The Cauchy – Pompeiu's Representation Formula In The Octal Of Unit Disk

Dr. Hasan Baddour*
Dr. Abd Albasset Younso**
Anas Qr***

(Received 21 / 6 / 2022. Accepted 25 / 10 /2022)

□ ABSTRACT □

In this research, we found the integral Cauchy – Pompeiu's formula in the octal of unit disk $\mathbb{D}_4$ of the complex plain, for the class $C^1(\mathbb{D}_4;\mathbb{C}) \cup C(\overline{\mathbb{D}_4};\mathbb{C})$,by editing the Cauchy – Pompeiu's representation in the unit disk, using the reflection method, to determine the Integral's Cauchy – Pompeiu's Operator, in this domain, the integral Cauchy – Pompeiu’s formula in a domain Ω ,separated onto two integrals, the first is on the boundary of Ω ,and represents an analytic function on Ω, the second is on the domain Ω, and represents the Cauchy – Pompeiu’s Operator.

Keywords: operator theory – Cauchy pompeiu's operator – octal unit disk – integral's representation – Schwartz's problem – complex analysis.

*Professor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria.
** Doctor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria.
*** PHD student – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria – Email: anas.deebkar@tishreen.edu.sy.

صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة في ثُمن قرص الواحدة

د. حسن بدّور*

د. عبد الباسط يونسو**

أنس قر ***

(تاريخ الإيداع 21 / 6 / 2022. قُبِل للنشر في 25 / 10 /2022)

◻ ملخّص ◻

في هذا البحث قمنا بتعيين صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة في ثُمن قرص الواحدة $\mathbb{D}_4$ من المستوي العقدي, لصف الدوال $C^1(\mathbb{D}_4;\mathbb{C}) \cap C(\mathbb{D}_4;\bar{\mathbb{C}})$ وذلك بتعديل الصيغة الموجودة مسبقاً في قرص الواحد, باستخدام طريقة الانعكاس, بُغية إيجاد مؤثر كوشي – بومبيو التكاملي في هذه المنطقة, إذ تنقسم صيغة كوشي بومبيو التكاملية في منطقة Ω إلى مجموع تكاملين, أحدهما على حدود المنطقة ويُمثّل دالة تحليليّة في Ω, أما التكامل الثاني فهو تكامل على المنطقة Ω, ويُمثّل مؤثر كوشي – بومبيو التكاملي في Ω.

الكلمات المفتاحية: نظريّة المؤثرات – مؤثر كوشي بومبيو – ثُمن قرص الواحدة – التمثيل التكاملي – مسألة شوارتز – التحليل العقدي.

* أستاذ– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

** دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

*** طالب دكتوراه – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية anas.deebkar@tishreen.edu.sy

مقدمة:

تُعد نظريّة المؤثرات فرعاً مهماً من فروع التحليل الدّالي, تدرس خصائص المؤثرات (خطي , محدود , مستمر , تقليص , ...) على الفضاءات الشهيرة مثل فضاء الدوال المستمرة $C(D;\mathbb{C})$ في المنطقة D, وفضاء الدوال القابلة للمكاملة $L(D;\mathbb{C})$, وغيرها, في هذا البحث سنوجد $T_{\mathbb{D}_4}$, مؤثر كوشي – بومبيو التكاملي في ثُمن قرص الواحدة من المستوي العقدي $\mathbb{D}_4$, وذلك بتعديل صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة في قرص الواحدة.

دراسات مرجعيّة:

❋ قام H.Begehr و T.Vaitekhovich عام (2009) بتعيين صيغة كوشي – بومبيو في نصف الحلقة [1].

❋ قام B.Shupeyeva عام (2012) بتعيين صيغة كوشي – بومبيو في رُبع الحلقة [2].

❋ قام B.Shupeyeva عام (2016) بتعيين صيغة كوشي – بومبيو في النصف العلوي للمسدس ذو الرؤوس $\pm 2, \pm 1 + i\sqrt{3}$ [3].

❋ قام H.Begehr عام (2018) بتعيين صيغة كوشي – بومبيو في المنطقة الناتجة من اقتطاع دائرة من دائرة أخرى تمُسها داخلاً وغير مشتركتين بالمركز [4].

