مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (18) العدد (5) 1996
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research –Basic Science Series Vol. (18) No (5) 1996

شبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة من أجل مؤثر معدوم القوة

الدكتور عهد كفى*

(قبل للنشر في 1996/5/26)

□ الملخّص □

ليكن E فضاء باناخ، عقدياً ولامتناهي الأبعاد، وليكن $\beta(E)$ جبر المؤثرات الخطية المستمرة على E، و$NF(E)$ صف المؤثرات الخطية $A \in \beta(E)$ معدومة القوة، والتي تكون من أجلها $A(E)$, $A^2(E)$، .... مغلقة.

يهدف هذا البحث إلى تقديم وصف كامل لشبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة من أجل مؤثر خطي A من الصف $NF(E)$، إذ نخلص بنتيجته إلى أن الشبكة المذكورة توزيعية منتهية، ونعين عدد عناصرها. كما نبرهن في سياق عملنا أن كل فضاء جزئي فوق لا متغير من أجل مؤثر خطي من الصف $NF(E)$، مولد بمتجه واحد.

* أستاذ مساعد – في قسم الرياضيات-كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (18) العدد (5) 1996
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research –Basic Science Series Vol. (18) No (5) 1996

Treillis des sous-espaces hyperinvariants pour un operateur nilpotent

Dr. Ahed KAFA[*]

(Accepté 26/5/1996)

❒ ABSTRACT ❒

Soient E un espace de Banach Complexe et de dimension infinie, $\beta(E)$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus de E dans E, et NF(E) la classe des opérateurs A ($\in\beta(E)$) tels que les sous-espaces A(E), $A^2(E)$, ... soient fermés.

Nous présentons dans cet article une description complète du treillis de sous-espaces hyperinvariants pour un opérateur de la classe NF(E).

Ainsi, nous démontrons que le dit treillis est distributif fini et déterminons le nombre de ses éléments. De plus, nous montrons au cours du travail que les sous-espaces hyperinvariants pour un opérateur de calsse NF(E) sont monogènes.

[*] Maître de conférence au Département de Mathématiques, Faculté des Science, Université de Tichrine, Lattaquié, Syrie.

مقدمة:

ليكن E فضاء باناخ (Espace de Banach)، عقدياً ولامتناهي الأبعاد، ولنرمز بـ$\beta(E)$ لجبر المؤثرات الخطية المستمرة على E والتي تأخذ قيمتها في E، وبـ$NF(E)$ لصف المؤثرات معدومة القوة $A(\in\beta(E))$ والتي تكون من أجلها الفضاءات الجزئية $A^2(E)$, $A(E)$...مغلقة.

قدم CHARLES [1] وصفاً كاملاً لشبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة من أجل مؤثر خطي معرف على فضاء متجهي الأبعاد، مستفيداً من مبدأ تطبيق نتائج دراسة الزمر التبديلية (Groupes Abéliens) ونظرية المودولات (Modules) في دراسة المؤثرات الخطية، ومستوحياً فكرة عمله من نتيجة لـKAPLANSKY [2] في إطار دراسة المودولات الجزئية اللامتغيرة كلياً (Sous-Modules Totalement Invariants).

يهدف عملنا الحالي إلى إعطاء وصف كامل لشبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة من أجل مؤثر خطي مستمر A، معدوم القوة، معرف على فضاء باناخ لامتناهي الأبعاد وذلك في الحالة التي تكون فيها الفضاءات الجزئية $A^2(E)$, $A(E)$...مغلقة.

I- تعاريف ومصطلحات:

نقول عن مؤثر $A(\in\beta(E))$ أنه معدوم القوة (Nilpotent) إذا وجد عدد طبيعي $0<r$ بحيث يكون $A^r = 0$ و $A^{r-1} \neq 0$.

