مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (20) العدد (7)1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (20) No (7) 1998

تصنيف بعض البيانات المتناظرة التي عدد رؤوسها p^k حيث $p \geq 3$ عدد أولي و k عدد طبيعي

الدكتور اسكندر علي*

(قبل للنشر في 1998/4/28)

□ الملخّص □

ليكن p عدداً أولياً و k عدداً طبيعياً و H حقلاً منتهياً عدد عناصره p^k ، وليكن σ عنصر ما مولد للزمرة الجدائية $H-\{o\} = H^*$. عندئذ إذا كان $3 \leq P$ وكان n عدداً زوجياً يحقق العلاقة $p^k - 1 = n \cdot r$ و $\tau = \sigma^r$ فإنه يمكن بناء المجموعات التالية :

$$Ki = \{ \tau \sigma^{i-1} , \tau^2 \sigma^{i-1} , \dots , \tau^n \sigma^{i-1} = \sigma^{i-1} \}$$ حيث $i = 1 , 2 , .. , r$

الغاية من هذا البحث إثبات (مبرهنة ١-٢) وجود بيان متناظر عدد رؤوسه p^k ودرجته n ، حيث n عدد زوجي يقسم $p^k - 1$. ثم بناء بيانات كيلي $X_{H,Ki}$ المعرفة على H والمنسوبة إلى K_i ودراسة خواصها ومن ثم إثبات أنها جميعاً متناظرة وايزومورفيه فيما بينها مثنى مثنى وأخيراً نورد مثالاً موضحاً .

*أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (20) العدد (7)1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (20) No (7) 1998

Classification some symmetric graphs of order p^k where p is prime , $p \geq 3$

Dr.Iskandar Ali*

(Accepted 28/4/1998)

□ ABSTRACT □

For any given P,where P is prime , P^k - 1 is even and we can find all even integers n_i such that $2 \leq n_i \leq P^k - 1$ and n_i divides $P^k - 1$. Say there are k of them and for each i = 1,2,......k we have $P^k - 1 = n_i r_i$ for some integer r_i . Let GF (P^k) finite field of P^k elements and H^* is multiplicative group of GF (P^k) , then $H^* = < \sigma >$ and σ is of order $P^2 - 1$. Let $\tau_I = \sigma^{ri}$, then the order of τ_I is . Let $\tau = \sigma^r$ and $K_i = \{ \tau \sigma^{i-l} , ... \tau^{n} \sigma^{i-l} = \sigma^{i-l} \}$; i = 1,2,......r 1= 1,2,......k .

we can form the Cayley graphs $X_{H,Ki}$ which by lemma (1,2) is a symmetric graphs with p^k vertices and degree n and they are pairwise isomorphic .

*Assistant prof at mathematics department – faculty of sciences – tishreen university – lattakia- Syria.

1 - مصطلحات وتعاريف :

تعريف (١-١) : البيان X هو عبارة عن ثنائية $[V(X), E(X)]$ حيث $V(X)$ مجموعة منتهية غير خالية تدعى برؤوس البيان X ومجموعة أضلاع $E(X)$ تدعى بأضلاع البيان .

سنعتبر في هذه المقالة أن X بيان غير موجه وخال من العقد وبسيط ومنتهي . سنرمز للضلع الواصل بين الرأسين a و b من $V(X)$ بالرمز $[a , b]$.

تعريف (٢-١) : نقول عن البيانين X و Y أنهما ايزومورفيان ونكتب $X \approx Y$ إذا وجد تقابل σ من $V(X)$ إلى $V(Y)$ بحيث يحقق الشرط التالي :

$$\forall [a , b] \in E(X) \Leftrightarrow \sigma([a , b]) = [\sigma(a) , \sigma(b)] \in E(Y)$$

كحالة خاصة نسمي σ اوتومورفزم لـ X إذا كان $X = Y$.

نلاحظ بسهولة أن مجموعة كل الأوتومورفزمات للبيان X تشكل زمرة جزئية من زمرة التبادل S_X ، باعتبار أن العملية الداخلية عليها هي عملية تركيب التطبيقات . سنرمز لهذه الزمرة الجزئية بـ$G(X)$.