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في أن مؤثر كوشي – بومبيو التكاملي في المنطقة $D \subset \mathbb{C}$, يُساعد في تعيين حل مسألة شوارتز الحديّة الآتية [5]:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = f & in\ D \\ Re(w) = \gamma & on\ \partial D \end{cases}$$

وذلك بالاستفادة من المساواة:

$$\partial_{\bar{z}} Tf = f$$

ويهدف البحث إلى:

- تعيين صيغة كوشي – بومبيو التكاملية في ثُمن قرص الواحدة من المستوي العقدي
$$\mathbb{D}_4 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 , 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$$
- تعيين مؤثر كوشي – بومبيو التكاملي في هذه المنطقة $T_{\mathbb{D}_4}$.

طرائق البحث ومواده:

يشمل البحث مبرهنات وتعاريف تربط بين نظرية المؤثرات و التحليل الدالي و التمثيل التكاملي ويستند بشكل أساسي على تعديل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية المعرّفة على منطقة نظاميّة كيفية D , لتتوافق مع ثُمن قرص الواحد في المستوي العقدي .

التعاريف الأساسية:

نذكر فيما يأتي مجموعة من التعاريف الأساسية وبعض الملاحظات التي تساعدنا في فهم المصطلحات العلمية الواردة في البحث :

تعريف (1) المنطقة النظاميّة Regular Domain [6]:

تُدعى المنطقة $D \subset \mathbb{C}$, منطقة نظامية إذا كانت مفتوحة ومحدودة و حدودها منحنٍ أملس أو اجتماع منتهٍ لمنحنيات ملساء, وموجّه بعكس عقارب الساعة.

نذكر أمثلةً للمناطق النظامية : الدائرة, الحلقة, نصف الحلقة, وربعها, نصف الدائرة, وربعها,المثلث, المستطيل, متوازي الأضلاع, ...

صيغة كوشي – بومبيو التكاملية Cauchy – Pompeiu's representation formula [7]:

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ منطقة نظامية, ولتكن الدالة $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$, عندئذٍ لكل $z \in D$ و $\zeta = \xi + i\eta$ تُمثّل الدالة $w = w(z)$ بإحدى الصيغتين:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{\overline{d\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}}$$

ملحوظة:

عندما $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$, تصبح صيغتا كوشي – بومبيو السابقتان على النحو الآتي:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{\overline{d\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}}$$

ومنه, يمكننا كتابة صيغة كوشي – بومبيو التكاملية بشكل آخر [8], على النحو الآتي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} w(z) & ; \ z \in D \\ 0 & ; \ z \notin \overline{D} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\bar{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int_D w_{\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} = \begin{cases} w(z) & ; \ z \in D \\ 0 & ; \ z \notin \overline{D} \end{cases}$$

تعريف (2) مؤثّر كوشي – بومبيو Cauchy – Pompeiu's Oparator [7]:

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ منطقة نظامية, يُدعى المؤثر التكاملي

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad ; \quad \zeta = \xi + i\eta$$

بمؤثر كوشي – بومبيو في المنطقة D, حيث $f \in L_1(D;\mathbb{C})$.

تعريف (3) مسألة شوارتز الحديّة The Schwartz's problem [5]:

إنّ حل مسألة شوارتز الحدية هو عملية إيجاد دالة w, في المنطقة $D \subset \mathbb{C}$, تحقق المعادلة :

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} w = f & in \quad D \\ Re(w) = \gamma & on \quad \partial D \end{cases}$$

حيث $f \in L_1(D;\mathbb{C})$, $\gamma \in C(\partial D,\mathbb{C})$ هما دالتان مفروضتان.

ملحوظة: تُعدّل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية من منطقة إلى أُخرى, لتحقيق الشرط الحدّي لمسألة شوارتز.

النتائج والمناقشة:

يُعرّف ثُمن قرص الواحدة بالشكل الآتي:

$$\mathbb{D}_4 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 \, , 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$$

ولنفرض:

$\partial_1 \mathbb{D}_4$ للقطعة المستقيمة $[0,1]$

$\partial_2 \mathbb{D}_4$ للقوس $\left[1, e^{\frac{\pi}{4}i}\right] : \tau \to e^{\tau i}$, حيث $\tau \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$\partial_3 \mathbb{D}_4$ للقطعة المستقيمة $\left[e^{\frac{\pi}{4}i}, 0\right]$

سنستخدم طريقة الانعكاس, لتعديل صيغة كوشي – بومبيو التكاملية, وتعريفها في المنطقة $\mathbb{D}_4$.

