مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (20) العدد (7)1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (20) No (7) 1998

دراسة تحليلية لمعادلة ديراك مع كمون تنسوري

الدكتور أحمد بيشاني*

(قبل للنشر في 1998/3/9)

□ الملخّص □

يوجد في الفيزياء النووية الكثير من الظواهر التي يمكن تفسيرها فقد من وجهة نظر الفيزياء النسبية . وهذا يشير إلى ضرورة المتابعة في دراسة الظواهر النسبية . معظم هذه الدراسات النظرية تتم بمساعدة معادلة ديراك التي تصف حركة الجسيمات الحرة والأهم من ذلك أن هذه المعادلة تصف الجسيمات التي تملك سبيناً لا يساوي عدداً صحيحاً .

تم دراسة معادلة ديراك مع كمون تنسوري فقط ، وحولت إلى شكل شبيه بمعادلة شرودنغر النسبية . وقد تم الحصول من خلال هذه الدراسة على القيم الخاصة للهاميلتوني والقيم الخاصة للطاقة . كما لوحظ أيضاً إمكانية بناء الطيف الطاقي للهاملتوني . وتمت المقارنة مع معادلة شرودنغر التي تحوي كمون هزاز توافقي فكانت النتائج متطابقة .

*أستاذ في كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (20) العدد (7)1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (20) No (7) 1998

Analytical study for dirac equation using tensor potential

Dr.Ahmad Bishani*

(Accepted 9/3/1998)

□ ABSTRACT □

There are lot of phenomena in nuclear physics which could be analyzed by relative physics . This affirms the importance of studying relative phenomena . Dirac equation plays a remark-eable role in describtion of the movement of free particles and particles which have not an integer number spin . Dirac equation has been studied with only the tensor potential and changed into a shape like Schrodinger relative equation .

Hamiltanion eigen value and eigen function are got . The comparison with Schrodinger Equation which contains harmonic oscillation potential was made , the results were the same

*prof at physic department – faculty of sciences – tishreen university – lattakia- Syria.

مقدمة :

كما هو معلوم في الفيزياء النووية يوجد الكثير من الظواهر التي يمكن وصفها أو تفسيرها من وجهة نظر الفيزياء النسبيه . وهذا يؤكد على ضرورة المتابعه في دراسة الظواهر النسبيه . في هذه الدراسه سوف نتعامل مع معادلة ديراك التي تكتب بالشكل التالي [1] :

$$\left[E-(\vec{\alpha}\,.\,\vec{p})-\beta m\right]\psi(\vec{r})=V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \qquad (1)$$

مستخدمين جملة الوحدات الطبيعية أي $h = c = 1$ إن هاميلتون هذه المعادلة يعطى بالعلاقة التالية :

$$\vec{H}=(\vec{\alpha}\,.\,\vec{p})+\beta m+V(\vec{r}) \qquad (2)$$

حيث α هي مصفوفة ديراك وتملك الشكل التالي :

$$\beta=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \alpha=\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

و σ هي مصفوفة باولي.

في دراسة سابقة [2] بينا أن الكمون $V(\vec{r})$ الذي يحوي كل التأثيرات المتبادلة الممكنه يمكن أن يكتب بالشكل التالي :

$$V(\vec{r})=\begin{pmatrix} V_{11}(\vec{r}) & i(\vec{\sigma}\,.\vec{n})u(r) \\ -i(\vec{\sigma}\,.\vec{n})u(r) & V_{22}(r) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

حيث $n=\frac{\vec{r}}{r}$ و σ مصفوفة باولي . إن هذا الكمون هرميتي أي $V=V^{+}$ ولا متغير بالنسبة للتحويلات الفضائية وكذلك بالنسبة لتحويلات الزمن [3] .

هدف الدراسة هو دراسة معادلة ديراك مع كمون تنسوري ، لذلك نعتبر أن الحد القطري في الكمون (3) معدوم أي $0 = V_{11}(\vec{r}) = V_{22}(\vec{r})$

في ظل هذه الفرضيه سوف نحاول تحويل معادلة ديراك إلى معادلة شبيهه بمعادلة شرودنفر النسبويه . هذا يساعد في دراسة الطيف الطاقي وتحديد القيّم الخاصه للطاقة . وكذلك نتبيان أن المعادلة التي نعمل عليها تؤدي إلى معادلة شبيهه بمعادلة شرودنفر للهزاز التوافقي وسوف نبين أن النتائج التي حصلنا عليها تتطابق مع النتائج المعروفة للهزاز التوافقي .

