Winning and Losing Positions and Some Grundy Values for the Game of Exact-2-Fibonacci NIM

Dr. Hadeel Samir Barbara*
Wajd Ali**

(Received 20 / 7 / 2022. Accepted 1 / 12 /2022)

□ ABSTRACT □

Fibonacci NIM is an impartial combinatorial game, usually played with a single pile of stones, Its analysis involves the Fibonacci numbers and the Zeckendorf representation of a natural number. In this paper we will deal a study and a mathematical analysis of the case of 2-pile and 3-pile with the condition that the stones are deleted from exactly two piles, and we find Grundy values for two piles (n_1, n_2; r_1, r_2) and the winning strategy which amounts to understanding positions of Grundy value 0, and we will calculate all the positions of Grundy value {0,1,2,3}, and use Fibonacci words to calculate all Grundy values for any position in which r_1 is {1,2,3,4,5}.

Keywords: NIM, Fibonacci NIM, Grundy Value, Fibonacci Word, Combinatorial Game.

* **Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. Hadeelsb@gmail.com**
****Postgraduate Student (Master), Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. wajdali1993@gmail.com**

أوضاع رابحة وخاسرة وبعض قيم غراندي للعبة Exact-2-Fibonacci NIM

د. هديل سمير برباره*

وجد علي **

(تاريخ الإيداع 20 / 7 / 2022. قُبِل للنشر في 1 / 12 /2022)

□ ملخّص □

Fibonacci NIM هي لعبة توافيقية متوازنة، عادةً تلعب بكومة واحدة من القطع، تحليلها يتضمن أعداد فيبوناتشي و تكرارية Zeckendorf للأعداد الطبيعية. سنتناول في هذا البحث دراسة وتحليل رياضي لحالة كومتين 2−pile وثلاث كومات 3-pile مع شرط حذف القطع من كومتين تماماً، ونوجد قيم غراندي من أجل كومتين $(n_1,n_2;r_1,r_2)$ واستراتيجية الربح التي تحتاج فهم الأوضاع التي قيم غراندي لها هي 0، وسنقوم بحساب كل الأوضاع لقيم غراندي $G = \{0 , 1 , 2 , 3\}$، واستخدام كلمات فيبوناتشي لحساب كل قيم غراندي لأي وضع فيه $r_1 = \{1,2,3,4,5\}$.

الكلمات المفتاحية: نيم، فيبوناتشي نيم، قيم غراندي، كلمات فيبوناتشي، لعبة توافيقية.

---

* مدرّس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية Hadeelsb@gmail.com

** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية wajdali1993@gmail.com

مقدمة:

فيبوناتشي نيم لعبة توافيقية بلاعبين، تحليلها لا يتضمن أعداد فيبوناتشي فقط، بل أيضاً تكرارية زيكندورف للأعداد الطبيعية، وتلعب عادةً على كومة واحدة من الأحجار(القطع)، القواعد نفسها لكلا اللاعبين بالتالي فهي لعبة متوازنة [1]، درست اللعبة من قبل Whinihan في [2] وأعطى استراتيجية ربح كاملة تعتمد على النظرية الشهيرة ل Zeckendorf، ثم قام Larsson و Salzedo في [1] بتوسيع تحليل Whinihan بحساب كل الأوضاع لقيم غراندي على الأكثر 3.

تدرس الكثير من الألعاب المتوازنة تحت عملية الجمع المنفصل، فإذا كانت اللعبتين G و H يلعبان مع بعضهما فإن الحركة في مجموعهما G + H تكون إما في G أو في H و ليس في كليهما [5,4,3,1]، لذلك قام Larsson و Salzedo في [6] بلعب فيبوناتشي نيم بعدة أكوام و وضعوا حلاً كاملاً لحالة كومتين 2-pile باستخدام كلمات فيبوناتشي.

لكن ماذا لو كان أحد الشروط أن يتم إزالة القطع من كومتين بالضبط بشكل إلزامي؟

ندرس في هذا البحث اللعبة التوافيقية المتوازنة الجديدة Exact-2-Fibonacci NIM بحيث تحوي الشرط الإضافي التالي: يتناوب اللاعبان إزالة القطع من كومتين بشكل إلزامي بدلاً من كومة واحدة.

قواعد اللعبة: تتكون اللعبة من مجموعة من الأكوام الحاوية على أحجار(أو قطع نقدية)، يتناوب اللاعبان إزالة القطع من كومتين بشكل إلزامي، بفرض اللاعب الأول اختار كومتين و أخذ منهما r_i , r_j قطعة فإن اللاعب التالي يأخذ من نفس الكومتين من 1 الى $2r_i$ و من 1 الى $2r_j$ قطعة، نستخدم الترميز $(n_1,n_2,\dots,n_k ; 2r_i , 2r_j)$ حيث $1 \le i , j \le k$ لنرمز إلى الوضع بأكوام أحجامها $n_1,n_2,\dots,n_k$ و العدد الأعظمي المسموح إزالته هو $2r_i$, $2r_j$، تنتهي اللعبة عندما لا يوجد حركة قانونية و اللاعب الذي يقوم باخر حركة هو اللاعب الرابح بطريقة اللعب الطبيعية Normal Play.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في أنه يوجد حلول بعض أوضاع اللعبة فيبوناتشي نيم في حال إضافة الشرط الجديد " أن إزالة القطع تتم من كومتين معاً وبشكل إلزامي " ويهدف البحث إلى وضع طريقة واضحة باستخدام كلمات فيبوناتشي لحساب كل قيم غراندي لكل الأوضاع التي شرط الحركة فيها أصغر أو يساوي 5.

طرائق البحث ومواده:

1.نظرية سبراغ–غراندي و قاعدة مكس Mex Rule [13,8,7,5,4,3,1]

من أجل أي لعبة متوازنة X فإن: Y مجموعة كل الأوضاع الناتجة من X ; $G(X) = \mathrm{mex}(\{G(Y)\})$

بالتالي فإن " أي لعبة متوازنة G تكافئ كومة نيم Nim من حجم $*n$ " أي من أجل معرفة قيمة أي لعبة متوازنة Grundy value واستراتيجية الربح لها يتم مكافأتها لكومة نيم Nim، حيث تتم عملية المكافأة باستخدام قاعدة المكس mex (minimum excludant) التي تنص على أنه إذا كانت خيارات لعبة G مكافئة لأكوام نيم Nim بأحجام من مجموعة S فإن G مكافئة لكومة نيم Nim من حجم n، حيث:

$$n = mex\,(S) = \min\{k \ge 0; k \notin S\}$$

2. الوضع الرابح N-position والوضع الخاسر P-position [13,9,8,6,1]

إذا كان الوضع الحالي للعبة G والوضع التالي `G فإن:

- $G \in N \Leftrightarrow \exists G'; G' \in P$: N-position
- $G \in P \Leftrightarrow \forall G'; G' \in N$: P-position

3. نظرية Zeckendorf [10,6,1] إن أي عدد صحيح موجب n يمكن أن يتم تمثيله بشكل وحيد كمجموع أعداد فيبوناتشي غير المتتالية وغير المكررة

$$n = z_1(n) + z_2(n) + \cdots + z_k(n)\ ;\ \ Z_1 < Z_2 < \cdots < Z_k$$

4. ملاحظة (1)[1] بفرض $Z_1(n) > k \geq 1$, $n > 1$، إذا كان $Z_1(k) = F_t$ فإن $Z_1(n\text{-}k)$ هو إما F_{t+1} أو F_{t-1}، بالعموم $Z_1(n\text{-}k) \leq 2k$ و إذا كان $k \geq 4$ فإن $Z_1(n\text{-}k) \leq 2k\text{-}2$.