تعريف (٣-١) : نقول عن $G(X)$ أنها متعدية على المجموعة $V(X)$ إذا وجد من أجل أي عنصرين a و b من $V(X)$ عنصر $\sigma \in G(X)$ بحيث $\sigma(a) = b$.

كما نقول عن $G(X)$ أنها متعدية على المجموعة $E(X)$ إذا وجد من أجل أي ضلعين $[a , b]$ و $[c , d]$ من $E(X)$ عنصر θ من $G(X)$ بحيث $\theta([a,b]) = [\theta(a),\theta(b)] = [c,d]$

تعريف (٤-١) : نقول عن البيان X أنه متعدي على الرؤوس إذا كانت $G(X)$ متعدية على الرؤوس $V(X)$. ونقول عنه أنه متعدي على الأضلاع إذا كانت $G(X)$ متعدية على الأضلاع $E(X)$.

تعريف (٥-١) : نقول عن البيان X أنه متناظر إذا كان X متعدي على الرؤوس $V(X)$ ومتعدي على الأضلاع $E(X)$.

تعريف (٦-١) : البيان الصفري هو البيان الذي لا يحوي أضلاعاً (أي أن $E(X) = \emptyset$) ، والبيان التام هو البيان الذي يصل بين أي رأسين مختلفين ضلع واحد فقط .

من الواضح أنه إذا كان X بياناً تاماً أو صفرياً عدد رؤوسه $V(X)$ يساوي n فإن $G(X)$ تطابق زمرة التبادل S_n وبما أن S_n متعدية على كل من المجموعتين $V(X)$ و $E(X)$ فإن كل من البيان التام أو البيان الصفري يكون بياناً متناظراً .

تعريف (٧-١) : لتكن H زمرة جمعية تبديلية منتهية و K مجموعة جزئية من H بحيث أن العنصر الحيادي في H لا ينتمي إلى K ($0 \notin K$) . نسمي البيان $X_{H,K}$ الذي مجموعة رؤوسه $H = V(X_{H,K})$ ومجموعة أضلاعه هي $E(X_{H,K}) = \{ [h, h+k] : h \in H, k \in K \}$ بأنه بيان كيلي المعرف على H والمنسوب إلى K .

تعريف (٨-١) : نقول عن البيان X أنه نظامي إذا تساوى عدد الأضلاع المتصلة بأي رأس من رؤوسه مع عدد الأضلاع المتصلة بأي رأس آخر .

- واضح أن بيان كيلي نظامي .
- إذا كان X بياناً نظامياً وكان عدد الأضلاع المتصلة بأحد الرؤوس مساوياً m فإننا نقول عن X أنه من الدرجة m .

قضية (١-١) : إذا كان H حقلاً منتهياً عدد عناصره m فإن الزمرة الجدائية $H^* = H - \{0\}$ تكون زمرة دائرية عدد عناصرها m-1 .

البرهان : انظر المبرهنة 6 من الفقرة 4 في الفصل الخامس في [5] .

قضية (٢-١) : إذا كان P عدداً أولياً و k عدداً طبيعياً فإنه يوجد حقلاً منتهياً عدد عناصره p^k . علاوة على ذلك ان عدد عناصر أي حقل منته يساوي p^l حيث p عدد أولي (مميز الحقل) و ℓ عدد طبيعي ما .

البرهان : انظر الفقرة الخامسة من الفصل السابع في [5] .

ليكن H حقلاً عدد عناصره p^k و $H^* = H - \{0\}$ الزمرة الجدائية منه . سنرمز بـ e للعنصر الحيادي بالنسبة للجداء في H^* و بـ 0 للعنصر الحيادي بالنسبة للجمع في H .

بفرض σ عنصر مولد للزمرة H^* ، عندئذ يكون $\sigma^{p^k-1} = e$ و $\sigma^r \neq e$ مهما يكن العدد الطبيعي r المحقق للمتراجحة $r < p^k - 1$.