ليكن F فضاء جزئياً* من الفضاء E. نقول عن F أنه لامتغير (Invariant) من أجل المؤثر A إذا كان $Ax\in F$ من أجل أي متجه $x\in F$. ونقول عن F أنه فضاء جزئي فوق لامتغير (Hyperinvariant) من أجل المؤثر A إذا كان لامتغيراً من أجل أي مؤثر $T(\in\beta(E))$ يتبادل مع A ونرمز بـ$LAT(A)$($LAT_0(A)$) لشبكة (Treillis) الفضاءات الجزئية اللامتغيرة (فوق اللامتغيرة) من أجل المؤثر A، وبـ $C(A)$ لجبر المؤثرات الخطية المستمرة على الفضاء E والتي تتبادل مع المؤثر A، كما سنرمز بـ$[x]_A$($[x]_{C(A)}$) للفضاء الجزئي اللامتغير (فوق اللامتغير) من أجل المؤثر A والذي يولده المتجه x، وبـ$\oplus$ للمجموع المباشر (Somme Directe) لفضاءات جزئية لامتغيرة من أجل المؤثر A. نقول عن فضاء جزئي F لامتغير من أجل المؤثر A أنه مخفض (Réduisant) من أجل A، إذا وجد فضاء جزئي لا متغير G من أجل A بحيث يكون $E = F\oplus G$، ونقول عن F أنه نقي

---

* يدل المصطلح "فضاء جزئي" حيثما يرد في النص، على فضاء جزئي مغلق بالنسبة لتوبولوجيا النظيم على الفضاء E.

(A-Pur) بالنسبة للمؤثر A إذا كان $A^m(E)\cap F = A^m(F)$ من أجل أي عـــدد طبيعـــي m.
ليكن x∋E. نسمي أكبر عدد طبيعي s تتحقق من أجله العلاقة $x\in A^s(E)$ ارتفــاع (Hauteur) المتجه x في الفضاء E بالنسبة للمؤثر A، ونرمز له بــ$h_E(x)$. نصطلح بهذا الصدد على أن $h_E(0)=\infty$ نسمي المتتالية العدد (δ_j) المعرفـــة بحـــدها العـــام $\delta_j = h_E(A^j x)$ مـــن أجـــل j=0,1,2,,,,, متتالية أولم (Ulm) المتعلقة بالمتجه x بالنسبة للمؤثر A، وندل عليها بـــالرمز U(x). نعرف على مجموعة متتاليات أولم بالنسبة للمؤثر A علاقات ترتيب جزئـــي < كمـــا يلي:

$$U(y)\ge U(x) \leftrightarrow h(A^j y)\ge h(A^j x), \qquad j=0,1,.....$$

نسمي أخيراً أصغر عدد طبيعي m تتحقق من أجله العلاقة $A^m x=0$ مرتبة (ordre) المتجــه x بالنسبة للمؤثر A، ونرمز له بــ$O(x)$، كما نرمز بــ$\ker A$ لمجموعـــة المتجهـــات التـــي مرتبة كل منها أصغر أو تساوي الواحد.

II- سنحتاج فيما يلي إلى النتيجة التالية[3]:

نتيجة (*): ليكن $A\in NF(E)$، و$x\in E$. يوجد فضاء جزئي مخفض من أجل المؤثر A، منتهي الأبعاد، من الشكل $M=\oplus_{i=1}^{k}[x_i]_A$، بحيث أن $x\in M$.
عندئذٍ يمكن كتابة المتجه x على الشكل:

$$x = A^{n_1}x_1 + A^{n_2}x_2 + ... + A^{n_k}x_k$$

ويكون الفضاء الجزئي فوق اللامتغير من أجل المؤثر A، والذي يولده المتجه x من الشكل:

$$[x]_{C(A)} = \sum_{i=1}^{k} A^{n_i}\left(\ker A^{m_i}\right) = \{Y\in E : U(Y)\ge U(x)\}$$

حيث:

$$m_{i+1} - n_{i+1} > m_i - n_i, O(x_{i+1}) = m_{i+1} - m_i = O(x_i), n_{i+1} > n_i$$

من أجل i = 1,2,….,k

تكشف المبرهنة التالية عن أنه يوجد من أجل أي مؤثر A من الصف NF(E) فضاء جزئي مخفِّض منتهي الأبعاد G بحيث أنه إذا كان x متجهاً اختيارياً مـــن الفضـــاء E فـــإن الفضاء الجزئي فوق اللامتغير من أجل المؤثر A الذي يولده x يولده أيضاً متجه من الفضـــاء الجزئي.