نفرض $z, \zeta \in \mathbb{D}_4$, حيث $z \neq \zeta$, إنّ انعكاس z بالنسبة للقطعة المستقيمة $\partial_3 \mathbb{D}_4$ يعطي $i\bar{z}$, ومنه يكون انعكاس z و $i\bar{z}$ بالنسبة لمحور التراتيب هما $-\bar{z}$ و iz على الترتيب,

وانعكاس النقاط: $z \, , i\bar{z} \, , -\bar{z} \, , iz$ بالنسبة لمحور الفواصل هي $\bar{z} \, , -iz \, , -z \, , -i\bar{z}$ على الترتيب,

مع مراعاة كيفية z من $\mathbb{D}_4$, نحصل على ثماني مجموعات هي:

$$\mathbb{D}_{4,0} = \mathbb{D}_4$$

$$\mathbb{D}_{4,1} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\} = \{ i\bar{z} \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

$$\mathbb{D}_{4,2} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\} = \{ iz \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

$$\mathbb{D}_{4,3} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right\} = \{ -\bar{z} \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

$$\mathbb{D}_{4,4} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4} \right\} = \{ -z \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

$$\mathbb{D}_{4,5} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\} = \{ -i\bar{z} \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

$$\mathbb{D}_{4,6} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\} = \{ -iz \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

$$\mathbb{D}_{4,7} = \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| < 1 \, , \frac{7\pi}{4} < \arg z < 2\pi \right\} = \{ \bar{z} \, ; z \in \mathbb{D}_4 \}$$

من الواضح أنّ:

$$\bigcup_{k=0}^{k=7} \overline{\mathbb{D}_{4,k}} = \overline{\mathbb{D}} = \{ z \in \mathbb{C} \, ; |z| \leq 1 \}$$

إنّ انعكاس النقاط الآتية:

$$z \, , i\bar{z} \, , iz \, , -\bar{z} \, , -z \, , -i\bar{z} \, , -iz \, , \bar{z}$$

بالنسبة لقوس دائرة الواحدة $\mathbb{D}$ يعطي على الترتيب النقاط الآتية:

$$\frac{1}{\bar{z}}, \frac{i}{z}, \frac{i}{\bar{z}}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{\bar{z}}, -\frac{i}{z}, -\frac{i}{\bar{z}}, \frac{1}{z}$$

مع مراعاة كيفية z من $\mathbb{D}_4$, نحصل على ثماني مجموعات أخرى هي:

$$\mathbb{S}_{4,0} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{\bar{z}}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

$$\mathbb{S}_{4,1} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{\frac{i}{z}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

$$\mathbb{S}_{4,2} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\} = \left\{\frac{i}{\bar{z}}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

$$\mathbb{S}_{4,3} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi\right\} = \left\{-\frac{1}{z}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

$$\mathbb{S}_{4,4} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4}\right\} = \left\{-\frac{1}{\bar{z}}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

$$\mathbb{S}_{4,5} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right\} = \left\{-\frac{i}{z}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

$$\mathbb{S}_{4,6} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}\right\} = \left\{-\frac{i}{\bar{z}}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

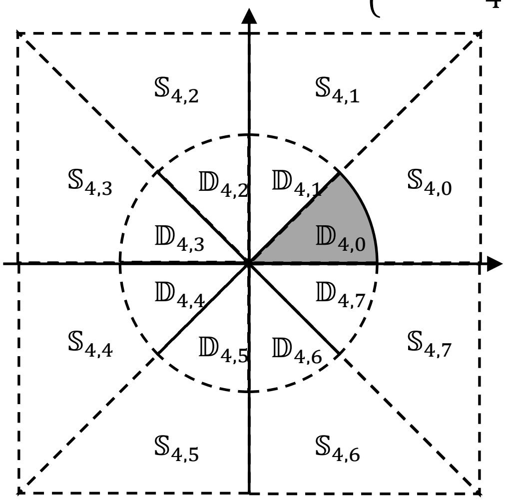
$$\mathbb{S}_{4,7} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; |z| > 1\,, \frac{7\pi}{4} < \arg z < 2\pi\right\} = \left\{\frac{1}{\bar{z}}\,; z \in \mathbb{D}_4\right\}$$