5. أعداد فيبوناتشي [10] F_t هو عدد فيبوناتشي ذو الدليل t و تعطى أعداد فيبوناتشي الأولى

$$F_0 = 0\ , F_1 = 1\ , F_2 = 1\ ...$$

والعلاقة التكرارية $F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$ حيث $t \geq 1$

ومن خواصها $2F_t < F_{t+2}$ حيث $t \geq 2$ & $2F_t \geq F_{t+1}$ حيث $t \geq 1$

6. كلمة فيبوناتشي ... $W^{x,y} = f_0\ f_1\ f_2$ هي سلسلة من الحرفين {x,y} وفي [12,11,6] هناك طرق عديدة لتوليدها:

1) ليكن $S_0 = x\ , S_1 = xy \Leftarrow S_n = S_{n-1}\ S_{n-2}$ حيث $n \geq 2$.
2) كلمة فيبوناتشي هي السلسلة ... $f_0\ f_1\ f_2$ حيث

$$f_n = \begin{cases} x\ ;\ \ 1 \notin Z(n) \\ y\ ;\ \ 1 \in Z(n) \end{cases}$$

وبكلا الحالتين نحصل على كلمة فيبوناتشي xyxxyxyxxyxxyxyxxyxyxxy...

النتائج والمناقشة:

نفترض في دراستنا أن اللاعبين يلعبون بطريقة مثالية، أي أن كل من اللاعبين يحاول الفوز وفي حال استحالة الفوز فإن اللاعب يحاول تأخير خسارته، اللاعب الأول نسميه P_1 واللاعب الثاني P_2.

لتكن لعبة Exact-2-Fibonacci NIM ذات الوضع الابتدائي $(n_1,n_2,\ldots,n_p\ ;\ r_i\ ,\ r_j)$ حيث

$$1 \leq i \leq p\ ,\ 1 \leq j \leq p$$

1. كومة واحدة: وضع خاسر P-position للاعب الأول zero game والبرهان واضح من شرط اللعبة (إزالة القطع من كومتين).

2. كومتين: عندما افترضنا أن اللاعبين يلعبون بطريقة مثالية فهذا يعني أن اللاعبين يهدفون إلى الربح بالكومة الأصغر بالتالي الكومة الصغيرة تحدد الرابح مع المحافظة على إزالة أصغر عدد من الكومة الكبيرة.

1.2. الوضع $(n_1,n_2;r_1,r_2)\ ;\ n_1 \leq n_2$ هو N-position إذا و فقط إذا كان $n_1 \neq F_t\ ,\ r_1 \geq Z_1(n_1)$, والحركة الرابحة هي إزالة $Z_1(n_1)$ قطعة من n_1 و إزالة 1 قطعة من n_2.

البرهان: لتكن الكومة $n_1 \neq F_t$ فإن

$$n_1 = Z_1(n_1) + Z_2(n_1) + Z_3(n_1) + \cdots \neq F_t$$

P_1 يأخذ $Z_1(n_1)$ ويصبح حجم الكومة

$$n_1 - Z_1(n_1) = Z_2(n_1) + Z_3(n_1) + \cdots$$
$$= Z_1\big(n_1 - Z_1(n_1)\big) + Z_2\big(n_1 - Z_1(n_1)\big) + \cdots$$

P_2 يُسمح له بأخذ $2Z_1(n_1)$ على الأكثر حيث $Z_2(n_1) = Z_1(n_1 - Z_1(n_1)) > 2Z_1(n_1) \geq k$ حسب خواص أعداد فيبوناتشي ويصبح حجم الكومة

$$Z_2(n_1) - k + Z_3(n_1) + \cdots = Z_1(n_1 - Z_1(n_1)) - k + Z_2(n_1 - Z_1(n_1)) + \cdots \neq F_t$$

بعد عدة تكرارات نحصل على كومة بحجم 4 ودور اللاعب P1 الذي يكتب 3 + 1 = 4 ويأخذ 1 ويبقى 3.

P_2 يسمح له بأخذ 1 او 2 فقط

إذا اخذ 1 فإن P_1 يأخذ 2 ويفوز

إذا اخذ 2 فإن P_1 يأخذ 1 ويفوز

2.2. الوضع $(n_1,n_2;r_1,r_2)\ ;\ n_1 \leq n_2$ هو P-position إذا كان $F_t = n_1$.

البرهان: نعلم أن الوضع خاسر إذا وجدت حركة واحدة على الأقل تؤدي الى وضع رابح، فإذا كان لدينا الوضع $(n_1,n_2;r_1,r_2)$ بالتالي مهما كان العدد المحذوف k من n_1:

$k \neq F_{t-2}\ ,\ k \neq F_{t-1} \Leftarrow$ توجد حركة الى الوضع $(n_1 - k, n_2 - h; 2k, 2h) \in$ N-position حسب (1.2.4) و حسب الملاحظة (1) لأن $n_1 - k \neq F_i\ ,\ 2k \geq Z_1(n_1 - k)$ وبالتالي $(n_1,n_2;r_1,r_2) \in$ P-position.

$k = F_{t-1} \Leftarrow n_1 - k = F_{t-2}$ و يكون $2k > F_{t-2}$ و هو وضع رابح بالتالي $(n_1,n_2;r_1,r_2) \in$ P-position.

$k = F_{t-2} \Leftarrow n_1 - k = F_{t-1}$ و يكون $2k > F_{t-1}$ و هو وضع رابح بالتالي $(n_1,n_2;r_1,r_2) \in$ P-position.

3. ثلاث كومات:

1.3 .

$$n_1, n_2, n_3 \in \{F_t\ ;\ t = 0,1,2 \ldots\} \Rightarrow (n_1, n_2, n_3; r_i, r_j) \in P - position$$

البرهان: يمكن اعتبار كل كومة هي لعبة فيبوناتشي نيم منفصلة و بما أن الأكوام الثلاثة أحجامها أعداد فيبوناتشي فإن كل كومة منها بشكل منفصل هي لعبة خاسرة للاعب الأول، وبالجمع المنفصل لها $n_1+n_2+n_3$ نحصل على $(n_1, n_2, n_3; r_i, r_j) \in P - position$.

