{\frac{t}{p}}$$

ومنه نجد أن:

$$\Rightarrow \|\mathrm{M}f(\mathrm{Y})\|_{p,\varphi,t} \leq c\,\|M^{\#}f(\mathrm{Y})\|_{p,\varphi,t}$$

وبنفس الطريقة يتم برهان (5) و (6) .

مبرهنة (5):

إذا كان Γ منحني كارلسون فإن مؤثر كوشي الشاذ $S_{\Gamma} f$ يكون محدود في الفضاء $L^{\rho,\varphi,t}(\Gamma)$ حيث:

$$0 \leq \varphi < 1\ ,\quad 1 < P < \infty$$

البرهان:

من تعريف النظيم على الفضاء $L^{\rho,\varphi,t}$ نجدأن :

$$\|f\|_{p,\varphi,t} = \|f^{s}\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \quad ; 0 < s < 1$$

وحسب المبرهنة (4) :

$$\|(S_{\Gamma}f)\|_{\rho,\varphi,t} = \|(S_{\Gamma}f)^{s}\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \leq \left\|\mathrm{M}(S_{\Gamma}f)^{s}\right\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \leq \|M^{\#}(S_{\Gamma}f)^{s}\|_{\frac{p}{s},\varphi,t}$$
$$\leq c\|(Mf)^{s}\|_{\frac{p}{s},\varphi,t}$$

$$; 0 < s < 1$$

وبالتالي:

$$\|(S_{\Gamma}f)\|_{p,\varphi,t} \leq c\|M^{\#}(S_{\Gamma}f)^{s}\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} \leq c\|(Mf)^{s}\|_{\frac{p}{s},\varphi,t} = c\|Mf\|_{p,\varphi,t}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى أن تكامل كوشي الشاذ محدود في فضاء موري المعمم بإدخال الوسيط t وكما أثبتنا المحدودية على منحني كارلسون .ونوصي بأن تتم الدراسة على أسر أخرى من المنحنيات مثل المنحنيات النظامية.

References:

1. Akbulut, A. (2012). On the boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces, Mathematica Bohemica,vol.137,No.1,27-43.
2. Alvarez, J and Perez, C. (1994).Estimates with A_∞weeights for various singular integral operators,Boll.Unione Mat.Ital.Sez.A (7) 8 (1),123-133.
3. Burtseva, E.(2017). Singular integral operator in generalized Morrey spaces the on curves in the complex plane, Mediterr. J. Math.
4. Gala, S.; Sawano, Y. and Thanka, H. (2015). Aremar on two generalized orlicz-Morrey Spaces . J. Approx. Theory ,Vol. 198, 1-9.

5. Hatano,Ikeda,Ishikawa and Sawano, Y.(2021).Boundedness of composition operators on Morrey spaces and weak Morrey spaces.J.Inequalities and Applications.
6. Komor, Y. and Shirai, S. (2009). Weighted Morry speces and a Singular integral operator, Math, Nachr, 282, 219-231.
7. Samko, N. (2009). Weighted Hardy and Singular operators in Morrey spaces. J. Math. Anal, Appl. 350(1),56-72.
8. Suleiman, Haider. (2020) A Study of the Overlapping of Some Subordinate Spaces, Master's thesis, University of Tartous, Faculty of Science, pp. 44-46.