ونلاحظ أنّ:

$$\bigcup_{k=0}^{k=7} \overline{\mathbb{S}_{4,k}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,; |z| \geq 1\}\ ,\ \bigcup_{k=0}^{k=7} \left[\overline{\mathbb{S}_{4,k}} \cup \overline{\mathbb{D}_{4,k}}\right] = \mathbb{C}$$

حيث:

$$\overline{\mathbb{S}_{4,k}} \cup \overline{\mathbb{D}_{4,k}} = \left\{z \in \mathbb{C}\,; \frac{k\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{(k+1)\pi}{4}\right\}\ ; k = 0,1,2,\dots,7$$



مبرهنة 1: كل دالّة $w \in C^1(\mathbb{D}_4;\mathbb{C}) \cap C(\overline{\mathbb{D}_4};\mathbb{C})$ تُمثّل بالشكل الآتي:

$$w(z) = \frac{2}{\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}} \left\{\mathrm{Re}[w(\zeta)].\left[\frac{\zeta^4+z^4}{\zeta^4-z^4} + \frac{\zeta^4 z^4+1}{z^4\zeta^4-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{4}{\pi}\int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}} \mathrm{Im}[w(\zeta)]\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{4}{\pi i}\int_1^0 \mathrm{Re}\left[w\left(t.e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\right].\left[\frac{t^3}{t^4+z^4}+\frac{t^3z^4}{z^4t^4+1}\right]dt$$

$$+\frac{4}{\pi i}\int_0^1 \mathrm{Re}[w(t)].\left[\frac{t^3}{t^4-z^4}+\frac{t^3z^4}{z^4t^4-1}\right]dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4}\left\{w_{\bar\zeta}(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]-\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}.\left[\frac{4\bar\zeta^3}{\bar\zeta^4-z^4}+\frac{4\bar\zeta^3z^4}{z^4\bar\zeta^4-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

البرهان:

نطبّق صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة على النقاط الآتية:

$$z\,,i\bar z\,,iz\,,-\bar z\,,-z\,,-i\bar z\,,-iz\,,\bar z\,,\frac{1}{\bar z}\,,\frac{i}{z}\,,\frac{i}{\bar z}\,,-\frac{1}{z}\,,-\frac{1}{\bar z}\,,-\frac{i}{z}\,,-\frac{i}{\bar z}\,,\frac{1}{z}$$

مع ملاحظة أنّ جميع النقاط السابقة تقع خارج $\mathbb{D}_4$, باستثناء z, فهي تنتمي إلى $\mathbb{D}_4$, نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\quad \ldots.(1.1)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\bar z}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\bar z}\quad \ldots.(1.2)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+z}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+z}\quad \ldots.(1.3)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\bar z}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\bar z}\quad \ldots.(1.4)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-iz}-\frac{1}{\pi}\int_{D} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-iz}\quad \ldots.(1.5)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-i\bar z}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-i\bar z}\quad \ldots.(1.6)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+iz}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+iz}\quad \ldots.(1.7)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+i\bar z}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+i\bar z}\quad \ldots.(1.8)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{1}{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\frac{1}{z}}\quad \ldots.(1.9)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{1}{\bar z}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\frac{1}{\bar z}}\quad \ldots.(1.10)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\frac{1}{z}}\quad \ldots.(1.11)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{1}{\bar z}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\frac{1}{\bar z}}\quad \ldots.(1.12)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{i}{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar\zeta}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\frac{i}{z}}\quad \ldots.(1.13)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{i}{\bar{z}}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\frac{i}{\bar{z}}} \quad \ldots.(1.14)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{i}{z}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\frac{i}{z}} \quad \ldots.(1.15)$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{d\zeta}{\zeta+\frac{i}{\bar{z}}}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{d\xi d\eta}{\zeta+\frac{i}{\bar{z}}} \quad \ldots.(1.16)$$

بجمع (1.1) و (1.3) من جهة, و بجمع (1.2) و (1.4) من جهة أخرى نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-z^2}d\xi d\eta \quad \ldots\ (1.1')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-\bar{z}^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2-\bar{z}^2}d\xi d\eta \quad \ldots\ (1.2')$$