2..3

$$n_1, n_2, n_3 \notin \{F_t\ ;\ t = 0,1,2 \ldots\} \Rightarrow (n_1, n_2, n_3; r_i, r_j) \in N - position$$

البرهان: يمكن اعتبار كل كومة هي لعبة فيبوناتشي نيم منفصلة و بما أن الأكوام الثلاثة أحجامها ليست أعداد فيبوناتشي فإن كل كومة منها بشكل منفصل هي لعبة رابحة للاعب الأول P_1، و بالجمع المنفصل لها $n_1+n_2+n_3$ نحصل على $(n_1, n_2, n_3; r_i, r_j) \in N - position$.

بالاعتماد على نظرية زيكندورف نكتب حجمي الكومتين الصغيرتين بتمثيل زيكندورف ونحذف أصغر عدد فيبوناتشي في كل تمثيل.

3.3.

$$n_1, n_2 \notin \{F_t\ ;\ t = 0,1,2 \ldots\}, n_3 \in \{F_t\ ;\ t = 0,1,2 \ldots\} \Rightarrow (n_1, n_2, n_3; r_i, r_j) \in N - position$$

بالاعتماد على نظرية زيكندورف نكتب حجمي الكومتين $n_1\ ,\ n_2$ بتمثيل زيكندورف ونحذف أصغر عدد فيبوناتشي في كل تمثيل.

حسب (2.4) مهما كان حجم الكومة n_3 ففي أحد الخطوات عند نهاية أصغر كومة سيستلم اللاعب الثاني إما كومتين بحجمي عددين فيبوناتشي و هو وضع P-position له كما رأينا سابقا

أو كومتين بالوضع $(n - Z_1(n) - \ldots, n_3\ ;\ x\ ,\ r_j)\ ;\ x \leq Z_1(n - Z_1(n) - \ldots)$ وهو وضع P-position له بالتالي $(n_1, n_2, n_3; r_i, r_j) \in N - position$.

.4..3 $n_1, n_2 \in \{ F_t \;;\; t = 0,1,2 \ldots \}, n_3 \notin \{ F_t \;;\; t = 0,1,2 \ldots \}$

.1..4.3 $n_3 < n_1 , n_2 \Rightarrow (n_1 , n_2 , n_3; r_i, r_j) \in N - position$

اللاعب P_1 يطبق نظرية زيكندورف على الكومة n_3 ويجعل أحد الكومتين n_1 , n_2 تساوي 1 فيصبح اللاعب P_2 في وضع $(F_i ,1,Y)$ والذي بدوره سيعطي اللاعب P_1 الوضع (ليس فيبوناتشي < فيبوناتشي) وهو وضع رابح للاعب P_1 كما رأينا في (2.4)، حيث Y عدد طبيعي لا يمكن للاعب P_2 من وضعه الحالي تحويله الى عدد فيبوناتشي.

.2..4.3 $n_3 > n_1 , n_2$

إذا كان $n_3 > n_2 > n_1 \;,\; n_3 - n_2 < n_1$ فالوضع رابح للاعب P_1 و ذلك إذا لعب على الكومتين الصغيرة و الكبيرة بهدف أن يخسر الصغيرة و يستلم كومتين (فيبوناتشي < ليس فيبوناتشي)، و إلا فإن الوضع خاسر للاعب P_1.

.3..4.3 $n_1 < n_3 < n_2$

$$\Rightarrow (n_1 , n_2 , n_3; r_i, r_j) \in N - position$$

اللاعب P_1 يطبق زيكندورف على n_3 و يجعل $n_1 = 1$ فيضع اللاعب P_2 بالوضع $(1 , Y , n_2)$ والذي بدوره سيعطي اللاعب P_1 الوضع (ليس فيبوناتشي < فيبوناتشي) وهو وضع رابح للاعب P_1 كما رأينا في (2.4)، حيث Y عدد طبيعي لا يمكن للاعب P_2 من وضعه الحالي تحويله إلى عدد فيبوناتشي.

مثال: لتكن اللعبة ذات الوضع الابتدائي (9 , 8 , 5)

الجدول (1) خطوات ربح اللعبة ذات الوضع الابتدائي (9 , 8 , 5)

5	8	9	**P1**
4	8	8	**P2**
3	8	7	**P1**
1	8	5	**P2**
0	8	4	**P1**
0	7	3	**P2**
0	6	2	**P1**
خاسر ⇐ 0	5	0	**P2**

فيما يلي جدول يوضح بعض قيم غراندي لبعض أحجام الأكوام حيث $n_1 \le n_2$, $r_2 \le r_1$

	r1,r2	0,r2	1,r2	2,r2	3,r2	4,r2	5,r2	6,r2	7,r2	8,r2	9,r2	10,r2	11,r2	12,r2	13,r2	14,r2	15,r2	16,r2	17,r2	18,r2	19,r2	20,r2	21,r2	22,r2	23,r2	24,r2	25,r2	26,r2
n1,n2																												
0,n2		0	0	0	0	0	0	0																				
1,n2		0	1	1	1	1	1	1																				
2,n2		0	0	2	2	2	2	2																				
3,n2		0	0	0	3	3	3	3																				
4,n2		0	1	1	3	3	3	3																				
5,n2		0	0	0	0	0	4	5																				
6,n2		0	1	1	1	1	4	4																				
7,n2		0	0	2	2	2	4	4	4																			
8,n2		0	0	0	0	0	0	0	0	5																		
9,n2		0	1	1	1	1	1	1	1	5	5																	
10,n2		0	0	2	2	2	2	2	2	5	5	5																
11,n2		0	0	0	3	3	3	3	5	5	5	5	5															
12,n2		0	1	1	3	3	3	3	3	6	6	6	6	6														
13,n2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6													
14,n2		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	6												
15,n2		0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	6	6	6											
16,n2		0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7										
17,n2		0	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7									
18,n2		0	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7	7	7								
19,n2		0	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7	7	7							
20,n2		0	0	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7	7	7						
21,n2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7					
22,n2		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	8				
23,n2		0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	8	8	8			
24,n2		0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	8	8	8	8	8		
25,n2		0	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	8	8	8	8	8	
26,n2		0	0	0	0	0	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

مبرهنة 1: إذا كان $n_1 \le n_2$ ، $r_1 < n_1$ ، $r_2 < n_2$، فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 0$ إذا كان و فقط إذا كان $r_1 < Z_1(n_1)$.

البرهان: أولا سنبرهن أنه بخلاف ذلك سيكون وضع رابح (أكبر من 0)، أي أنه من أي وضع فيه العدد المسموح إزالته r_1 حيث $r_1 \ge Z_1(n_1)$ يوجد k_1 تحقق أن $k_1 \le r_1$ إذا حُذِفت يحصل اللاعب التالي على وضع $(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2)$ حيث سيكون $2k_1 < Z_1(n_1 - k_1) = Z_2(n_1)$ ولن يستطيع أن يحذف $Z_1(n_1 - k_1)$ حسب زيكندورف و يكون $G(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2) = 0$ وبالتالي $G(n_1,n_2;r_1,r_2) > 0$، وهذا العدد k_1 سيكون $Z_1(n_1)$، ثم سنبرهن أنه إذا كان $r_1 < Z_1(n_1)$ بالتالي لأجل أي $r_1 \ge k_1$ فإن $2k_1 \ge Z_1(n_1 - k_1)$ (حسب الملاحظة 1) بالتالي يكون $G(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2) > 0$ وبالتالي $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 0$ حسب قاعدة mex.