2 - بناء بيانات كيلي وتصنيفها :

لتكن H زمرة جمعية تبديلية منتهية و K مجموعة جزئية منها بحيث $0 \notin K$. سنقول عن K أنها مجموعة جزئية مميزة إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall x \in K \Rightarrow -x \in K .$$

قضية (١-٢) : إذا كانت H زمرة جمعية تبديلية منتهية عدد عناصرها m و K مجموعة جزئية مميزة منها عدد عناصرها n فإن بيان كيلي $X_{H,K}$ المعرف على H والمنسوب إلى K يكون بياناً نظامياً عدد رؤوسه m ودرجته تساوي n .

البرهان : ينتج ذلك من كون أن الضلع $E = [h , h + k]$ الواصل بين الرأسين h و $h + k$ والناتج عن إضافة k إلى الرأس h يبقى نفسه واصلاً بين الرأسين عندما نضيف k - إلى الرأس $h + k$ ، وبالتالي يبقى عدد الأضلاع المنبعثة من h والناتجة عن إضافة عناصر من K إلى الرأس h ثابتاً دون تغيير عندما نفعل ذلك مع بقية الرؤوس الأخرى .

ملاحظة (١-٢): إذا كانت K مجموعة جزئية غير مميزة فإن درجة البيان $X_{H,K}$ ستزيد عن n حتماً.

قضية (٢-٢) : ليكن H حقلاً منتهياً عدد عناصره p^k حيث p عدد أولي أكبر أو يساوي 3 و k عدد طبيعي ما وليكن σ مولداً للزمرة الجدائية الدائرية H^* . عندئذ إذا كان n عدداً زوجياً قاسماً للعدد $P^k - 1$ وكان $P^k - 1 = n.r$ فإن الزمرة الجزئية الجدائية المولدة بـ $\tau = \sigma^r$ في H^* تكون مجموعة جزئية مميزة في H .

البرهان : نرمز بـ K للزمرة الجزئية المولدة بـ $\tau = \sigma^r$ ، فنجد :

$$K = \{ \tau , \tau^2 , \dots\dots\dots , \tau^{n-1} , \tau^n = e \}$$

لنبرهن في البداية أن $-e \in K$. بما أن n زوجية فإن $\frac{n}{2}$ يكون طبيعياً ويكون أيضاً $\tau^{n/2}$ في $\bar{K}$ وبالتالي :

$$\left(\tau^{\frac{n}{2}} - e\right)\left(\tau^{\frac{n}{2}} + e\right) = \tau^n - e = 0$$

ونظراً لأن $\tau^{\frac{n}{2}} \neq e$ فإن $\left(\tau^{\frac{n}{2}} - e\right) \neq 0$ وبالتالي يكون $\tau^{\frac{n}{2}} + e = 0$ وبإضافة $-e$ لطرفي المساواه في H نجد $\tau^{\frac{n}{2}} = -e \in K$.

من ناحية أخرى ليكن τ^i عنصر كيفي من K عندئذ يمكن أن نكتب :

$$\tau^i(-e) = \tau^i . \tau^{\frac{n}{2}} \quad \Rightarrow -\tau^i = \tau^i . \tau^{\frac{n}{2}} \in K$$

وهو المطلوب .

نتيجة (١-٢) : من أجل أي عدد أولي $P \geq 3$ وأي عدد طبيعي k وأي عدد زوجي n قاسم للعدد $P^k - 1$ يوجد بيان نظامي $X_{H,K}$ عدد رؤوسه P^k ودرجته n .

البرهان : حسب القضية (١-٢) يوجد حقل H عدد عناصره P^k وبالاعتماد على القضية (٢-٢) توجد زمرة جزئية مميزة في H عدد عناصرها n . وحسب القضية (١-٢) يتم المطلوب .

مبرهنة (١-٢) : من أجل أي عدد أولي $P \geq 3$ وأي عدد طبيعي k وأي عدد زوجي n قاسم للعدد $P^k - 1$ يوجد بيان متناظر عدد رؤوسه P^k ودرجته n .