2- الدراسة النظرية والنتائج :

نأخذ الكمون $V(\vec{r})$ بالشكل التالي :

$$V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & i(\vec{\sigma}.\vec{n})u(r) \\ -i(\vec{\sigma}.\vec{n})u(r) & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

عند ذلك المعادلة (1) تكتب بالشكل التالي :

$$\begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\vec{p} & E+m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i(\vec{\sigma}.\vec{n})u(r) \\ -i(\vec{\sigma}.\vec{n})u(r) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

حيث أن $\varphi(\vec{r})$ و $\chi(\vec{r})$ المركبة الكبيرة والمركبة الصغيرة للتابع $\psi(\vec{r})$ لأن

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

المعادلة (5) تكتب بشكل جملة المعادلتين التاليتين :

$$(E-m)\varphi(\vec{r}) - (\vec{\sigma}\vec{p})\chi(\vec{r}) = i(\vec{\sigma}.\vec{n})u(r)\chi(\vec{r})$$

$$(E+m)\chi(\vec{r}) - (\vec{\sigma}\vec{p})\varphi(\vec{r}) = -i(\vec{\sigma}.\vec{n})u(r)\varphi(\vec{r}) \qquad (6)$$

في جملة المعادلتين السابقتين إذا حسبت $\chi(\vec{r})$ بدلالة $\varphi(\vec{r})$ وعوضت في المعادلة الأولى نحصل على المعادلة التالية :

$$\{-p^2 + (E-m)(E+m)\}\varphi(\vec{r}) = (\sigma p)(\sigma.n)(-iur)\varphi(\vec{r}) +$$
$$+ i(\sigma.n)u(r)(\sigma p)\varphi(\vec{r}) + (iu(r))(-iu(r))\varphi(\vec{r})$$

المعادلة السابقة يمكن أن تكتب بالشكل التالي :

$$\left\{-p^2+(E+m)(E-m)\right\}\varphi(\vec{r})=$$

(7)

$$u^2(r)\varphi(\vec{r})-\frac{2u(r)}{r}\left(\vec{\sigma}.\vec{\ell}\right)\varphi(\vec{r})-\frac{du(r)}{dr}\varphi(\vec{r})$$

حيث التابع $\varphi(\vec{r})$ هو المركبة الكبيرة للتابع $\psi(\vec{r})$ وذلك كما أشرنا في بداية هذا العمل .

الآن في المعادلة السابقة يمكن الوصول إلى المعادلة الشعاعية وذلك إذا أخذنا بعين الاعتبار أن

$$\vec{\sigma}\vec{\ell}=-(\chi+1) \quad \text{حيث} \quad \chi=\pm(j+1)$$

عند ذلك المعادلة (1) التي آلت إلى (7) يمكن ان تكتب بالشكل التالي [4] :

$$\left\{-\frac{d2}{dr^2}+\frac{\chi(\chi+1)}{r^2}-2mE_s+\Gamma(\chi.r)\right\}F_{j1}(r)=0 \qquad (8)$$

حيث :

$$\Gamma(\chi.r)=\frac{2(\chi u(r))}{r}-\frac{du(r)}{dr}+u^2(r) \qquad (9)$$

و

$$E_s=\frac{(E+m)(E-m)}{2m}$$

إن المعادلة (8) تمثل معادلة تامة التناظر في الميكانيك الكوانتي وهذا يقودنا إلى كتابة الهاملتون التام التناظر بالشكل التالي :

$$H_{\pm}=-\frac{d2}{dr^2}+V_{\pm}(r) \qquad (10)$$

استناداً إلى المعادلة (9) نكتب

$$V_{+}=\frac{1}{4}\left(\frac{df}{dr}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d2f}{dr^2}=\Gamma(\chi.r)+\frac{\chi(\chi+1)}{r^2} \qquad (11)$$

إن χ الواردة في المعادلة (8) تعطى بالشكل التالي :

$$\chi=\ell(\ell+1)-j(j+1)-\frac{1}{4}=\pm\left(j+\frac{1}{2}\right)$$

حيث j العزم الكلي والذي يعبر عنه من خلال العزم المداري والعزم السبيني بالشكل التالي :

$\hat{j} = \hat{\ell} + \hat{s}$ بإستخدام القيم الخاصة للمؤثرات j^2 و ℓ^2 و S^2 يمكن أن نكتب [5-7] .

