مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد /16/ العدد /3/ 1414 هـ 1994م.

تصنيف التمثيلات البيانية التامة الأصلية وحساب عدد الصفوف

د. اسكندر علي*

▫ ملخص ▫

ندعو التمثيل البياني التام T (هو شكل هندسي مؤلف من رؤوس وأضلاع موجهة بحيث أنَّ كل رأسين مختلفين يصل بينهما ضلع موجه واحد فقط) أصلياً إذا كانت زمرة الأفتومورفيزم Aut T الموافقة له أصلية على مجموعة رؤوس T.

زمرة الأفتومورفيزم لتمثيل بياني تام أصلي هي زمرة تبادلية أصلية رتبتها فردية ومعلوم أيضاً أنها زمرة تآلفية وبالتالي يكون عدد رؤوس التمثيل البياني التام الأصلي من الشكل P^m حيث P عدد أولي و m صحيح موجب.

* الدكتور اسكندر علي مدرس في قسم الرياضيات بكلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

تمكنت من تصنيف التمثيلات البيانية التامة فيما بينها في علاقات رياضية واضحة في كل من الحالتين الآتيتين:

عندما يكون عدد رؤوس التمثيل البياني التام الأصلي من الشكل P^2 وP^3 حيث P عدد أولي.

أولاً: تعاريف ومصطلحات:

1. S_X زمرة التباديل المعرفة على المجموعة X.
2. $GF(P^m)$ حقلٍ منتهٍ مؤلف من P^m عنصر.
3. GL(V) زمرة التطبيقات الخطية المعرفة على الفضاء V.
4. نرمز للزمرة GL(V) بالرمز GL(m,p) إذا كان $V=GF(P^m)$.
5. SL(m,p) زمرة جزئية من GL(m,p) يكون معين كل مصفوفة منها مساوياً للواحد.
6. بفرض أنَّ A زمرة جزئية من GL(V) فندعو A زمرة عازلة في V إذا وجد فضاء شعاعي جزئي V_1 في V بحيث أنَّ: $A(V_1) \neq V_1$ والزمرة التي لا تحقق الخاصة السابقة تُدعى زمرة ناقلة في V.
7. التمثيل البياني التام T: هو شكل هندسي مؤلف من رؤوس وأضلاع موجهة بحيث أنَّ كل رأسين مختلفين يصل بينهما ضلع موجه واحد فقط.

نرمز للضلع الموجهة من الرأس X إلى الرأس Y بالرمز (X , Y) وإذا رمزنا لمجموعة رؤوس T بالرمز V ولمجموعة أضلاعه بـ U فيكون **T = (V , U)**.

8. الايزمرفيزم بين تمثيلين تامين T و T^1 هو التقابل f:

$$f:V \to V^1$$

بحيث أنَّ

$$V(x,y) \in U \Rightarrow (f(x),f(y)) \in U^1 \quad (1)$$

وبحالة خاصة إذا كان $T=T^1$ فيدعى f بافتومورفيزم لـ T وتشكل مجموعة افتومورفيزمات التمثيل T زمرة جزئية من S_V ونرمز لها بالرمز Aut T وتدعى بزمرة T إختصاراً.

9. زمرة الأطباق بين زمرة خطية وزمرة تبديل. نفرض G زمرة جزئية من GL(V) و H زمرة جزئية من S_n ولنفرض أنَّ V_1 هو الجداء الديكارتي لـ V من الدرجة n $(V_1 = V^n)$ ثم نعرف مجموعة التطبيقات الآتية:

$$f:V_1 \to V_1 \langle f_1,\dots,f_n,t\rangle, f_i \in G, t \in H$$
$$v \mapsto \overline{v}$$

حيث أنَّ المركبة t(α) للشعاع $\overline{V}$ هي (v_α) و f_α α=1,.......,n.

فإذا عرفنا عملية الضرب على المجموعة السابقة كما يلي:

نفرض أن g تطبيق آخر من الشكل:

$$g = \langle g_1,\dots,g_n,r\rangle, g_i \in G, r \in H$$

ونعرف الجداء fg كما يلي:

$$fg = \langle g_{t(1)} f_1, \dots\dots g_{t(n)} f_n ; rt \rangle$$

من السهل التأكد أنَّ مجموعة التطبيقات المعرفة سابقاً بشكل زمرة بالنسبة لقانون الضرب الأخير هذا ونرمز لهذه الزمرة بالرمز $G \int H$ وتدعى بزمرة الأطباق بين H , G.

ثانياً: نظرية أساسية [2]:

نظرية (1):

إذا كانت زمرة تباديل أصلية (Prumitive) معرفة على X وإذا كانت رتبة G فردية فإنَّ ما يلي صحيح:

1- $X = P^m$ حيث P عدد أولي و m عدد صحيح موجب و P # 2.