البرهان : بفرض $P^k - 1 = n.r$; $\tau = \sigma^r$ و $K = \{ \tau , \tau^2 , \dots , \tau^n = e \}$ عندئذ حسب النتيجة (١-٢) يوجد بيان نظامي $X_{H,K}$ عدد رؤوسه P^k ودرجته n .

سنبرهن الآن أن $G (X_{H,K})$ متعدية على مجموعة الرؤوس H لذلك نعرف من أجل كل $a \in H$

الانسحاب f_a كما يلي :

$$f_a : H \to H$$
$$f_a(h) = h + a$$

سنبرهن أن $f_a \in G(X_{H,K})$. واضح أن f_a تقابل لذلك يكفي أن نبرهن أنه يحافظ على الأضلاع :

ليكن $E = [h , h + \tau^j]$ $(\tau^j \in K , h \in H)$ ضلعاً من $E(X_{H,K})$ عندئذ نجد :

$$f_a(E) = [f_a(h) , f_a(h+\tau^j)] = [h+a , h+a+\tau^j] = [h_1 , h_1 + \tau^j] \in E(X_{H,K})$$

إذن المجموعة $F = \{ f_a : a \in H \}$ محتواه في $G(X_{H,K})$. ليكن الآن h_1 , h_2 عنصرين كيفيين من H . عندئذ إذا فرضنا $a = h_2 - h_1$ نجد $f_a(h_1) = h_2$ وهذا يعني أنه $G(X_{H,K})$ متعدية على H .

لنبرهن أخيراً أن $X_{H,K}$ متعدي على الأضلاع . من أجل ذلك لنعرف التبديل $T : H \to H$ وفق القاعدة $T(h) = \tau . h \; ; \tau = \sigma^r$. أن T يحافظ على الأضلاع . من أجل الضلع $E = [h , h + \tau^j]$ نجد :

$$T(E) = [T(h) , T(h + \tau^j)] = [\tau . h , \tau . h + \tau^{j+1}] \in E(X_{H,K})$$

إذن $T \in G(X_{H,K})$. ينتج من ذلك أن جميع عناصر الزمرة المولدة لـ T تنتمي إلى $G(X_{H,K})$ حيث أن :

$$\langle T \rangle = \{T , T^2 , \ldots\ldots , T^n = e\} \quad \& \; T^i(h) = \tau^i . h \; , \; \forall h \in H$$

لنفرض الآن أن $E_1 = [h_1 , h_1 + \tau^j]$, $E_2 = [h_2 , h_2 + \tau^i]$ ضلعين اختياريين من $E(X_{H,K})$ عندئذ نجد :

$$f_{(h_2 - h_1 \tau^{i-j})} \circ T^{(i-j)}(E_1) = f_{(h_2 - h_1 \tau^{i-j})}\left(\left[\tau^{i-j} . h_1 , \tau^{i-j} h_1 + \tau^i\right]\right) =$$

$$\left[h_2 - h_1 \tau^{i-j} + h_1 \tau^{i-j} , h_2 - h_1 \tau^{i-j} + h_1 \tau^{i-j} + \tau^i\right] = \left[h_2 , h_2 + \tau^i\right] = E_2$$

وهو المطلوب .

قضية (٢-٣) : ليكن H حقل منته و K مجموعة جزئية مميزة فيه عدد عناصرها n وليكن x عنصر كيفي من H مختلف عن الصفر عندئذ تكون المجموعة :

$$xK = \{ xh : h \in K \}$$

مجموعة مميزة عدد عناصرها يساوي n .