في مفهوم N−position و P−position هذا يعني أنه لأجل أي وضع رابح $(Z_1(n_1) \le r_1)$ N−position توجد حركة رابحة تؤدي إلى وضع خاسر للخصم $(Z_1(n_1) > r_1)$ P−position و لأجل أي وضع P−position فإن كل الحركات تؤدي إلى وضع N−position.

بفرض $Z_1(n_1) \le r_1$ توجد حركة هي حذف $Z_1(n_1)$ و نعلم أن $2Z_1(n_1) < Z_2(n_1) = Z_1(n_1 - Z_1(n_1))$ وذلك لأنها أعداد فيبوناتشي غير متتالية، حيث $Z_1(n_1)$ عدد فيبوناتشي و ليكن F_t ، $t \ge 2$ و $Z_2(n_1)$ أيضا عدد فيبوناتشي على الأقل يساوي F_{t+2} و بالتالي

$$Z_2(n_1) \ge F_{t+2} = F_{t+1} + F_t > 2F_t = 2Z_1(n_1)$$

أي $Z_1(n_1 - k_1) = Z_2(n_1) > 2Z_1(n_1) = 2k_1$ وعندما $k_1 = Z_1(n_1)$ فإن ما سبق محقق والحركة رابحة ويوجد وضع ناتج خاسر بالتالي الوضع الأصلي رابح $G(n_1,n_2;r_1,r_2) > 0$.

و هذا يثبت أن $G(n_1, n_2; r_1, r_2) = 0 \Leftarrow r_1 < Z_1(n_1)$

الان نفرض أن $k_1 \le r_1 < Z_1(n_1)$ وحسب الملاحظة (1) فإن $Z_1(n_1 - k_1) \le 2k_1$ ، بالتالي كل الأوضاع الناتجة رابحة أي أن الوضع الأصلي خاسر

$$k_1 \le r_1 < Z_1(n_1) \Rightarrow G(n_1 - k_1, n_2 - k_2 ; 2k_1, 2k_2) > 0 \Rightarrow G(n_1, n_2; r_1, r_2) = 0$$

الكومة الكبيرة مهما كانت فإن اللعب المثالي يقتضي حذف k_2 حيث $k_2 \le r_2 \le Z_1(n_2)$ الذي ينقل اللعبة إلى الوضع $(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2 k_1,2k_2)$ حيث $n_1 - k_1 \le n_2 - k_2$ مما يبقي الكومة الأصغر n_1 تحدد الرابح.

حالة خاصة: الوضع الابتدائي $(n_1,n_2;n_1-1,n_2-1)$ حيث $n_1 \le n_2$ هو وضع خاسر إذا كان n_1 عدد فيبوناتشي.

مبرهنة 2: إذا كان $r_2 \le r_1$ ، $r_2 < n_2$ ، $r_1 < n_1$ ، $n_1 \le n_2$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 1$ إذا و فقط إذا كان $Z_1(n_1) = 1$ ، $Z_1(n_1) \le r_1 < Z_2(n_1)$.

البرهان: البرهان مقسوم إلى قسمين:

1) إثبات أن $G = 1$ عندما $Z_1(n_1) = 1$ و $1 \le r_1 < Z_2(n_1)$

a) برهان وجود أوضاع ناتجة قيم غراندي لها 0.

b) برهان عدم وجود أوضاع ناتجة قيم غراندي لها 1.

2) نفي أن $G = 1$ عندما $Z_1(n_1) \ne 1$ وعندما $Z_2(n_1) \le r$.

حتى يكون $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 1$ يجب أن يوجد $1 \le k_1 \le r_1$ تحقق أن $G(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2) = 0$ أي يوجد وضع ناتج خاسر يساوي الصفر، وأن يكون لأجل كل $1 \le k_1 \le r_1$ فإن $G(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2) \ne 1$ أي أن كل الأوضاع الناتجة لا تساوي 1 (و ذلك حتى يكون حسب قاعدة mex يساوي 1).

لنبرهن أن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 0$، بفرض $Z_1(n_1) = 1$, $2 = 2r_1 < Z_2(n_1)$, حيث أن $Z_2(n_1) \neq 2$ لأن Z_1 , Z_2 غير متتاليين فإن $Z_2(n_1) = Z_1(n_1 - 1) > 2$ و بالتالي $G(n_1 - 1 , n_2 - k_2 ; 2 , 2k_2) = 0$ حسب المبرهنة(1)، بالتالي يوجد وضع صفري ناتج، و بالتالي الوضع الأصلي $G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 0$.

إذا كان $Z_2(n_1) = Z_1(n_1 - 1) \geq 3$ علما أن $Z_1(n_1) = 1$، حيث في غير ذلك فإن تمثيل زيكندورف سيحوي عددين فيبوناتشي متتالين وهذا مستحيل. سنبين الان أنه لكل k_1 حيث $Z_1(n_1 - 1) = Z_2(n_1) > k_1$ فإن الأوضاع الناتجة لا تساوي 1 أي $G(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2) \neq 1$.

نفرض أن $G(n_1 - k_1,n_2 - k_2 ; 2k_1,2k_2) = 1$ لأجل بعض قيم k_1 حيث $k_1 \leq r_1$ و أن

$$Z_1(n_1 - k_1) \leq 2k_1 < Z_2(n_1 - k_1) \quad \& \quad Z_1(n_1 - k_1) = 1$$

إذا كان $Z_1(n_1 - k_1) = 1$ فإن $3 \leq Z_2(n_1 - k_1) = Z_1(n_1 - k_1 - 1)$ حسب تمثيل زيكندورف

وحسب الملاحظة (1) يكون $3 \leq Z_2(n_1 - k_1) = Z_1(n_1 - k_1 - 1) \leq 2(1) = 2$

وهذا تناقض سببه الفرض الخاطئ $G(n_1 - k_1 , n_2 - k_2 ; 2k_1 , 2k_2) = 1$ بالتالي لا توجد حركات إلى أوضاع ذات قيم غراندي 1.

وحسب نظرية mex فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 1$ إذا كان $Z_1(n_1) = 1$, $Z_1(n_1) \leq r_1 < Z_2(n_1)$.

الان سنبرهن أنه إذا كان $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 1$ فإن $Z_1(n_1) = 1$, $Z_1(n_1) \leq r_1 < Z_2(n_1)$

بفرض <u>**$1 < Z_1(n_1)$**</u>، إذا كانت $r_1 < Z_1(n_1)$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 0$ حسب المبرهنة (1)،

أما إذا كانت $r_1 \geq Z_1(n_1)$ فيوجد حركة إلى الوضع $(n_1 - (Z_1(n_1) - 1) , n_2 - k_2 ; 2Z_1(n_1) - 2 , 2k_2)$

$$\Rightarrow Z_1(n_1 - Z_1(n_1) + 1) = 1$$
$$2Z_1(n_1) - 2 \leq Z_2(n_1 - Z_1(n_1) + 1) = Z_2(n_1)$$

Z_2 لم يتغير، Z_1 تغير و أصبح 1 أي يوجد وضع ناتج قيمته 1 و بالتالي الوضع الأساسي ليس 1، و بشكل اخر بما أن $G(n_1 - Z_1(n_1) + 1 , n_2 - k_2 ; 2Z_1(n_1) - 2 , 2k_2) = 1$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 1$.