$$2\ell s = \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

وبالتالي : $\ell s = -\frac{\chi+1}{2}$ أو $\ell\sigma = -(\chi+1)$

وبالتالي $\ell(\ell+1) = \chi(\chi+1)$ وكذلك

$j = \ell - \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \ell = \chi$ وكذلك عندما $j = \ell + \frac{1}{2}$

نجد أن $\chi = -(\ell+1)$

إن حل المعادلة (11) يعطى بالشكل التالي :

$$f(r) = 2\int u(r)dr + 2\chi\ell nr \qquad (12)$$

عندئذ نستطيع أن نكتب عبارة الكمون V_- بالشكل التالي :

$$V_-(r) = \frac{1}{4}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d2f}{dr^2} = \Gamma(\chi.r) + \frac{2du}{dr} + \frac{\chi(\chi-1)}{r^2} \qquad (13)$$

نوجد الفرق بين V_+ و V_- نجد :

$$V_+ - V_- = -2\frac{du}{dr} + \frac{2\chi}{r^2} = -2\frac{d}{dr}\left(u + \frac{\chi}{r}\right) \qquad (14)$$

لندخل الرمز التالي $W = -u - \frac{\chi}{r}$ عند ذلك (14) تكتب بالشكل التالي : $V_+ - V_- = 2\frac{dw}{dr}$

التابع الموجي $\psi_+(\chi)$ للحالة الأساسية يكتب بالشكل :

$$\psi_+(\chi) = ce^{-\frac{1}{2}f} = ce^{-\int u(r)dr - \chi\ell nr} \qquad (15)$$

في الحقيقة هذا التابع يحقق المعادلة $H_+(\chi)\psi_+(\chi) = 0$ وذلك من أجل أي قيمة لـــ χ

ولكن من أجل $\chi > 0$ هذا التابع غير محدد عند ذلك $\psi_+(\chi)$ يملك الشكل التالي :

$$\psi_+(\chi) = \frac{c}{r^\chi}e^{\int u(r)dr} \qquad (16)$$

لهذا السبب من الضروري أن نأخذ فقط χ السالبة عند ذلك نكتب :

$$\psi_+(\chi) = ce^{-\frac{1}{2}f} = ce^{-\int u(r)dr + |\chi| \ell nr} \qquad (17)$$

وبالتالي التابع الموجي للحالة الصفرية يكتب بالشكل :

$$\psi_+(|\chi|) = cr^{|\chi|}e^{-\int u(r)dr} \qquad (18)$$

من أجل $u(r)$ والتي من أجلها $\psi_+(\chi)$ يتناقص بشكل أسي ، التابع $\psi_+(-|\chi|)$ من الممكن أن يكون محدداً. على سبيل المثال هذا محقق من أجل $u=\alpha r$ حيث α ثابت .

لنبين الأن أن $\psi_+(\chi)$ يصبح تابع خاص للهاملتون $H_+(\chi)$ لأجل كل قيم χ وذلك بالشكل التالي :

$$\frac{d\psi_+(\chi)}{dr} = ce^{-\int u(r)dr - \chi \ell nr}\left(-u(r) - \frac{\chi}{r}\right) \qquad (19)$$

نوجد المشتق الثاني :

$$\frac{d2\psi_+(\chi)}{dr^2} = ce^{-\int u(r)dr - \chi \ell nr}\left\{\left(-u - \frac{\chi}{r}\right)^2 + \left(-\frac{du}{dr} + \frac{\chi}{r^2}\right)\right\} =$$

$$= ce^{-\int u(r)dr - \chi \ln r}\left\{u^2 + \frac{2\chi u}{r} - \frac{du}{dr} + \frac{\chi(\chi+1)}{r^2}\right\}$$

وبالتالي $\frac{d2\psi_+(\chi)}{dr^2}$ يكتب بدلالة $\Gamma(\chi, r)$ بالشكل التالي :

$$\frac{d2\psi_+(\chi)}{dr^2} = \left\{\Gamma(\chi.r) + \frac{\chi(\chi+1)}{r^2}\right\}\psi_+(\chi) \qquad (20)$$

الأن نستطيع أن نكتب $H_+(\chi)\psi_+(\chi)$ بالشكل التالي :

$$H_+(\chi)\psi_+(\chi) = \left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dr^2}\right\}\psi_+(\chi) =$$

$$= \left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \Gamma(\chi.r) + \frac{\chi(\chi+1)}{r^2}\right\}\psi_+(\chi) = 0 \qquad (21)$$