البرهان : واضح أن عدد عناصر xK يساوي n وأن $0 \notin xK$. من ناحية ثانية ليكن xh عنصر من xK . عندئذ ينتج أن $h \in K$ ونظراً لأن K مميزة ينتج أن $-h \in K$ وبالتالي ينتج

$$x(-h) = -xh \in xK$$

وهو المطلوب

قضية (٢-٤) : ليكن H حقل عدد عناصره P^k , $3 \leq P$, n عدد زوجي قاسم للعدد $P^k - 1$، حيث k عدد طبيعي ما . وليكن $P^k - 1 = nr$ و $\tau = \sigma^r$. عندئذ تكون المجموعات التالية :

$$K_1 = k = \{\tau, \tau^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \tau^{n-1}, \tau^n = e\} = k$$
$$K_2 = \{\tau\sigma, \tau^2\sigma, \ldots\ldots\ldots\ldots, \tau^{n-1}\sigma, \tau^n\sigma = \sigma\} = \sigma k$$
$$K_3 = \{\tau\sigma^2, \tau^2\sigma^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \tau^{n-1}\sigma^2, \tau^n\sigma^2 = \sigma^2\} = \sigma^2 k \qquad (1)$$
$$\vdots$$
$$K_r = \{\tau\sigma^{r-1}, \tau^2\sigma^{r-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \tau^{n-1}\sigma^{r-1}, \tau^n\sigma^{r-1} = \sigma^{r-1}\} = \sigma^{r-1} k$$

مجموعات مميزة غير متقاطعة مثنى مثنى عدد عناصر كل منهما يساوي n وتشكل تجزئة للزمرة الجدائية H^* .

البرهان : بما أن K مجموعة مميزة عدد عناصرها n فإنه بحسب القضية (٣-٢) ينتج أن كل منهم تكون مجموعة مميزة عدد عناصرها n . وهي تمثل صفوف ترافق للزمرة H^* بالنسبة للزمرة الجزئية K وبالتالي لاتتقاطع مثنى مثنى وتشكل تجزئة لـ H^* .

<u>مبرهنة (٢-٢)</u> : ليكن n , P , H , σ , τ كما في المبرهنة (١-٢) و $K, K_1, \ldots, K_r$ كما في العلاقات (١) . عندئذ تكون بيانات كيلي X_{HKr} , ... , $X_{H,K2}$, $X_{H,K1}$ بيانات متناظرة كما تكون ايزومورفيه فيما بينها مثنى مثنى .

البرهان : كما برهنا $X_{H,K1}$ في المبرهنة (١-٢) أنه بيان متناظر فإنه بنفس الطريقة تماماً نبرهن ذلك من أجل البيانات الأخرى الواردة في نص المبرهنة . بقي علينا أن نبرهن أنها ايزومورفيه مثنى مثنى . للبرهان على أن $X_{H,K}$, $X_{H,Ki}$ ايزومورفيان نأخذ التبديل $d_i : H \to H$ المعرف بالعلاقة $d(x) = x\,\sigma^{i-1}$. بسهولة نجد أنه مهما يكن $E = [\,h\,, h + \tau^j\,] \in E(X_{H,K})$ يكون :

$$d_i(E) = [\,h\,\sigma^{i-1}, h\,\sigma^{i-1} + \tau^j\,\sigma^{i-1}\,] = [\,h_1\,, h_1 + \tau^j\,\sigma^{i-1}\,] \in E(X_{H,K1})$$

كما يكون $E \in E(X_{H,K})$ إذاً وفقط إذا كان $d_i(E) \in E(X_{H,Ki})$ وهو المطلوب

<u>مبرهنة (٣-٢)</u> : إن بناء البيانات $X_{H,Kr}$,........, $X_{H,K2}$, $X_{H,K}$ الواردة في المبرهنة (٢-٢) مستقلة عن اختيار مولد الزمرة H^* .

البرهان : بفرض $H^* = \langle\sigma\rangle$. ثم نفرض $\mu = \sigma^i$ مولد آخر لـ H^* .

هذا يعني أن $P^k - 1\,, i$ أولين فيما بينهما (أي أن $(P^k - 1\,, i) = 1$) .