مبرهنة (1):

ليكن $A \ni NF(E)$، و$x \ni E$. يوجد فضاء جزئي G من الشكل $G = \overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} [y_j]_A$ مخفض من أجل المؤثر A بحيث يكون $[x]_{C(A)} = \sum_{j=1}^{s} A^{\gamma_j}\left(\ker A^{\alpha_j+1}\right)$ حيث: $\alpha_j + 1 = O(y_j)$، وحيث γ_j أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة: $A^{\gamma_j} y_j \ni [x]_{C(A)}$

البرهان:

لنفرض أن $A^r = 0$ و $A^{r-1} \neq 0$، حيث r عدد طبيعي > 0، ولنضع $P = A^{-1}(0)$ لنعبر متتالية الفضاءات الجزئية $P_r, P_{r-1}, \ldots, P_2, P_1, P_0$، حيث:

$$P_r = \{0\} \quad P_{r-1} = P \cap A^{r-1}(E), \ldots \quad P_2 = P \cap A^2(E) \quad P_1 = P \cap A(E) \quad P_0 = P$$

لدينا: $P \supseteq P_\alpha$ و $P_\alpha \supseteq P_{\alpha+1}$ من أجل $\alpha = 0,1,2,\ldots,r-1$. يوجد فضاء جزئي $P_\alpha \supseteq Q_\alpha$ بحيث يكون $P_\alpha = Q_\alpha \oplus P_{\alpha+1}$ عندئذ:

$$P = Q_0 \oplus Q_1 \oplus \ldots\ldots \oplus Q_{r-1}$$

لنلاحظ أنه إذا كان $\dim P_\alpha \backslash P_{\alpha+1}$ فإن $Q_\alpha = \{0\}$ الأمر الذي يبرر كتابة P على الشكل:

$P = Q_0 \oplus Q_1 \oplus \ldots\ldots \oplus Q_{\alpha_j}$ حيث $\alpha_j \ni \{0,1,\ldots,r-1\}$ من أجل $j = 1,2,\ldots,s$

ليكن $Z_j \ni Q_{\alpha_j}$ عندئذ يوجد متجه $y_j \ni E$ مرتبته $\alpha_j + 1$ بحيث يكون: $A^{\alpha_j} Y_j = Z_j$. لنعتبر الفضاء الجزئي $G = \overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} [y_j]_A$ يمكن التحقق بسهولة من أن G فضاء جزئي منتهي الأبعاد ونقي بالنسبة للمؤثر A، وبالتالي مخفّض من أجل المؤثر A[3]. ليكن الآن $x \ni E$.

يمكن استناداً إلى النتيجة (*) كتابة المتجه x على الشكل:

$$x = A^{n_1} x_1 + \ldots + A^{n_k} x_k \qquad \text{(i)}$$

حيث $n_{i+1} > n_i$، $m_{i+1} = O(x_{i+1}) > O(x_i) = m_I$ و $m_{i+1} - n_{i+1} > m_i - n_i$

من أجل $i = 1,\ldots,k$ بما أن $A^{m_i-1}x \ni \ker A \cap A^{m_i-1}(E) \left(= Q_{m_i-1}\right)$، إذن يوجد من أجل كل $i \ni \{1,2,\ldots,k\}$ عدد طبيعي $\alpha_{j(i)}$، $j_{(i)} \ni \{1,2,\ldots,k\}$ بحيث يكون $\alpha_{j(i)} = m_I - 1$ يترتب على ذلك، وعلى النتيجة (*) أن المتجه:

$$y = A^{n_1} y_{j(1)} + A^{n_2} y_{j(2)} + \ldots + A^{n_k} y_{j(k)} \qquad \text{(ii)}$$

يولد الفضاء الجزئي $[x]_{C(A)}$.