2- يُمكن مطابقة X مع فضاء شعاعي V عدد أبعاده m ومعرّف على الحقل GF(P) بحيث أنَّ G تعطى بالعلاقة التالية:

G =FA علماً أنَّ A زمرة جزئية من GL(m,p)

وأما F فهي زمرة الانسحابات على V والمعرفة كما يلي:

$$F = \{x \mapsto x + b \,/\, x, b \in v\}.$$

3- إذا كانت G و G^1 زمرتين أوليتين فإنَّ العلاقة الآتية صحيحة:

$$G \approx G^1 \Rightarrow \ni \varphi \in GL(m,p) : \varphi A \varphi^{-1} = A^1$$

حيث أنَّ: $G^1 = FA^1, G = FA$ كما في (2).

3- دراسة العناصر المولدة للزمر العظمى العازلة القابلة للحل في $GL(q,\Delta)$

حيث q عدد أولي و $\Delta = GF(P)$

نرمز لـ H لأعظم زمرة عازلة قابلة للحل في $GL(q,\Delta)$

فتوجد حالتان:

1- إذا لم تكن H أصلية عندئذٍ تترافق H في $GL(q,\Delta)$ مع زمرة الأطباق الآتية([2]):

$H_1 = \Delta^* \int G$ حيث G تُعطى كما يلي:

$$G = \{x \to ax + b \,/\, a \in GF(q)^*, b \in GF(q)\}$$

إذن تُعطى الزمرة H_1 بالشكل الآتي:

$$H_1 = \{dia(h_1, \dots\dots, h_q) f^a g^\beta \,/\, h_1, \dots, h \in GF(P)^*\} \quad (I)$$

وحيث أنَّ:

$$f \in \{x \to x + b \,/\, b \in GF(q)\}$$

$$g \in \{x \to ax \,/\, a \in GF(q)^*\}$$

2- إذا كانت زمرة أصلية عندئذٍ يوجد احتمالان:

a) الزمرة الناظمية التبديلية العظمى الموجودة في H من الشكل:

$$F = GF(P^q)^*$$

وفي هذه الحالة تترافق H في $GL(q,\Delta)$ مع الزمرة الآتية [2]:

$$H_2 = \{x \to \lambda\, x^{P^u} \,/\, \lambda \in GF(P^q)^*, u = 0, \dots, q-1\} \quad (II)$$

إذن: $|H_2| = q(P^q - 1)$

b) الزمرة الناظمية التبديلية العظمى الموجودة في H من الشكل الآتي:

$F = \{PI_q \,/\, P \in \Delta^*\}$ حيث I_q مصفوفة الواحدة

عندئذٍ يوجد في H زمرة جزئية ناظمة D معرفة كما يلي [2]

$$D=(a)(b)F;a^q\in F,b^q\in F$$
$$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}=WI_q;W^q=$$
$$=1,W\#1,W\in GF(P)^*$$

نرمز بـ N(D) لمنظم D في $GL(q,\Delta)$ فمن أجل كل عنصر يكون لدينا:

$$xax^{-1}=\lambda\ a^{\alpha},b^{B},xbx^{-1}=\mu a^{\gamma}b^{s};\lambda;\mu\in\Delta^*$$

و $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in GF(q)$

وبملاحظة أنَّ التطبيق الآتي مرفيزم بين زمرتين:

$$\Psi:N(D)\to SL(2,q)$$
$$x\mapsto\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{pmatrix}$$

نستطيع تعيين العناصر المولدة للزمرة H المعرفة سابقاً:

1- من أجل q=2 يكون Ψ غامراً و

$$N(D)/D\approx SL(2,2)$$

إذن N(D)=H ومنه $|H|=6(P-1)$

ونستنتج من ذلك أنَّ كل زمرة جزئية عازلة رتبتها فردية في $GL(2,\Delta)$ تكون دورية.

2- من أجل q=3 تكون $H=\Psi^{-1}(SL(2,3))$ وباختيار العنصرين المولدين لـSL(2,3) كما يلي:

$\sigma=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ و $\tau=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ عندئذٍ تترافق H في SL(2,3) مع الزمرة الآتية:

$$H_3=\langle a,b,\Psi^{-1}(\alpha),\Psi^{-1}(\tau),\rho I_3\rangle\ \text{(III)}$$

حيث a,b,ρ هي العناصر الواردة في تعريف الزمرة D.