ونظراً لأن $P^k - 1 = nr$ فإن $(n\,, i) = 1$. لنبني الآن المجموعات الجزئية المشابهه للمجموعات (١) مع اعتبار بأن المولد الجديد هو $\mu = \sigma^i$ وأن $\ell = \mu^r$ ولنرمز لها بـ N_i فنجد

$$N_1 = \{\ell, l^2, \ldots\ldots, \ell^n = e\} = N$$
$$N_2 = \{\mu\ell, \mu\ell^2, \ldots\ldots, \mu\ell^2 = \mu\} = \mu.N$$
$$N_3 = \{\mu^2\ell, \mu^2\ell^2, \ldots\ldots, \mu^2\ell^n = \mu^2\} = \mu^2.N \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$N_r = \{\mu^{r-1}\ell, \mu^{r-1}\ell^2, \ldots\ldots, \mu^{r-1}\ell^n = \mu^{r-1}\} = \mu^{r-1}.N$$

إن

$$\ell = \mu^r = (\sigma^i)^r = (\sigma^r)^i = (\tau)^i \in k$$

ونظراً لأن K زمره دائريه مولده بالعنصر τ ورتبتها n و $\ell(i, n) =$ فإن العنصر $\ell = (\tau)^i$ يولد نفس الزمرة K وهذا يؤدي إلى أن $N = K$

من ناحية ثانية بما أن المجموعات (1) والمجموعات (2) تمثل صفوف الترافق للزمره الجدائية H^* في كلا الحالتين وتشكل تجزئه لها فإنها يجب أن تتطابق أيضاً ويمكن برهان ذلك بشكل آخر أيضاً .

لنقسم العدد it على r فنجد $it = r \cdot m + s$ حيث $r \leq s \leq o$ وبناء على ذلك يمكن أن نكتب

$$N_{t+1} = \mu^t\ N = (\sigma^i)^t . K = \sigma^{it} . K = \sigma^{rm+s} . K$$
$$= \sigma^s . \sigma^{rm} . K = \sigma^s (\sigma^r)^m\ K = \sigma^s . \tau^m . K = \sigma^s . K = K_{s+1}$$

وهو المطلوب .

<u>مبرهنه (2 - 4)</u> : ليكن X بيناً متناظراً ، معرفاً على الزمره H ومنسوباً إلى المجموعة الجزئية المميزة K ، عدد رؤوسه P^k (حيث P عدد أولي $3 \leq$ و k عدد طبيعي) . عندئذ من أجل أي ضلعين $[o, u]$ ، $[o, v]$ في X يوجد $\theta \in G(X)_o$ بحيث $\theta(u) = v$ ، حيث $G(X)_o$ هي الزمرة الجزئية من $G(X)$ المثبته للصفر في H .

<u>البرهان</u> : بما أن X متعدي على الأضلاع فإنه يوجد $g \in G(X)$ بحيث يكون $g([o,u])=[o,v]$.

إذا كان $g(o) = o$ و $g(u) = v$ ينتج المطلوب ، أما إذا كان $g(o) = v$ و $g(u) = o$ فإننا نستعين بالتبديل التالي $D : H \to H$ المعرف بالعلاقة $D(x) = -x$.

ان D اوتومورفزم على X لأنه إذا كان $E = [h, h+k]$ ضلعاً في X $(k \in K\ ,\ h \in H)$ نجد

$$D(E) = [-h, -h-k] = [h_1, h_1 + k_1] \in E(x)$$

حيث $h_1 = -h \in H$ لأنها زمره جمعيه و $k_1 = -k \in K$ لأنها مجموعه مميزة .

وبالتالي ينتج أن D يحافظ على الأضلاع أي $D \in G(X)$. لنعرف التبديل $\theta = D f_{-v} g$ الذي يساوي تركيب ثلاثة عناصر من $G(X)$ فنجد

$$\theta(o) = D f_{-v} g(o) = D f_{-v}(v) = D(o) = o$$
$$\theta(u) = D f_{-v} g(u) = D f_{-v}(o) = D(-v) = v$$

وهذا يعني أن $\theta \in G(X)_o$ ويحقق العلاقة $\theta(u) = v$ وهو المطلوب .

<u>ملاحظة (٢ - ٢)</u> : ان v, u عنصران من K لأن الضلع $[o,v]$ هو $[o, o+v]$ والضلع $[o, u]$ يساوي $[o, o+u]$. علاوة على ذلك إن X نظامي لأن K مجموعه جزئية مميزة ، وفي الحقيقة إذا لم تكن K مجموعه مميزه فإننا لا نستطيع اثبات أن $D(E) \in E(X)$ وبالتالي $D \in G(X)$.