تجدر ملاحظة أنه قد لا تكون للمتجه y مركبات في واحد أو أكثر من الفضاءات الجزئية $[y_j]_A$، والحالة هذه، لنفرض أنه ليس للمتجه y مركبة في أي من الفضاءين الجزئيين $[y'_i]_A$ و $[y''_i]_A$، ولنفرض أن المتجهين $A^{n'} y_{j'}$ و$A^{n''} y_{j''}$ يولدان الفضاءين الجزئيين $[x]_{C(A)} \cap [y_{j'}]_A$ و $[x]_{C(A)} \cap [y_{j''}]_A$ (على الترتيب)، عندئذ يولد المتجه:

$$Z = Y + A^{n'}Y_{j'} + A^{n''}Y_{j''} = A^{\gamma_1}Y_1 + A^{\gamma_2}Y_{j''} + ... + A^{\gamma_s}Y_s$$

الفضاء الجزئي $[x]_{C(A)}$ ينتج أن:

$$[x]_{C(A)} = \sum_{j=1}^{s} A^{\gamma_j}\left(\ker A^{\alpha_j+1}\right)$$

لنبين أخيراً أن γ_j أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة: $[x]_{C(A)} \ni A^{\gamma}{}_j Y_j$. بالعودة إلى العلاقتين (i) و(ii) نجد أنه يكفي التحقق من أن n_i أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة: $[x]_{C(A)} \ni A^{n}{}_i x_i$. من أجل ذلك يكفي أن تتحقق العلاقتان:

$$[x_i]_A \cap A^{n_i+1}(E) \cap \ker A^{m_{i+1}-n_i+1} \subseteq [x_i]_A \cap A^{n_i}(E) \cap \ker A^{m_i-n_i}$$

$$[x_{i+1}]_A \cap A^{n_i}(E) \cap \ker A^{m_i-n_i} \subseteq [x_{i+1}]_A \cap A^{n_{i+1}}(E) \cap \ker A^{m_{i+1}-n_{i+1}}$$

ولكن:

$$[x_i]_A \cap A^{n_i}(E) \cap \ker A^{m_i-n_i} = [x_i]_A \cap A^{n_i}(E) = [x_i] \cap \ker A^{m_i-n_i}$$

إذن يكفي أن تتحقق العلاقتان:

$$[x_i]_A \cap A^{n_{i+1}}(E) \subseteq [x_i]_A \cap A^{n_i}(E)[x_{i+1}]_A \cap \ker A^{m_i-n_i} \subseteq [x_{i+1}]_A \cap \ker A^{m_{i+1}-n_{i+1}}$$

وحيث أن $n_{i+1} > n_i$ و $m_{i+1} - n_{i+1} > m_i - n_i$ وذلك استناداً إلى النتيجة (*)، إذن فالعلاقتان الأخيرتان محققتان، وهذا ينهي البرهان.

تبين النتيجة التالية أن أي فضاء جزئي فوق لا متغير من أجل مؤثر من الصف NF(E) يكون مولداً بمتجه واحد.

نتيجة: ليكن $A \in NF(E)$ و $F \in Lat_0(A)$. يوجد متجه $Y \in \left(G = \bigoplus_{j=1}^{s}[y_j]_A\right)$ يولد الفضاء الجزئي F.

البرهان: لنلاحظ أن الفضاء الجزئي $F \cap [y_j]_A$ لامتغير من أجل مقصور المؤثر A على $[y_j]_A$، وبالتالي يوجد عدد طبيعي γ_j $(0 \le \gamma_j \le \alpha_j + 1)$، بحيث يكون: $F \cap [y_j]_A = [A^{\gamma_j} y_j]_A$ لنعتبر المتجه: $Y = \sum_{j=1}^{s} A^{\gamma_j} Y_j$. من الواضح أن $G \ni Y$. سنبين فيما يلي أن المتجه Y يولد الفضاء الجزئي F.