بجمع (1.5) و (1.7) من جهة, وبجمع (1.6) و (1.8) من جهة أخرى نجد:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2+z^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2+z^2}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.3')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2+\bar{z}^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta}{\zeta^2+\bar{z}^2}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.4')$$

بجمع (1.9) و (1.11) من جهة, وبجمع (1.10) و (1.12) من جهة أخرى نجد:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2-1}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.5')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2-1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2-1}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.6')$$

بجمع (1.13) و (1.15) من جهة, وبجمع (1.14) و (1.16) من جهة أخرى نجد:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2+1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta z^2}{z^2\zeta^2+1}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.7')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2+1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2\zeta^2+1}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.8')$$

بجمع $(1.1')$ و $(1.3')$ من جهة, وبجمع $(1.2')$ و $(1.4')$ من جهة أخرى نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.1'')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-\bar{z}^4}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-\bar{z}^4}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.2'')$$

بجمع $(1.5')$ و $(1.7')$ من جهة, وبجمع $(1.6')$ و $(1.8')$ من جهة أخرى نجد:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{4\zeta^3 z^4}{z^4\zeta^4-1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{4\zeta^3 z^4}{z^4\zeta^4-1}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.3'')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4\zeta^4-1}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4\zeta^4-1}d\xi d\eta \quad \ldots.(1.4'')$$

بجمع $(1.1'')$ و $(1.3'')$ من جهة, وبجمع $(1.2'')$ و $(1.4'')$ من جهة أخرى نجد:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3 z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]d\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3 z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]d\xi d\eta \quad \dots.(1.1''')$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_4} w(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-\bar{z}^4}+\frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4\zeta^4-1}\right]d\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-\bar{z}^4}+\frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4\zeta^4-1}\right]d\xi d\eta \quad \dots.(1.2''')$$

يُمكننا صياغة $(1.1''')$ بالشكل الآتي:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}} w(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3 z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_1^0 w\left(t.e^{\frac{\pi}{4}i}\right).\left[\frac{4t^3}{t^4+z^4}+\frac{4t^3 z^4}{z^4t^4+1}\right]dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 w(t).\left[\frac{4t^3}{t^4-z^4}+\frac{4t^3 z^4}{z^4t^4-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3 z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]d\xi d\eta \dots.(*)$$

بأخذ مرافق طرفي $(1.2''')$ وإعادة صياغة الناتج نحصل على:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\ 0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}} \overline{w(\zeta)}.\left[\frac{4}{1-\zeta^4 z^4}+\frac{4z^4}{z^4-\zeta^4}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_1^0 \overline{w\left(t.e^{\frac{\pi}{4}i}\right)}.\left[\frac{4t^3}{t^4+z^4}+\frac{4t^3 z^4}{z^4t^4+1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \overline{w(t)}.\left[\frac{4t^3}{t^4-z^4}+\frac{4t^3 z^4}{z^4t^4-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4} \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}.\left[\frac{4\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^4-z^4}+\frac{4\bar{\zeta}^3 z^4}{z^4\bar{\zeta}^4-1}\right]d\xi d\eta \dots.(**)$$

حيث:

$$|\zeta|=1 \Rightarrow \zeta.\bar{\zeta}=1 \ , d\bar{\zeta}=-\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$
$$\mathrm{Im}(\zeta)=0 \Rightarrow \zeta=\bar{\zeta}=t$$

بطرح $(**)$ من $(*)$ نحصل على:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}}\left\{w(\zeta).\left[\frac{4\zeta^4}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^4z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]-\overline{w(\zeta)}.\left[\frac{4}{1-\zeta^4z^4}+\frac{4z^4}{z^4-\zeta^4}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_1^0\left\{w\left(t.e^{\frac{\pi}{4}i}\right).\left[\frac{4t^3}{t^4+z^4}+\frac{4t^3z^4}{z^4t^4+1}\right]\right.$$
$$\left.+\overline{w\left(t.e^{\frac{\pi}{4}i}\right)}.\left[\frac{4t^3}{t^4+z^4}+\frac{4t^3z^4}{z^4t^4+1}\right]\right\}dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left\{w(t).\left[\frac{4t^3}{t^4-z^4}+\frac{4t^3z^4}{z^4t^4-1}\right]+\overline{w(t)}.\left[\frac{4t^3}{t^4-z^4}+\frac{4t^3z^4}{z^4t^4-1}\right]\right\}dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4}\left\{w_{\bar\zeta}(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]\right.$$
$$\left.-\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}.\left[\frac{4\bar\zeta^3}{\bar\zeta^4-z^4}+\frac{4\bar\zeta^3z^4}{z^4\bar\zeta^4-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