تطبيق : نأخذ $p = 5$ و $k = 2$ فيكون الجمع والضرب في $GF(5)$ بالقياس إلى العدد 5 . أما من أجل إيجاد مولد الحقل H^* يجب حل المعادلة $x^{24} - e = o$ لكن

إما $x^{12} = e$ أو $x^{12} = -e$ $\Rightarrow$ $x^{24} - e = (x^{12} + e)(x^{12} - e) = o$

ان الحل $x^{12} = e$ مرفوض وبالتالي فإن : $x^{12} = -e$

أو :

$$x^{12} = 4e$$
$$(x^6 - 2e)(x^6 + 2e) = 0 \Rightarrow$$
$$x^6 + 2e = 0 \Rightarrow x^6 - 2^3 e = 0 \Rightarrow$$
$$(x - 2e)(x^4 + 2x^2 + 4e) = 0 \Rightarrow$$
$$x^4 + 2x^2 + 4e = 0$$

نختار المصفوفة $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ والتي عناصرها من GF(5) فنجد بسهولة أن σ تحقق المعادلة الأخيرة إذاً $H^* = GF(25)^* = \langle \sigma \rangle$.

فإذا أخذنا في الفضاء الاتجاهي ($H = GF(5^2)$ القاعدة $\{e,\sigma\}$ فيمكننا أن نكتب عناصر H كمتجهات في القاعدة المذكورة كما يلي [1] :

$O = (0,0)$	$\sigma^9 = (2.3)$	$\sigma^{17} = (3.1)$
$\sigma = (0.1)$	$\sigma^{10} = (1.3)$	$\sigma^{18} = (2.0)$
$\sigma^2 = (2.2)$	$\sigma^{11} = (1.2)$	$\sigma^{19} = (0.2)$
$\sigma^3 = (4.1)$	$\sigma^{12} = (4.0)$	$\sigma^{20} = (4.4)$
$\sigma^4 = (2.1)$	$\sigma^{13} = (0.4)$	$\sigma^{21} = (3.2)$
$\sigma^5 = (2.4)$	$\sigma^{14} = (3.3)$	$\sigma^{22} = (4.2)$
$\sigma^6 = (3.0)$	$\sigma^{15} = (1.4)$	$\sigma^{23} = (4.3)$
$\sigma^7 = (0.3)$	$\sigma^{16} = (3.4)$	$\sigma^{24} = (1.0)$
$\sigma^8 = (1.1)$		