وهكذا بينا أن $H_{+}(\chi)\psi_{+}(\chi) = 0$ هذا يعني أن كل القيم الخاصة تساوي الصفر .الهاملتوني $H_{-}(\chi)$ بأخذ V. يكتب بالشكل التالي :

$$H_{-}(\chi) = -\frac{d^2}{dr^2} + \left(u^2 + \frac{2\chi u}{r} + \frac{\chi^2}{r^2} + \frac{du}{dr} - \frac{\chi}{r^2}\right) \qquad (22)$$

ختاماً $H_{-}(\chi)$ يكتب بالشكل التالي:

$$H_{-}(\chi) = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\chi(\chi-1)}{r^2} + \Gamma(\chi.r) + 2\frac{du}{dr} \qquad (23)$$

وهكذا في مسألتنا هذه حصلنا على الهاملتوني :

$$H_{+}(\chi) = -\frac{d^2}{dr^2} + \Gamma(\chi,r) + \frac{\chi(\chi+1)}{r^2} \qquad (24)$$

$$H_{-}(\chi) = -\frac{d^2}{dr^2} + \Gamma(\chi,r) + \frac{\chi(\chi-1)}{r^2} + 2\frac{du}{dr} \qquad (25)$$

لنوجد الفرق بين التابعين السابقين عند مختلف قيم χ والمفيد لنا الفرقين التاليين :

$$H_{-}(\chi) - H_{+}(-\chi) = \Gamma(\chi,r) - \Gamma(-\chi,r) + 2\frac{du}{dr} \qquad (26)$$

$$H_{-}(\chi+1) - H_{+}(\chi) = \Gamma(\chi+1,r) - \Gamma(\chi,r) + 2\frac{du}{dr} \qquad (27)$$

عندما $u(r) = \alpha r$ العلاقتين (26) و(27) تكتبان بالشكل التالي :

$$H_{-}(\chi) = H_{+}(-\chi) + 2(2\chi+1)\alpha \qquad (28)$$

$$H_{-}(\chi+1) = H_{+}(\chi) + 4\alpha \qquad (29)$$

بإستخدام التماثل المضاعف من السهل البرهان أنه من أجل أي قيمة سالبة لـــ χ (أي من أجل $j = \ell + \frac{1}{2}$) ان طاقة الحالة الأساسية للهاملتوني $H_{+}(\chi)$ تساوي الصفر ، أما طاقة الحالة الأساسية للهاميلون $H_{-}(\chi)$ فتعطى بالشكل :

$$E_{\chi,0} = 4\alpha \qquad (\chi < 0) \qquad (30)$$

إستناد إلىمبدا التناظر نلاحظ أن طيفي الطاقة H_+ و H_- يتطابقان .بإستثناء السوية الأساسية (E=0) للهاميلتون H_+ وبالتالي نشاهد أن طاقة مستوى الإثارة الأول في الهاميلتون H_+ أي $E_{\chi,1+}$تساوي طاقة الحالة (المستو ي) الأساسية للهاميلتون H_- أي :

$$E_{\chi,1} = 4a \qquad : \chi<0 \qquad (31)$$

يمكن إيجاد طاقة سوية الإثارة الأولى للهاميلتوني $H_-(\chi)$ وذلك بمساعدة (29) :

$$E_{\chi,1-} = E_{\chi,1+} + 4\alpha = 8\alpha \qquad (32)$$

وبالتالي نستطيع أن نكتب العلاقة العامة :

$$E_{\chi,n} = E_{\chi,n+} + 4\alpha \qquad n = 0,1,2 \qquad (33)$$

تبين العلاقه الأخيرة لنا أنه عند χ السالبة السويات الطاقيه لاتتعلق بـــ χ ، وتسمح لنا هذه العلاقه بإيجاد كامل الطيف الطاقي لكل من $H_+(\chi)$ و $H_-(\chi)$ وذلك عند χ السالبة وبالتالي نكتب :

$$E_{\chi,n} = 4n\alpha \qquad ، \qquad E_{\chi,n} = 4(n+1)\alpha \qquad (34)$$

إستناداإلى العلاقتين (28) و (34) نلاحظ أنه من السهل وضع أو أيجاد طيف كلا من الهاملتوني $H_+(\chi)$ و $H_-(\chi)$ وذلك من أجل χ الموجبة $\left(\chi = \ell \qquad j = \ell - \frac{1}{2}\right)$

إذن :

$$H_-(\ell) = H_+(-\ell) + 2(2\ell+1)\alpha \qquad (35)$$

وبالتالي

$$E_{\chi,n} = \alpha\left[4(n+\ell)+2\right] \qquad : \qquad j = \left(\ell - \frac{1}{2}\right) \qquad (36)$$