والآن ندخل الرموز الآتية:

$$R_1=\{r\in N:r=3\ell^3;\ell/P-1,\ell^3\times P^3-1\}$$
$$R_2=\{r\in N:r=3\ell;\ell/P^3-1,\ell\times P-1\}$$
$$R_3=\{r\in N:r=3^{v}\ell;\ell/P-1,v=1,2,3\}$$

مما تقدم يُمكننا تصنيف الزمر العازلة القابلة للحل في $GL(q,\Delta)$.

حيث: q=2 أو q=3.

نظرية (2):

إذا كانت A زمرة عازلة قابلة للحل في $GL(q,\Delta)$ حيث $q=2,3$ وإذا كان $|A|=r$ عدداً فردياً فإنَّ ما يلي صحيح:

1ــ من أجل q=2 تكون A زمرة دورية في H2 من الشكل:

$$A=\{x\to\lambda\ x/\lambda\in GF(P^2)^*\}$$

2ــ من أجل q=3 يكون لدينا ما يلي:

$$r\in R_i\Leftrightarrow A\le H_i;i=1,2,3$$

علماً أنَّ Hi هي الزمر المعرفة بـI, II, III وأما Ri فهي الأعداد المعرفة بالعلاقات (2).

لنفرض مثلاً الحالة i=1

نفرض أولاً أنَّ A زمرة عازلة قابلة للحل فهي محتواة في واحدة من الزمر H_1,H_2,H_3 على الأقل وبما أنَّ $r\ni R_1$ إذن r لا يُقسم أي من العددين $|H_1|$ و $|H_3|$ وبالتالي A لا تكون في أي من الزمرتين H_2 و H_3 ومنه $A\le H_2$

وبالعكس فمن أجل أي عدد فردي صحيح $r\ni R_i$ حيث i=1,2,3 توجد زمرة

وحيدة A عازلة قابلة للحل رتبتها تساوي r وأما وحدانيتها فهي من وجهة نظر الترافق.

فإذا فرضنا أنَّ $r \ni R$ على سبيل المثال فإنَّ $r = 3\ell^3$ حيث $\ell | P-1$ وينتج من ذلك وجود عنصر $\alpha \ni GF(P)^*$ بحيث أنَّ $|\alpha| = \ell$ عندئذٍ يمكننا اعتبار A هي زمرة الأطباق بين الزمرتين الدوريتين الآتيتين:

$$A = \langle d \rangle \int \langle b \rangle$$

حيث أنَّ $d = dia(1,1,\alpha)$ و

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن $A \leq H_1$

حيث أنَّ $|H_1| = q(q-1)(p-1)^q$

نتيجة: من أجل كل $r \ni R_i$ حيث i=1,2,3 توجد زمرة A عازلة قابلة للحل وحيدة من وجهة نظر الترافق بحيث أنَّ $|A| = r$ والعكس صحيح.

نظرية (3)

إذا كانت G زمرة أصلية من S_n رتبتها فردية فيوجد تمثيل بياني تام T بحيث أنَّ $G \leq Aut\ T$.

البرهان:

بما أنَّ G أولية، إذن $n = P^m$ حسب **النظرية (1)**

وبما أنَّ رتبة G فردية فهي قابلة للحل بحسب نظرية فيت ـ تومبسون وبالتالي تكون G من الشكل:

G=FA حيث F و A زمرتان جزئيتان معرفتان بالنظرية (1) لنفرض الآن $x \ni V = GF(P^m)$ عندئذٍ يكون المداران A(x) و A(-x) مختلفين لعدم وجود عناصر في G برتبة زوجية وهكذا يوجد 2t مدار لـA على V وانشكل المجموعة S من t مدار فقط بحيث إذا دخل في S المدار A(x) فلا يدخل المدار A(-x) وبالعكس. عندئذٍ المجموعة S تولد تمثيلاً تاماً T(s) وفقاً للقاعدة الآتية:

$$x, y \in \forall : (x,y) \in U \Leftrightarrow y - x \in s \quad (3)$$

علماً أنَّ T(S)=(V,U)

هذا وندعو S بالمجموعة المولدة لـT(S) أو اختصاراً موّلد T(S).

نلاحظ أنَّ A(S)=S لأنَّ S اجتماع من بعض مدارات A ومن السهل التحقق أنَّ زمرة الانسحابات F تحقق أيضاً الخاصة نفسها. أي أنَّ F(S)=S وهكذا جميع عناصر G تحقق العلاقة (1) وبالتالي $G \leq Aut\ T(S)$

تعريف:

نقول عن التمثيل التام T(S) أنه أصلي إذا كانت الزمرة Aut T(S) أصلية.