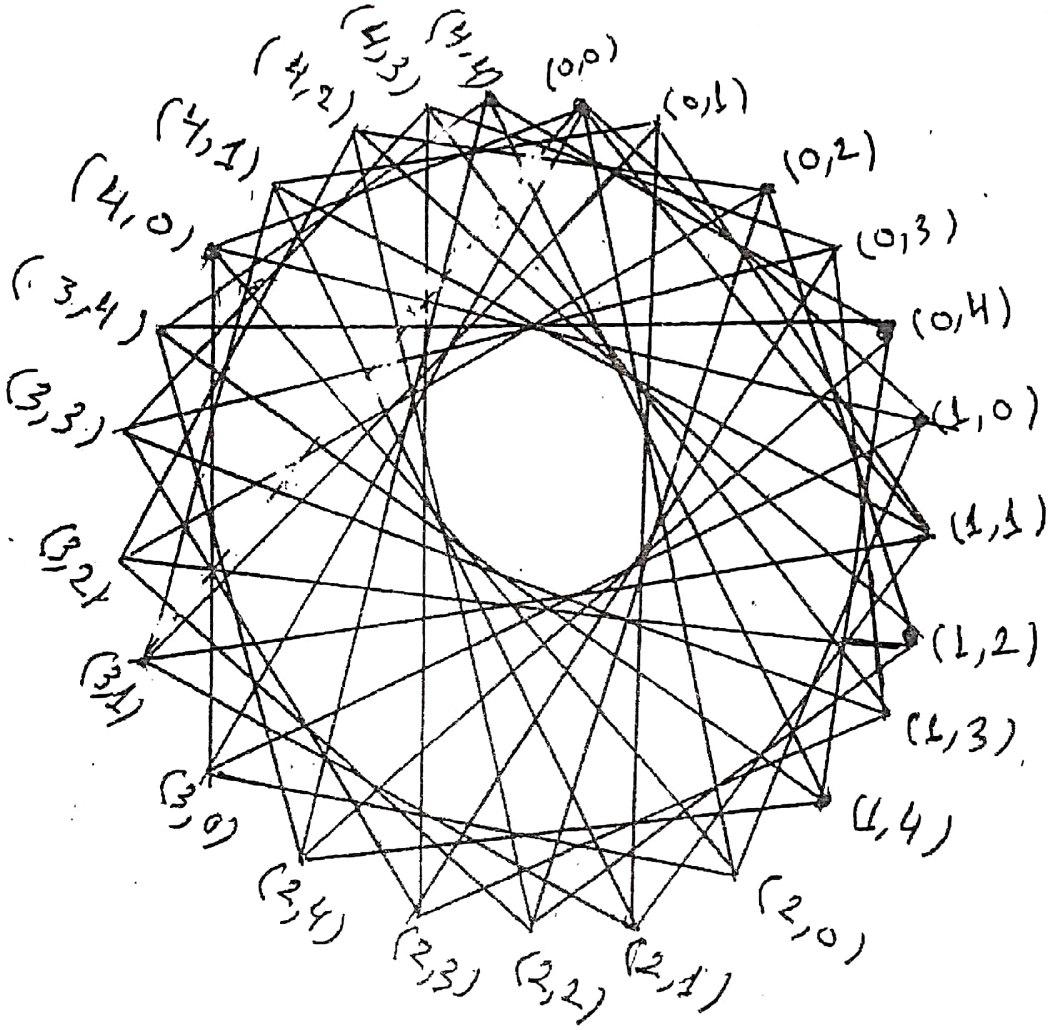
اذن $H^* = \{\sigma, \sigma^2, ..., \sigma^{24} = e\}$

١) لنرسم بيان كيلي من الدرجة 4 . فتكون K الموافقة من الشكل

$$K = \{\sigma^6, \sigma^{12}, \sigma^{18}, \sigma^{24} = e\} = \{(3.0), (4.0), (2.0), (1.0)\}$$

نلاحظ ان كل رأس في البيان على الشكل (١) يتصل باربعة اضلاع

٢) يمكننا أن نرسم بيانات كيلي من الدرجات 2 , 6 , 8 , 12
لانها قواسم زوجية لـ 24 كما رسمنا بيان كيلي من الدرجة 4 وتكون جميع هذه البيانات ايزومورفية فيما بينها مثنى مثنى بحسب المبرهنة (2)


(0,0)
(0,1)
(0,2)
(0,3)
(0,4)
(1,0)
(1,1)
(1,2)
(1,3)
(1,4)
(2,0)
(2,1)
(2,2)
(2,3)
(2,4)
(3,0)
(3,1)
(3,2)
(3,3)
(3,4)
(4,0)
(4,1)
(4,2)
(4,3)
(4,4)

شكل (1)

المراجع:

....

[1] . Ghao . On the classification of symmetric graphs with prime number of vertices Thaus . Amer . math . Soc 158 (1971) , (P247 - 256)

[2] Michad Aschbacher . Finite geoup Theory . Cambridge . Nework . Sydney . New Rochelle Mell ourne . Press 1986

[3] D . A . Soprenenko . Matrices group ; Naouka , Moscow 1972

[4] I . Ali . On classification of vertices - primitive tournments with P^3 number of vertices , where P is prime . J . Univer - Tichreen , N_3 vol . 16 , 1994

[5] . S . LANG . Algebra , Reading , Mass ; Addison - Wesley , 1965