بالتالي إذا كان $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 1$ فإن $Z_1(n_1) = 1$

أخيراً بفرض <u>**$Z_2(n_1) \leq r_1$**</u> , $Z_1(n_1) = 1$ بالتالي $G(n_1 - Z_2(n_1), n_2 - k_2 ; 2Z_2(n_1), 2k_2) = 1$

وحيث $2Z_2(n_1) < Z_3(n_1) = Z_2(n_1 - Z_2(n_1))$، أي أنه يوجد حركة إلى وضع قيمة غراندي له تساوي 1 و بالتالي $G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 1$.

اعتمدنا في البرهان على أنه يوجد وضع ناتج صفري ثم برهنا أن كل الأوضاع الناتجة لا تساوي 1 وبالتالي حسب نظريتي mex و سبراغ غراندي فإن قيمة غراندي 1، ثم نقض الفرض حيث برهنا أنه <u>بخلاف الفرض</u> ستكون كل الأوضاع الناتجة تساوي 1 فإن الوضع الحالي لا يساوي 1.

الكومة الكبيرة مهما كانت فإن اللعب المثالي يقتضي حذف k_2 حيث $k_2 \leq r_2 \leq Z_1(n_2)$ الذي ينقل اللعبة إلى الوضع $(n_1 - Z_1(n_1),n_2 - k_2 ; 2Z_1(n_1),2k_2)$ حيث $n_1 - Z_1(n_1) \leq n_2 - k_2$ مما يبقي الكومة الأصغر n_1 تحدد الرابح.

مبرهنة 3: إذا كان $n_1 \leq n_2$, $r_1 < n_1$, $r_2 < n_2$, $r_2 \leq r_1$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 2$ إذا و فقط إذا كان $Z_1(n_1) = 2$, $Z_1(n_1) \leq r_1 < Z_2(n_1)$.

البرهان: البرهان مقسوم إلى قسمين:

1) إثبات ان $G = 2$ عندما $Z_1(n_1) = 2$ و $2 \leq r_1 < Z_2(n_1)$

c) برهان وجود أوضاع ناتجة قيم غراندي لها 0 و 1.

d) برهان عدم وجود أوضاع ناتجة قيم غراندي لها 2.

2) نفي أن G = 2 عندما $Z_1(n_1) \neq 2$.

حتى يكون $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 2$ يجب أن توجد حركات إلى أوضاع ذات قيم غراندي 0 و 1 و لا توجد أي حركة تؤدي إلى وضع قيمته 2.

الان سنبين أنه إذا كانت $Z_1(n_1) = 2$, $2 \leq r_1 < Z_2(n_1)$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 2$

$$Z_1(n_1) = 2 \leq r_1 \Rightarrow G(n_1 - 2, n_2 - k_2\,; 4{,}2k_2) = 0$$

أي يوجد حركة إلى وضع صفري وذلك لأن $Z_1(n_1)$ و $Z_2(n_1)$ غير متتاليين فإذا كان $Z_1(n_1) = 2 \Leftarrow Z_2(n_1) \neq 3$ $\Leftarrow Z_2(n_1) \geq 5 \Leftarrow Z_1(n_1 - r_1) = 5 > 2r_1 = 4$ وبالتالي حسب المبرهنة (1) الوضع صفري.

$$Z_1(n_1 - 2) = Z_2(n_1) \geq 5 \Rightarrow G(n_1 - 1, n_2 - k_2; 2{,}2k_2) = 1$$

أي يوجد حركة إلى وضع position−1 وذلك لأنه بعد حذف 1 سيبقى $Z_2(n_1 - 1) = Z_2(n_1)$ نفسه، أما Z_1 يصبح 1 بدلاً من 2 بالتالي $Z_1(n_1 - 1) = 1$, $Z_1(n_1 - 1) < r_1 = 2 < Z_2(n_1 - 1)$ وبالتالي حسب المبرهنة (2) فالوضع الناتج يساوي 1.

إذا كان $Z_1(n_1 - 2) = Z_2(n_1) \geq 5$ علماً أن $Z_1(n_1) = 2$، حيث في غير ذلك فإن تمثيل زيكندورف سيحوي عددين فيبوناتشي متتالين و هذا مستحيل، سنبين الان أنه لكل k_1 حيث $k_1 < Z_2(n_1) = Z_1(n_1 - 2)$ فإن الأوضاع الناتجة لا تساوي 2 أي $G(n_1 - k_1\ , n_2 - k_2\,; 2k_1\ , 2k_2) \neq 2$.

نفرض أن $G(n_1 - k_1\ , n_2 - k_2\ ; 2k_1\ , 2k_2) = 2$ لأجل بعض k_1 حيث $k_1 \leq r_1$، سيكون لدينا فرضاً

$$Z_1(n_1 - k_1) \leq 2k_1 < Z_2(n_1 - k_1) \geq 5\ ,\ Z_1(n_1 - k_1) = 2$$

لكن إذا كان $Z_1(n_1 - k_1) = 2 \Leftarrow Z_1(n_1 - k_1 - 2) = Z_2(n_1 - k_1) \geq 5$.

وحسب الملاحظة (1) يكون $4 \leq 2(2) \leq Z_1(n_1 - k_1 - 2) = Z_2(n_1 - k_1) \geq 5$ وهذا تناقض وبالتالي لا توجد حركات إلى الأوضاع ذات قيم غراندي 2.

و حسب نظرية mex فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 2$ إذا كان $Z_1(n_1) = 2$, $Z_1(n_1) \leq r_1 < Z_2(n_1)$.

الان سنبرهن أنه إذا كان $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 2$ فإن $Z_1(n_1) = 2$, $Z_1(n_1) \leq r_1 < Z_2(n_1)$

نفرض $\underline{\boldsymbol{Z_1(n_1) \neq 2}}$، إذا كان $Z_1(n_1) = 1$ و $1 \leq r_1 < Z_2(n_1)$ بالتالي حسب المبرهنة (2) فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 1$.

الان نفرض أن $Z_1(n_1) = 1$ و $Z_2(n_1) \leq r$ بالتالي

$$G(n_1 - Z_2(n_1) + 1\,, n_2 - k_2\,; 2Z_2(n_1) - 2\,, 2k_2) = 2$$

لأنه يبقى $Z_1 = 1$ و يبقى من Z_2 ايضا 1 و مجموعهما 2 فيصبح $Z_1(n_1 - Z_2(n_1) + 1) = 2$ و يبقى Z_3 نفسه و حيث $Z_3(n_1) > 2Z_2(n_1)$ لأنهما غير متتاليين وبالتالي

$$2 = Z_1(n_1 - Z_2(n_1) + 1) \leq 2Z_2(n_1) - 2 < Z_2(n_1 - Z_2(n_1) + 1) \leq 8$$

بالتالي يوجد حركة إلى وضع بقيمة غراندي $2 \Leftarrow G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 2$.