بما أن $F \ni Y$، إذن $F \supseteq [Y]_{C(A)}$. من جهة أخرى، ليكن $F \ni Z$. عندئذٍ يوجد، استناداً إلى المبرهنة (1) متجه $G \ni u$ بحيث يكون $[u]_{C(A)} = [Z]_{C(A)} \subseteq F$ ينتج أن $F \cap G \ni u$. لنضع $u = u_1 + u_2 + ... + u_s$ عندئذٍ $[A^{\gamma}_j Y_j]_A = F \cap [y_j]A \ni u_j$ ويكون بالتالي $U(A\gamma_j Y_j) \le U(u_j)$

عندئذٍ نجد استناداً إلى النتيجة (*) أن:

$u_j \ni [A^{\gamma_j} Y_j]_{C(A)} \supseteq [Y]_{C(A)}$ وذلك من أجل $j = 1,2,\ldots,s$ وينتج أن $[Y]_{C(A)} \ni u$، وبالتالي يكون $[u]_{C(A)} \supseteq [Y]_{C(A)}$، أي أن $[Z]_{C(A)} \supseteq [Y]_{C(A)}$ وهذا يقتضي أن يكون $[Y]_{C(A)} \ni Z$. ينتج أن $[Y]_{C(A)} \supseteq F$ وهذا ينهي البرهان.

III- نهتم فيما يلي بوصف شبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغير من أجل مؤثر A من الصف NF(E). ليكن $\mathrm{Lat}_0(A) \ni F$ عندئذٍ استناداً إلى ما تقدم في الفقرة السابقة، مع الاحتفاظ بالرموز والمصطلحات نفسها يكون $F = \sum_{j=1}^{s} A^{\gamma_j}\left(\ker A^{\alpha_j+1}\right)$، حيث $\alpha_j + 1 = 0(y_j)$، وحيث γ_j أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة: $F \ni A_j^{\gamma} y_j$ لنعرف على المجموعة $\{1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,s\}$ دالة f_F على النحو التالي:

$$f_F(j) = (\alpha_j + 1) - \gamma_j \quad , \quad j \in \{1,2,\ldots, s\}$$

نسمي f_F الدالة المتعلقة بالفضاء الجزئي F.

تمهيدية: تحقق الدالة f_F المعرفة أعلاه الشرطين:

$$(i) 0 \le f_F(j) \le \alpha_j + 1 \ , \ (ii) 0 \le f_F(j+1) - f_F(j) \le \alpha_{j+1} - \alpha_j$$

وذلك من أجل $j = 1,2,\ldots,s$

البرهان:

بما أن $0 \le \gamma_j \le \alpha_j + 1$، إذن $0 \le f_F(j) \le \alpha_j + 1$، من أجل $j = 1,2,\ldots,s$ أي أن f_F يحقق الشرط (I).

من جهة أخرى بما أن γ_j أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة $F \ni A_j^{\gamma} y_j$، إذن:

$$[Y_j]_A \cap A^{\gamma_{j+1}}(E) \cap \ker A^{(\alpha_{j+1}+1) - \gamma_{j+1}} \subseteq [Y_j]_A \cap A^{\gamma_j}(E) \cap \ker A^{(\alpha_j+1) - \gamma_j}$$

و

$$[Y_{j+1}]_A \cap A^{\gamma_j}(E) \cap \ker A^{(\alpha_j+1) - \gamma_j} \subseteq [Y_{j+1}]_A \cap A^{\gamma_{j+1}}(E) \cap \ker A^{(\alpha_{j+1}+1) - \gamma_{j+1}}$$