نضع $w(\zeta)=\mathrm{Re}[w(\zeta)]+i\mathrm{Im}[w(\zeta)]$ في المساواة السابقة, فنجد:

$$w(z)=\frac{2}{\pi i}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}}\left\{\mathrm{Re}[w(\zeta)].\left[\frac{\zeta^4+z^4}{\zeta^4-z^4}+\frac{\zeta^4z^4+1}{z^4\zeta^4-1}\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{4}{\pi}\int_{\substack{|\zeta|=1\\0<\arg\zeta<\frac{\pi}{4}}}\mathrm{Im}[w(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{4}{\pi i}\int_1^0\mathrm{Re}\left[w\left(t.e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\right].\left[\frac{t^3}{t^4+z^4}+\frac{t^3z^4}{z^4t^4+1}\right]dt$$
$$+\frac{4}{\pi i}\int_0^1\mathrm{Re}[w(t)].\left[\frac{t^3}{t^4-z^4}+\frac{t^3z^4}{z^4t^4-1}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4}\left\{w_{\bar\zeta}(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]\right.$$
$$\left.-\overline{w_{\bar\zeta}(\zeta)}.\left[\frac{4\bar\zeta^3}{\bar\zeta^4-z^4}+\frac{4\bar\zeta^3z^4}{z^4\bar\zeta^4-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

وهو المطلوب.

من المبرهنة السابقة, يمكننا تعيين مؤثر كوشي – بومبيو التكاملي المُعدّل في المنطقة $\mathbb{D}_4$, بالشكل الآتي:

$$T_{\mathbb{D}_4}f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_4}\left\{f(\zeta).\left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4-z^4}+\frac{4\zeta^3z^4}{z^4\zeta^4-1}\right]-\overline{f(\zeta)}.\left[\frac{4\bar\zeta^3}{\bar\zeta^4-z^4}+\frac{4\bar\zeta^3z^4}{z^4\bar\zeta^4-1}\right]\right\}d\xi d\eta$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى:

- تعديل صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة لتتوافق مع ثُمن قرص الواحدة.
- تعيين مؤثّر كوشي – بومبيو التكاملي في ثُمن قرص الواحدة $\mathbb{D}_4$.

نوصي باستمرار البحث من خلال:

- دراسة بعض خصائص المؤثر الذي قُمنا بتعيينه $T_{\mathbb{D}_4}$.
- تعيين صيغة كوشي – بومبيو التكامليّة في مناطق جديدة.
- إيجاد مؤثّر كوشي – بومبيو في مناطق جديدة غير قرص الواحدة ودراسة خصائصه.

References:

[1] H.Begehr, T.Vaitekhovich, Harmonic boundary value problems in half disc and half ring, Functiones et Approximatio, 40.2,(2009), pp.251-282.
[2] B. Shupeyeva, "Harmonic boundary value problems in a quarter ring domain", *Advances in Pure and Applied Mathematics*, vol.3, no. 4, pp. 393–419, (2012).
[3] B.Shupeyeva, Dirichlet Problem for Complex Poisson Equation in a Half Hexagon Domain, Journal of Complex Analysis,(2016).
[4] H. Begehr, S.Burgumbayeva, B.Shupeyeva, Harmonic Green Functions for a Plane Domain With two Touching Circles as Boundary, *Advanced Mathematical Models & Applications*, vol.3, no.1, pp. 18–29, (2018).
[5] Y. Wang, Boundary value problems for complex partial differential equations in fan-shaped domains, Ph.D. thesis, FU Berlin, (2011), ttp://www.diss.fuberlin.de/diss/receive.FUDISS−thesis−000000021359.
[6] B.Shupeyeva, Some Basic Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in Quarter Ring and Half Hexagon, Ph.D. thesis, FU Berlin,(2013).
[7] T.Vaitsiakhovich, Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in a ring domain, PhD thesis, FU Berlin, 2008;
www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS thesis 000000003859.
[8] H.Begehr, , T.Vaitekhovich, Schwarz problem in lens and lune. Complex Var. Ell. Eq., **59**(1), 76–84 (2014).