الان نفرض أن $Z_1(n_1) > 2$ و $Z_1(n_1) \leq r_1 < Z_2(n_1)$ بالتالي

$$G(n_1 - Z_1(n_1) + 2\,, n_2 - k_2\,; 2Z_1(n_1) - 4\,, 2k_2) = 2$$

لأنه يصبح $Z_1 = 2$ و $2 = Z_1(n_1 - Z_1(n_1) + 2) \leq 2Z_1(n_1) - 4 < Z_2(n_1 - Z_1(n_1) + 2) \leq 8$

بالتالي يوجد حركة إلى وضع بقيمة غراندي $2 \Leftarrow G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 2$.

بالتالي إذا كان $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 2$ فإن $Z_1(n_1) = 2$.

أخيرا بفرض $\underline{\mathbf{Z_2(n_1) \le r_1}}$, $Z_1(n_1) = 2$ بالتالي $G(n_1 - Z_2(n_1), n_2 - k_2\,; 2Z_2(n_1), 2k_2) = 2$ وحيث $2Z_2(n_1) < Z_3(n_1) = Z_2\big(n_1 - Z_2(n_1)\big)$، أي أنه يوجد حركة إلى وضع قيمة غراندي له تساوي 2 و بالتالي $G(n_1,n_2;r_1,r_2) \neq 2$.

الكومة الكبيرة مهما كانت فإن اللعب المثالي يقتضي حذف r_2 حيث $r_2 \le Z_1(n_2)$ و الذي ينقل اللعبة إلى الوضع $(n_1 - r_1\ ,\ n_2 - r_2\ ;\ 2r_1\ ,\ 2r_2)$ حيث $n_1 - r_1 \le n_2 - r_2$.

مبرهنة 4: إذا كان $n_1 \le n_2\ ,\ r_1 < n_1\ ,\ r_2 < n_2\ ,\ r_2 \le r_1$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 3$ إذا و فقط إذا كان

إما $Z_2(n_1) \le r_1 < Z_3(n_1)\,, Z_2(n_1) = 3\,, Z_1(n_1) = 1$

أو $Z_1(n_1) \le r_1 < Z_2(n_1) - 1\,, Z_1(n_1) = 3$

البرهان: حتى يكون $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 3$ يجب أن توجد حركات الى الأوضاع 0 ، 1 ، 2 و لا توجد أي حركة الى الوضع 3.

(برهان إما): الان سنبين انه إذا كان $Z_1(n_1) = 1, Z_2(n_1) = 3, Z_2(n_1) \le r_1 < Z_3(n_1)$ فإن $G(n_1,n_2;r_1,r_2) = 3$.

حسب المبرهنة (1) إن $G(n_1 - 1\ ,\ n_2 - k_2\ ;\ 2\ ,\ 2k_2) = 0$ لأن $2 = r_1 < Z_1(n_1 - 1) = 3 = Z_2(n_1)$

حسب المبرهنة (2) إن $G(n_1 - 3\ ,\ n_2 - k_2\ ;\ 6\ ,\ 2k_2) = 1$ لأن $Z_2(n_1) = 3$ و $Z_3(n_1) \ge 8$ و $n_1 - 3 = 1 + Z_3(n_1) + Z_4(n_1) + \dots$ و $Z_1(n_1 - 3) = 1$ و $1 \le r_1 = 6 < Z_2(n_1 - 3) = Z_3(n_1) \ge 8$ وبالتالي توجد حركة إلى الوضع 1.

حسب المبرهنة (3) إن $G(n_1 - 2\ ,\ n_2 - k_2\ ;\ 4\ ,\ 2k_2) = 2$ لأنه بعد حذف 2 يبقى 1 من Z_2 و يبقى $Z_1 = 1$ ومجموعهما 2 فيكون $\dots + n_1 - 2 = 2 + Z_3(n_1) + Z_4(n_1) + \dots = 2 + Z_2(n_1 - 2) + Z_3(n_1 - 2)$ حيث $Z_1(n_1 - 2) = 2$ و $2 \le r_1 = 4 < Z_2(n_1 - 2)$ بالتالي يوجد حركة الى الوضع 2.

الان سنبين انه لا توجد حركات تؤدي الى الوضع 3، من الواضح كما سبق أن حذف قطعة او قطعتين لا يضعنا في الوضع 3.

إذا أردنا وضع قيمة غراندي له 3 بعد حذف k_1 حيث $3 \le k_1 < Z_3(n_1)$ بالتالي يجب أن يكون

إما $2k_1 < Z_3(n_1 - k_1)\,, Z_2(n_1 - k_1) = 3\,, Z_1(n_1 - k_1) = 1$

أو $2k_1 < Z_2(n_1 - k_1) - 1\,, Z_1(n_1 - k_1) = 3$

في الحالة الأولى لدينا $Z_3(n_1 - k_1) = Z_1(n_1 - k_1 - 4)$ وحيث $k_1 < Z_3(n_1) = Z_1(n_1 - 4)$ وبالتالي حسب الملاحظة (1) فإن $Z_3(n_1 - k_1) \le 2k_1$ وهذا يناقض الفرض (حالة إما).

في الحالة الثانية حسب الملاحظة (1) لدينا $Z_2(n_1 - k_1) = Z_1(n_1 - k_1 - 3) \le 2(k_1 - 1)$

$\Rightarrow Z_1(n_1 - k_1 - 3) \le 2\ (3 - 1) \le 2\ (k_1 - 1);\ 3 \le k_1 \Rightarrow Z_2(n_1 - k_1) + 2 \le 2k_1$

وهذا يناقض الفرض (حالة أو) $2k_1 < Z_2(n_1 - k_1) - 1$ وبالتالي لا توجد حركات الى الوضع 3.

(برهان أو): الان نفرض $Z_1(n_1) = 3\ ,\ Z_1(n_1) \le r_1 < Z_2(n_1) - 1$

حسب المبرهنة (1) فإن $G(n_1 - 3\ ,\ n_2 - k_2\ ;\ 6\ ,\ 2k_2) = 0$ لأن $6 < Z_1(n_1 - 3) = Z_2(n_1)$ بالتالي توجد حركة إلى وضع 0.

حسب المبرهنة(2) فإن $G(n_1 - 2, n_2 - k_2\ ;\ 4, 2k_2) = 1$ لأن $Z_2(n_1) \ge 8$ و $n_1 - 2 = 1 + Z_2(n_1) + Z_3(n_1) + \dots$ و $1 \le r_1 = 4 < Z_2(n_1 - 2)$ وبالتالي يوجد حركة الى وضع 1.

حسب المبرهنة (3) فإن $G(n_1 - 1 , n_2 - k_2 ; 2 , 2k_2) = 2$ لأن $n_1 - 1 = 2 + Z_2(n_1) + Z_3(n_1) + \dots$ و $Z_2(n_1 - 1) = Z_2(n_1) \geq 8$ و $Z_1(n_1 - 1) = 2$ و $2 \leq r_1 = 2 < Z_2(n_1 - 1)$ وبالتالي توجد حركة الى وضع 2.