ولكن:

$$[Y_j]_A \cap A^{\gamma_i}(E) \cap \ker A^{(\alpha_{j+1}) - \gamma_j} = [Y_j]_A \cap A^{\gamma_i}(E) = [Y_i]_A \cap \ker A^{(\alpha_i + 1_i) - \gamma_j}$$

و

$$[Y_j]_A \cap A^{\gamma_{i+1}}(E) \cap \ker A^{(\alpha_{i+1}+1) - \gamma_{j+1}} = [Y_j]_A \cap A^{\gamma_{j+1}}(E)$$

و

$$[Y_{j+1}]_A \cap A^{(\gamma_j+1)}(E) \cap \ker A^{(\alpha_i+1) - \gamma_j} = [Y_{j+1}]_A \cap \ker A^{(\alpha_j+1) - \gamma_j}$$

إذن:

$$[Y_i]_A \cap A^{\gamma_{j+1}}(E) \cap [Y_j]_A \cap A^{\gamma_j}(E) \qquad (1)$$

و

(2) $$[Y_{j+1}]_A \cap \ker A^{(\alpha_j+1)-\gamma_j}(E) \subseteq [Y_{j+1}]_A \cap \ker A^{(\alpha_{j+1}+1)-\gamma_{j+1}}$$

ينتج من العلاقة (1) أن $\gamma_{j+1} \geq \gamma_j$، كما ينتج من العلاقة (2) أن: $\alpha_{j+1} - \gamma_{j+1} \geq \alpha_j - \gamma_j$ وهاتان المتباينتان الأخيرتان تؤديان بدروهما إلى تحقيق الشرط (ii).

لنرمز بـ$S(A)$ لمجموعة كل الدوال f المعرفة على المجموعة $\{1,2,\ldots,s\}$، والتي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الطبيعية بحيث تحقق الشرطين:

(i) $0 \leq f(j) \leq \alpha_j+1$ (ii) $0 \leq f(j+1) - f(j) \leq \alpha_{j+1} - \alpha_j$

من أجل $j = 1,2,\ldots,s$

إن $S(A)$ مجموعة ملتهية:

ليكن $S(A) \ni f$ بما أن $f(1) \in \{0,1,2,\ldots \alpha_1+1\}$، إذن توجد α_1+2 إمكانية لتعريف f من أجل $j = 1$. وحيث أن $f(2) - f(1) \in \{0,1,2,\ldots \alpha_2-\alpha_1\}$، إذن هناك $\alpha_2 - \alpha_1+1$ إمكانية لتعريف f من أجل $j = 2$. وهكذا نجد، بمتابعة المحاكمة بنفس الأسلوب، انه توجد $(\alpha_1+2)(\alpha_2-\alpha_1+1),\ldots,(\alpha_s - \alpha_{s-1}+1)$ إمكانية لتعريف f على المجموعة $\{1,2,\ldots,s\}$.

ينتج أن المجموعة $S(A)$ منتهية، وعدد عناصرها:

$(\alpha_1+2)(\alpha_2-\alpha_1+1),\ldots,(\alpha_s - \alpha_{s-1}+1)$ دالة. لنعرف على المجموعة $S(A)$ علاقة ترتيب $\geq$ على النحو التالي:

$f_2 \geq f_1$ إذا وفقط إذا كان $f_2(j) > f_1(j)$، من أجل $j = 1,2,\ldots,s$ عندئذ تكون $S(A)$ مرتبة جزئياً.

ليكن f_1 و$S(A) \ni f_2$ ولنضع:

$$g(j) = \inf(f_1(j)\ ,\ f_2(j))$$
$$g'(j) = \sup(f_1(j)\ ,\ f_2(j))$$

وذلك من أجل $j = 1,2,\ldots,s$. عندئذ يكون:

$g = \inf(f_1, f_2)$ و $g' = \sup(f_1, f_2)$. نتحقق بسهولة من أن g و g' عنصران من $S(A)$، لينتج أن $S(A)$ شبكة. كذلك يمكننا التحقق من أنها توزيعية (Distributif).