ولكن كما هو واضح في العلاقتين السابقتين أن المستويات الطاقيه ترتبط بـــ χ الموجية إن النتائج التي حصلت عليها وكما هو متوقع تتطابق مع النتائج المعروفة للهزاز ذو الكمون $V(r)=\alpha r^2$ من أجل التوضيح نعرض هذه النتائج وذلك عندما $u(r)=\alpha r$ وبالتالي $\Gamma(\chi.r)$ يكتب بالشكل :

$$\Gamma(\chi.r) = (2\chi-1)\alpha + \alpha^2 r^2 \qquad (37)$$

عند ذلك المعادلة (8) تؤول إلى معادلة شرودنغر :

$$\left\{\frac{d2}{dr2} - \frac{\chi(\chi+1)}{r2} + 2m\varepsilon - m^2\omega^2 r^2\right\} R_{n1}(r) = 0 \qquad (38)$$

$$\ell(\ell+1) = \chi(\chi+1) \qquad \varepsilon = Es - \frac{2\chi-1}{2m}\alpha$$

من السهل ملاحظة أن المعادلة التي حصلنا عليها (38) تمثل معادلة الهزاز لهذا السبب من أجل الطاقة نكتب :

$$\varepsilon = E_S - \frac{(2\chi - 1)}{2m}\alpha = \omega N = \omega\left(2n + \ell + \frac{3}{2}\right) \qquad (39)$$

$$\text{n=0,1,2.....و}\ \omega = \frac{\alpha}{m}$$

من العلاقة (39) نكتب الطاقة E_{ns} بالشكل :

$$E_{ns} = \omega\left(2n + \chi + \ell + 1\right) \qquad (40)$$

نناقش عبارة الطاقةوذلكمن أجل قيم χ المختلفة $j = \ell - \frac{1}{2}$ هذا يعني أن $\chi = \ell$ وبالتالي نجد

$$E_{ns}^{j=\ell-\frac{1}{2}} = \omega\left[2(n + \ell) + 1\right] \qquad (41)$$

وعندما $j = \ell + \frac{1}{2}$ نجد أن $\chi = -\ell - 1$ وبالتالي الطاقة تعطى بالعلاقة التالية :

$$E_{ns}^{j=\ell+\frac{1}{2}} = 2\omega n \qquad (42)$$

من العلاقة الأخيرة نلاحظ أنه كانت $j = \ell + \frac{1}{2}$ فالمستويات الطاقية تتطابق ولا ترتبط بالعزم المداري . إذا النتائج التي حصلنا عليها من العلاقتين (41) و(42) تتطابق تماما مع دراستنا لــ H_+ و $H.$

في الختام أشير إلى أن العلاقة (39) تساعدنا في حساب طاقة الإنشطار السبيني- المداري لبعض النوى ذات الطبيعة الخاصة وهي النوى التي تملك نيكلونا واحدا في الغطاء الخارجي مثال ذلك He^5 ، O^{17} ، Ca^{41} pb^{209} وغيرها وتسمى هذه النوى نوى الجسيم الواحدي : علما أن طاقة الإنشطار السبيني - المداري تعطى بالعلاقة التالية :

$$\Delta E_{n1}^{s.o} = E_{n1}\left(j = \ell - \frac{1}{2}\right) - E_{n1}\left(j = \ell + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \omega\left[2(n + \ell) + 1\right] - 2\omega n$$

$$\Delta E_{n1}^{so} = \omega(2\ell + 1)$$

المراجع:

1- Miller. L.D. Relativistic - single - particle potentials for nuclei. Annals of physics 91 , 40-57 (1975) .

2- Vashakidze.I.S Relativistic theory of single particle state and spin - orbit Interaction . Tbilisi state Repores T. 285,59 (1990) .

3-.Hels. M.T New inter pretation of the Dirac approach to proton- nucleus scattering physics letters , vol 162B ,number 4,5,6 (1985) .

4- Vashakidze. I.S . Relativistic tensor effects in nuclear single particle states . Tbilisi state University Reports T. 296.171 (1991) .

5- Miler. L.D. Exchange potential in relativistic Hartree - Fock theory of clesed shell nuclei , - phys. Rev.c9., 1974 - p.537 .

6- L.N. Savushkin and V.N.Fomenko physics of elementary particles and atomic nuclei 8.911(1977) .

7- Бабиков В.В. Вопросы теории ядерных взаимодействий.Дубна,1974,111с.

8- Давидов А.С. Теория атомного ядра.Москва,физ-мат,1958,611с.