إذا كان $k \leq 3$ وجدنا أن $G(n_1 - k_1 , n_2 - k_2 ; 2k_1 , 2k_2) \neq 3$ بالتالي يجب أن نفرض أن $k \geq 4$ و نضع أنفسنا في الحالة الأخيرة من الملاحظة (1).

إذا كان يوجد حركة الى الوضع $(n_1 - k_1 , n_2 - k_2 ; 2k_1 , 2k_2)$ بقيمة غراندي 3 يجب أن يوجد:

(a) إما $2k_1 < Z_3(n_1 - k_1) , Z_2(n_1 - k_1) = 3 , Z_1(n_1 - k_1) = 1$

(b) أو $2k_1 < Z_2(n_1 - k_1) - 1 , Z_1(n_1 - k_1) = 3$

في الحالة (a): $Z_3(n_1 - k_1) = Z_1(n_1 - k_1 - 4)$ وفي حال $k_1 + 1 < Z_2(n_1) = Z_1(n_1 - 3)$ فإن الملاحظة (1) تدل على أن $Z_3(n_1 - k_1) \leq 2(k_1+1) - 2 = 2k_1$ و هذا يناقض الفرض (a) و لذلك فإن $G(n_1 - k_1 , n_2 - k_2 ; 2k_1 , 2k_2) \neq 3$.

في الحالة (b): $Z_2(n_1 - k_1) = Z_1(n_1 - k_1 - 3)$ وحسب الملاحظة (1) فإن $Z_2(n_1 - k_1 - 3) \leq 2k_1$ $\Leftarrow Z_2(n_1 - k_1) \leq 2k_1$ وهذا يناقض الفرض (b) بالتالي لا توجد حركات الى وضع قيمة غراندي له 3

الان يجب أن نبين أنه لأجل أي وضع $(n_1,n_2 ; k_1,k_1)$ ليس من الشكلين المفروضين فإن $G(n_1,n_2 ; k_1,k_1) \neq 3$.

إذا كان $r_1 < 3$ و $n_1 = 1 + 3 + Z_3 + \dots$ يوجد على الأكثر حركتين و بالتالي يوجد على الأكثر قيمتين غراندي ناتجة عن الحركات و بالتالي حسب نظرية mex فإن $G(n_1 , n_2 ; k_1 , k_1) < 3$.

هذا صحيح أيضا عندما $r_1 < 3$ و $n_1 = 2 + Z_2 + \dots$

الان إذا كان $r_1 \geq Z_3(n_1)$ و $n_1 = 1 + 3 + Z_3 + \dots$ بالتالي نستطيع حذف $Z_3(n_1)$ قطعة لنحصل على الوضع $(n_1 - Z_3(n_1) , n_2 - k_2 ; 2Z_3(n_1) , 2k_2)$ و الذي قيمة غراندي له 3.

بشكل مشابه إذا كان $r_1 \geq Z_2 - 1$ و $n_1 = 3 + Z_2 + \dots$ بالتالي نستطيع حذف $Z_2 - 1$ قطعة لنحصل على الوضع $(n_1 - Z_2(n_1) + 1 , n_2 - k_2 ; 2Z_2(n_1) - 2 , 2k_2)$ و الذي قيمة غراندي له 3، بالتالي هذه الحالات ليس لها قيمة غراندي 3.

الان نفرض $Z_2(n_1) \geq 5$ و $n_1 = 1 + Z_2(n_1) + \dots$:

إذا كان $r_1 < Z_2 \Leftarrow G(n_1 , n_2 ; r_1 , r_2) = 1$

إذا كان $r_1 \geq Z_2 \Leftarrow$ توجد حركة الى الوضع $(n_1 - Z_2 +2 , n_2 - k_2 ; 2Z_2 - 4 , 2k_2)$ و الذي قيمة غراندي له 3 و بالتالي $G(n_1 , n_2 ; k_1 , k_1) \neq 3$.

الان نفرض $n_1 = 2 + Z_2 + \dots$:

إذا كان $r_1 < Z_2 \Leftarrow G(n_1 , n_2 ; r_1 , r_2) = 2$

إذا كان $r_1 \geq Z_2 \Leftarrow$ توجد حركة إلى الوضع $G(n_1 - Z_2(n_1) +1 , n_2 - k_2 ; 2Z_2 - 2 , 2k_2) = 3$

و بالتالي $G(n_1 , n_2 ; k_1 , k_1) \neq 3$.

أخيرا نفرض أن $Z_1(n_1) \geq 5$:

إذا كان $r_1 < Z_1(n_1) \Leftarrow G(n_1 , n_2 ; r_1 , r_2) = 0$

إذا كان $r_1 \geq Z_1(n_1) \Leftarrow$ توجد حركة الى الوضع $G(n_1 - Z_2(n_1) +3 , n_2 - k_2 ; 2Z_2 - 6 , 2k_2) = 3$

و بالتالي $G(n_1 , n_2 ; k_1 , k_1) \neq 3$.

4.4. كلمات فيبوناتشي و قيم غراندي[12,11,6]

كلمة فيبوناتشي هي ...xyxxyxyxxyxxyxyxxyxyxxy، باستبدال كل x ب 0 وكل y ب 1 نحصل على كلمة فيبوناتشي على الحرفين {0,1} هي

0100101001001010010100100...

ملاحظة (2): كل كلمة فيبوناتشي مؤلفة من u حرف وبطول F_{u+i} حيث $i \geq 2$ تكرر نفسها مرتين متتاليتين.

010 010 ; $F_4 = 3$ بطول $u = 2 , i = 2$

01001 01001 ; $F_5 = 5$ بطول $u = 2 , i = 3$

01001010 01001010 ; $F_6 = 8$ بطول $u = 2 , i = 4$

01201 01201 ; $F_5 = 5$ بطول $u = 3 , i = 2$

01201012 01201012 ; $F_6 = 8$ بطول $u = 3 , i = 3$

0120101201201 0120101201201 ; $F_7 = 13$ بطول $u = 3 , i = 4$

ملاحظة (3): كل كلمة فيبوناتشي طولها أكبر او يساوي F_t مقسومة الى كلمتين متصلتين بأطوال (F_{t-1} , F_{t-2}) وأيضا مقسومة الى 3 كلمات متصلة بأطوال $(F_{t-2} , F_{t-3} , F_{t-2})$.

لتكن S_0 , S_1 بالتالي

$S_2 = S_1S_0$, $S_3 = S_2S_1 = S_1S_0S_1$, $S_4 = S_3S_2 = S_2S_1S_2$

ملاحظة (4): أصغر كلمة فيبوناتشي بحرفين {0,1} هي $S_2 = 010$ حيث

$S_0 = 0 , S_1 = 01 \Rightarrow S_2 = 01\ 0 \Rightarrow S_3 = 010\ 01 \Rightarrow S_4 = 01001\ 010$

أي يمكن توليد الكلمة كاملة بالعلاقة التكرارية $S_n = S_{n-1} S_{n-2}$.