لدينا الآن المبرهنة التالية:

مبرهنة (2):

ليكن A مؤثراً من الصف $NF(E)$ ، $Lat_0(A) \ni F$، وf_F الدالة المتعلقة بـF عندئذ تعرف العلاقة $F \longrightarrow f_F$ ايزومورفيسماً (Isomorphisme) بين الشبكتين $Lat_0(A)$ و$S(A)$.

البرهان: لنرمز بـT للتطبيق المعرف على $Lat_0(A)$ بالعلاقة: $T(F) = f_F$.

سنتحقق فيما يلي من أن:

(1) T تطبيق للشبكة $Lat_0(A)$ في الشبكة $S(A)$.

(2) T متباين.

(3) T غامر.

(4) $F' \supseteq F$ إذا وفقط إذا كان $T(F') \geq T(F)$.

(1)- ليكن $Lat_0(A) \ni F$. استناداً إلى المبرهنة (1) ونتيجتها، يكون $F = \sum_{j=1}^{s} A^{\gamma_j}\left(\ker A^{\alpha_j+1}\right)$،

حيث $0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j+1$ وحيث γ_j أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة $A_j^{\gamma}Y_j \ni F$. عندئذ تكون الدالة f_F المتعلقة بـ F معرفة بالعلاقة:

$f_F(j) = (\alpha_j+1) - \gamma_j$ وذلك من أجل $j = 1,2,\ldots,s$. بالعودة إلى التمهيدية نجد أن $S(A) \ni f_F$ مما يبرهن (1).

(2)- ليكن F و $F' \in Lat_0(A)$ بحيث أن $F' \neq F$. لنفرض أن $f_{F'} = f_F$ عندئذ نجد أن:

$$f_F(j) = (\alpha_j+1) - \gamma_j \ , \ f_{F'}(j) = (\alpha_j+1) - \gamma'_j \ , \ j = 1,2,\ldots,s$$

وبالتالي يكون $\gamma'_j = \gamma_j$ من أجل $j = 1,2,\ldots,s$. وذلك يعني أن $F' = F$. وهذا تناقض فالفرض خاطئ. أي أن $f_{F'} \neq f_F$ وهذا ما يبرهن (2).

(3)- ليكن $S(A) \ni f$ ولنعتبر الفضاء الجزئي $F = \sum_{j=1}^{s} A^{(\alpha_j+1)-f(j)} \ker A^{\alpha_j+1}$ عندئذ $Lat_0(A) \ni F$. لنتحقق من أن $T(F) = f$. يكفي أن نبين أن $(\alpha_j+1) - f(j)$ أصغر عدد طبيعي تتحقق من أجله العلاقة $A^{(\alpha_j+1)-f(j)}Y_j \in F$ وبالتالي يكفي أن تتحقق العلاقتان:

$$[Y_j]_A \cap A^{(\alpha_{j+1}+1)-f(j+1)}(E) \cap \ker A^{f(j+1)} \subseteq [Y_j]_A \cap A^{(\alpha_j+1)-f(j)}(E) \cap \ker A^{f(j)}$$

$$[Y_{j+1}]_A \cap A^{(\alpha_j+1)-f(j)}(E) \cap \ker A^{f(j)} \subseteq [Y_{j+1}]_A \cap A^{(\alpha_{j+1}+1)-f(j+1)}(E) \cap \ker A^{f(j+1)}$$

أو أن تتحقق العلاقتان:

$$[Y_j]_A \cap A^{(\alpha_{j+1}+1)-f(j+1)}(E) \subseteq [Y_j]_A \cap A^{(\alpha_j+1)-f(j)}(E)$$

و

$$[Y_{j+1}]_A \cap \ker A^{f(j)} \subseteq [Y_{j+1}]_A \cap \ker A^{f(j+1)}$$

ومن أجل ذلك يكفي أن تتحقق المتباينتان:

$$f(j+1) \geq f(j) \quad \text{و} \quad (\alpha_{j+1}+1) - f(j+1) \geq (\alpha_j+1) - f(j)$$

وذلك من أجل $j = 1,2,\ldots,s$. ولكن المتباينتين الأخيرتين محققتان فعلاً لأن $S(A) \ni f$. وذلك ما ينهي برهان (3).