نفرض الآن $T(S_1)$ و $T(S_2)$ تمثيلان تامان أصليان عدد رؤوس كل منهما P^m ولنفرض φ ايزمرفيزم بينهما فنجد من النظرية (1) أنَّ:

$$\varphi\ Aut\ T(S_1)\varphi^{-1} = Aut\ T(S_2) \Rightarrow \varphi\ FA_1\varphi^{-1} = $$
$$= FA_2 \Rightarrow \varphi\ F\ \varphi^{-1} = F, \varphi A_1\ \varphi^{-1} = A_2$$

ينتج لدينا مباشرةً أنَّ $\varphi \in GL(q,\Delta)$ لأنَّ $GL(q,\Delta) = N(F)$ وكذلك $\varphi(S_1) = S_2$ لأنَّ $\varphi\ A_1\ \varphi^{-1} = A_2$.

إذن يكون $T(S_2) \approx T(S_1)$ عندما يكونان S_1 و S_2 في مدار واحد للزمرة $GL(q,\Delta)$ عند تأثيرها على مجموعة المولدات S المعرفة بالعلاقة (3).

لنرمز الآن بـ $A^{\bullet}$ لكل زمرة مترافقة مع الزمرة العازلة A في $GL(q,\Delta)$ ثمَّ لندخل الرموز الثلاثة الآتية:

$$K_A = \{S / \mathrm{Aut}\ T(S) = FA\}$$
$$K_A = \{S / \mathrm{Aut}\ T(S) = FA^{\bullet}\}$$
$$K = U_A K_A$$

حيث F زمرة الانسحابات $GF(P^q)$.

و A زمرة عازلة في $GL(q,\Delta)$ و $|A|$ عدد فردي.

وباستخدام المبرهنة الآتية [1]:

عدد مدارات $GL(q,\Delta)$ على $K_{A^{\bullet}}$ يساوي عدد مدارات N(A) على K_A وباستخدام نتيجة النظرية (2) نجد أنَّ $K_A = K_{A^{\bullet}}$.

إذن يكفي أن نحسب عدد مدارات N(A) على K_A وبملاحظة أنَّ $N(A) = H_i$ عندما تكون $A \leq H_i$.

حيث: H_i ــ هي الزمر المعرفة بالعلاقات (III و II و I)

إذن لنحسب عدد مدارات كل من H_i على K_A حيث $H_i \geq A$ وباستخدام العلاقة الآتية:

$$|H| = |H_S|.|H(S)|; H_S = \{h \in H / h(S) = S\}$$

نجد أنَّ:

$$|H_1(S)| = \frac{q(q-1)(P-1)^q}{r}; |H_S| = |A| = r$$

$$|H_2(S)| = \frac{q(P^q-1)}{r}; |(H_2)_S| = |A| = r$$

$$|H_3(S)| = \begin{cases} \dfrac{24(P-1)}{r}; q = 2 \\ \dfrac{24.9(P-1)}{r}; q = 3 \end{cases} ; |(H_3)_S| = r$$

نفرض أن $\overline{K}_A = \{S / \mathrm{Aut}\ T(S) \geq FA\}$ فنجد أنَّ:

$$f(r) = |\overline{K}_A| = \frac{P^{q-1}}{2r}; |A| = r$$

وأخيراً يكون عدد مدارات H_i على K_A حيث i=1,2,3 هو:

$$n_i = \frac{|K_A|}{|H_i(S)|}$$

ومن جهة أخرى إذا كانت A محتواة في H_i حيث i=1,2,3

فإنَّ $|K_A| = \sum_{\{\lambda / \lambda r \in R_i\}} \mu(\lambda) 2^{\frac{p^q-1}{r}}$ بحسب [3].

علماً أنَّ R_i هي الرموز المعرفة بالعلاقات (2) وأما $\mu(\lambda)$ فهو تابع ميبوس الآتي:

عندما تكون λ جداء t من الأعداد المختلفة

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} 1 & ; \quad \lambda\text{-}1 \\ (-1)^t & ; \\ 0 & ; \end{cases}$$

من أجل أي λ آخر.

Abstract.

Atournament T (directed graph which there is exacly one are between any tow vertices) is said to be point - primitive if its automophism group Aut acts primitively on the vertices T.

Automophism groubs of point - primitive tournaments are primitive permutation groups of odd order, which are known to be affine groups, and so point - primitive tournaments are of prime - power order. Some properties of permutation groups of odd order are proved and a counting formula for point - primitive tournaments of order pq (p prime number, and q = 2, q = 3). is derived from them.

المراجع

1) - ASTLE. A: Groups de permutation primitife d'order impaire et denomberment tournois. Dixrete Math, 14, No 1 - 5 , 1976.

2) - Supronenko.D.A: Groups matrix, Moscow 1972.

3) - Iskandar Ali: Groups of tournois with order impair. Akad - since. Belorasia No1 Minsk 1980.