نتيجة (1): يمكن توليد كلمة فيبوناتشي ب 3 أحرف بطول أكبر او يساوي $F_{2+3} = 5$ من كلمة فيبوناتشي بحرفين بإجراء التحويل

$$(T_1)\ F_i \ \rightarrow F_{i+1}\ ; (1\ \rightarrow 2\ , 0\ \rightarrow 01)$$
$$010\ \rightarrow 01201$$
$$01001\ \rightarrow 01201012$$

نتيجة (2): يمكن توليد كلمة فيبوناتشي ب 4 أحرف بطول أكبر او يساوي $F_{2+4} = 8$ من كلمة فيبوناتشي ب 3 أحرف بإجراء التحويل

$$(T_2)\ F_i \ \rightarrow F_{i+1}\ ; (2 \rightarrow 33\ , 0 \rightarrow 01\ , 1 \rightarrow 2)$$
$$01201 \rightarrow 01233012$$
$$01201012 \rightarrow 0123301201233$$

نتيجة (3): يمكن توليد كلمة فيبوناتشي ب 5 أحرف بطول أكبر أو يساوي $F_{2+5} = 13$ من كلمة فيبوناتشي ب 4 أحرف بإجراء التحويل

$$(T_3)\ F_i \rightarrow F_{i+1}\ ; \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 233 \\ 33 \rightarrow 444 \end{cases}$$
$$01233012 \rightarrow 0123344401233$$
$$0123301201233 \rightarrow 012334440123301233444$$

نتيجة (4): يمكن إيجاد قيمة غراندي لأي وضع Exact−2−Fibonacci NIM فيه $r_1 = 1$، أي لأي وضع $(n_1,n_2 ; 1,r_2)$ و ذلك بكتابة كلمة فيبوناتشي على الحرفين $\{0,1\}$

$$f_0f_1f_2f_3f_4 \dots = 01001 \dots$$

و يكون $G(n_1, n_2 ; 1, r_2) = f_{n_1}\ ;\ n_2 \geq n_1 \geq 1$

نتيجة (5): يمكن إيجاد قيمة غراندي لأي وضع Exact−2−Fibonacci NIM فيه $r_1 = 2$، أي لأي وضع $(n_1, n_2 ; 2, r_2)$ و ذلك بكتابة كلمة فيبوناتشي على الحرفين$\{0,1\}$و إجراء التحويل (T_1) للحصول على كلمة فيبوناتشي على الاحرف$\{0,1,2\}$.

$$f_0f_1f_2f_3f_4 \dots = 01201 \dots$$

و يكون $G(n_1, n_2 ; 2, r_2) = f_{n_1}\ ;\ n_2 \geq n_1 \geq 2$

نتيجة (6): يمكن إيجاد قيمة غراندي لأي وضع Exact−2−Fibonacci NIM فيه $r_1 = 3$ او $r_1 = 4$، أي لأي وضع $(n_1, n_2 ; 3, r_2)$ او $(n_1, n_2 ; 4, r_2)$ و ذلك بكتابة كلمة فيبوناتشي على الحرفين $\{0,1\}$ و إجراء التحويلين (T_1) ثم (T_2) للحصول على كلمة فيبوناتشي على الاحرف $\{0,1,2,3\}$.

$$f_0f_1f_2f_3f_4f_5f_6f_7 \dots = 01233012 \dots$$

و يكون $G(n_1, n_2 ; 3, r_2) = f_{n_1}\ ;\ n_2 \geq n_1 \geq 3$

$$G(n_1, n_2 ; 4, r_2) = f_{n_1}\ ;\ n_2 \geq n_1 \geq 4$$

نتيجة (7): يمكن إيجاد قيمة غراندي لأي وضع Exact−2−Fibonacci NIM فيه $r_1 = 5$ أي لأي وضع $(n_1, n_2 ; 5, r_2)$ و ذلك بكتابة كلمة فيبوناتشي على الحرفين $\{0,1\}$ و إجراء التحويلات (T_1) ثم (T_2) ثم (T_3) للحصول على كلمة فيبوناتشي على الأحرف$\{0,1,2,3,4\}$.

$$f_0f_1f_2f_3f_4f_5f_6f_7 \dots = 01233444 \dots$$

و يكون $G(n_1, n_2 ; 5, r_2) = f_{n_1}\ ;\ n_2 \geq n_1 \geq 5$

يمكن ملاحظة و برهان النتائج السابقة من الجدول(2) و بالاستقراء الرياضي على n_1 .

الاستنتاجات والتوصيات:

قدّمنا في هذه الورقة البحثية دراسة وتحليل رياضي لحالة كومتين 2−pile وثلاث كومات 3−pile من لعبة Exact−2−Fibonacci NIM مع شرط حذف القطع من كومتين تماماً، وأوجدنا قيم غراندي من أجل كومتين $(n_1,n_2;r_1,r_2)$، وقمنا بحساب كل الأوضاع لقيم غراندي $G = \{0, 1, 2, 3\}$، واستخدام كلمات فيبوناتشي لحساب كل قيم غراندي لأي وضع فيه $r_1 = \{1,2,3,4,5\}$، وسنقوم لاحقاً بدراسة حالة 4−pile وحساب قيم غراندي لأي وضع فيه $r_1 \geq 6$ في حالة 2−pile.

References:

[1] Larsson, U., & Rubinstein-Salzedo, S. Grundy values of Fibonacci nim. *International Journal of Game Theory*, *45*(3), (2016), 617-625.
[2] Whinihan, M. J. Fibonacci nim. Fibonacci Quart, 1(4), (1963), 9-13.
[3] Grundy, P. M. Mathematics and games. *Eureka*, *2*, (1939), 6-9.
[4] Sprague, R. Über zwei abarten von Nim. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, *43*, (1937), 351-354.
[5] Sprague, R. Über Mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, *41*, (1935), 438-444.
[6] Larsson, U., & Rubinstein-Salzedo, S. Global Fibonacci nim. *International Journal of Game Theory*, *47*(2), (2018), 595-611.
[7] Berlekamp, E, R., Conway, J, H., & Guy, R, K. *Winning ways for your mathematical plays*. Vol. 1. A K Peters, Ltd., Natick, MA, second edition, (2001).
[8] Barbara,Hadeel. *Create HIM, the adjusted NIM game, and analyses its winning strategy*. Syria: Aleppo University, (2013).
[9] Albert, M., Nowakowski, R., & Wolfe, D., *Lessons in play: an introduction to combinatorial game theory*. CRC Press. (2007).
[10] E. Zeckendorf. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, 41, (1972), 179-182.
[11] Knuth, D, E., The art of computer programming. Vol. 1. Addison-Wesley, Reading, MA, Fundamental algorithms, Third edition, (1997).
[12] Zhou, C. Computer Implementation of Multiple Fibonacci Nim.
[13] Boros, E., Gurvich, V., Ho, N. B., Makino, K., & Mursic, P. On the Sprague–Grundy function of Exact k-Nim. *Discrete Applied Mathematics*, *239*, (2018), 1-14.