(4)– ليكن $F' \supseteq F$ ولنفرض أن $T(F') < T(F)$ يوجد عندئذٍ $\{1,2,\ldots,s\} \ni j_0$ بحيث يكـــون $T(F')(j_0) < T(F)(j_0)$ ويكـــون بالتـــالي $\gamma'_{j_0} > \gamma_{j_0}$ مـــن جهـــة أخـــرى، بمـــا أن $A^{\gamma_{j_0}} Y_{j_0} \ni F(\supseteq F')$، إذن γ'_{j_0} ليس أصغر عدد طبيعي يكون من أجلـــه $A^{\gamma'_{j_0}} Y_{j_0} \in F'$ وهـــذا تناقض، فالفرض خاطئ وبالتالي $T(F') \geq T(F)$. بالعكس، ليكن $T(F') \geq T(F)$، ولنفـــرض أن $F \not\supseteq F'$. يوجد عندئذٍ متجه $F \ni Y$ بحيث أن $F' \not\ni Y$. استناداً إلى المرهنة (1) يوجد متجه $Z \ni \bigoplus_{j=1}^{s} [Y_j]_A$ بحيث يكون $[Z]_{C(A)} = [Y]_{C(A)}$ ينتج أن $F \ni Z$ و $F' \not\ni Z$.

ليكن $Z = \sum_{j=1}^{s} p(A) Y_j$، حيث $P(A)$ كثير حدود في المؤثر A، يوجد عندئـــذٍ عـــدد طبيعـــي، j_0 ,$(1 \leq j_0 \leq s)$ بحيث أن $F \ni P(A) Y_{j_0}$، و $F' \not\ni P(A) Y_{j_0}$.

ينتج أن: $P(A) Y_{j_0} \ni [A^{\gamma_{j_0}} Y_{j_0}]_A$ و $P(A) Y_{j_0} [A^{\gamma'_{j_0}} Y_{j_0}]_A$ وهذا يؤدي إلـــى أن يكـــون $\gamma'_{j_0} > \gamma_{j_0}$ ويكون بالتالي $T(F')(j_0) < T(F)(j_0)$ وهذا تناقض. فالفرض خاطئ، وبالتالي فـــإن $F' \supseteq F$ وهذا ما يبرهن (4) وينهي برهان المبرهنة (2).

تُقدِّم النتيجة المباشرة التالية وصفاً كاملاً لشبكة الفضاءات الجزئية فوق اللامتغيرة من أجل مؤثر $NF(E) \ni A$.

نتيجة: إذا كان $NF(E) \ni A$، فإن $Lat_0(A)$ تكون شبكة توزيعية منتهية، عدد عناصرها:

$$(\alpha_1+2)(\alpha_2-\alpha_1+1)(\alpha_3-\alpha_2+1)\ldots(\alpha_s-\alpha_{s-1}+1)$$

REFERENCES   المراجع

[1]- CHARLES. B, 1979 – Opérateurs Linéaires Sur un Espace De Banach Et Modules Sur un Anneau Principal. Symposia. Mathematica Vol.23, p121-143.

[2]- KAPLANSKY. I. 1969 – Infinite Abelian Groups. Univ. Michigan. Press. Ann Arbor. (U.S.A).

[3]- كفى، عهد 1989 – فضاءات جزئية فوق لامتغيرة من أجل مؤثر خطي معدوم القـوة على فضاء باناخ. مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية. المجلد 11، العـدد 4.

[4]- كفى، عهد 1989 – الفضاءات الجزئية المخفضة من أجل مؤثر على فضاء بانـاخ – مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية. المجلد 11. العدد 3.