مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد /16/ العدد /3/ 1414 هـ 1994م.

ـ طريقة لتحديد التحكم الأمثل لنفقات الوقود ـ في الجمل الخطية المنقطعة

د. محمود شاهين عثمان*

□ ملخص □

في هذه المقالة تمكن المؤلف من تحويل مسألة نفقات الوقود في الجمل الخطية المنقطعة [2] إلى المسألة المكافئة التالية:

$$Z(u)=\sum_{k=1}^{mT} C_k\left(u'_k+u''_k\right)\rightarrow \min$$

$$Ru'_k-Ru''_k=\eta$$

$$0\le u'_k\le 1 \quad ,0\le u''_k\le 1$$

وتمّ حل هذه المسألة بالاعتماد على خوارزمية سيمبلكس .بمتحولات محدودة من، الطرفين وبتطبيق هذه الطريقة على المثال الموجود في [4] حصل المؤلف على نتيجة أفضل بالنسبة لتكلفة الوقود.

* الدكتور محمود شاهين أستاذ مساعد في قسم الرياضيات بكلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

2ـ مقدمة:

إنَّ مسألة نفقات الوقود في الجمل الخطية المنقطعة، هي من المسائل الهامة في الأوساط الصناعية حيث يمكن تطبيقها في مجالات متعددة، نذكر منها:

تقليل التكلفة للتدفئة المركزية ـ إيجاد الحد الأدنى لتكلفة الطاقة الكهربائية ـ تقليل تكلفة الوقود للمراكب الفضائية للإلتقاء بمحطة الأقمار الصناعية، ....

3ـ نص المسألة:

لتكن لدينا جملة التحكم الديناميكية الخطية معطاة بالعلاقات التالية:

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t) \qquad ;t=0,1,2,\ldots\ldots.T-1 \qquad (1)$$

$$x(T)=x_T \qquad x(0)=x_0 \qquad (2)$$

حيث:

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots\ldots\ldots\ldots x_n(t)\right)\in R^n$$

تمثل أشعة وضع الجملة.

وأما الأشعة

$$u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),\ldots\ldots\ldots,u_m(t)\right)\in R^m$$

فهي تمثل أشعة التحكم (معدل تدفق المحروقات)

X_0 نقطة البداية و X_T نقطة النهاية

A و B هما مصفوفتان من النموذج n X n و n x m على التوالي

المطلوب إيجاد الأشعة:

$$\left(u_1(t),u_2(t),\ldots\ldots\ldots\ldots,u_m(t)\right) \qquad ;t=0,1,2,3,\ldots\ldots.\mathrm{T}-1$$

والمسارات الموافقة لها:

$$\left(x_1(t),x_2(t),\ldots\ldots\ldots\ldots,x_n(t)\right) \qquad ;t=0,1,2,\ldots\ldots.\mathrm{T}-1$$

مع تحقق الشرطين (1) و (2) وخضوع أشعة التحكم للشرط التالي

$$|u(t)|\langle\alpha \Rightarrow |u_i(t)|\langle\alpha \qquad ; \qquad \alpha\in R \qquad (3)$$

وبحيث يأخذ الدالي g

$$g(u)=\sum_{t=0}^{T-1}\left(C(t),|u(t)|\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{T-1} \quad C_i(t)|u_i(t)|\rightarrow \min$$

أصغر قيمة ممكنة:

علماً أنَّ:

$$C(t)=\left(c_1(t),c_2(t),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_m(t)\right)\in R+^m$$

أشعة مركباتها غير سالبة، وتمثل ثوابت التكلفة:

4ـ إيجاد صيغة مكافئة:

لنفرض

$$\overline{u}=\left(u_1(0),u_2(0),\ldots\ldots u_m(0),u_1(1),u_2(1),\ldots u_m(1),\ldots\ldots u_1(\mathrm{T}-1),\ldots u_m(\mathrm{T}-1)\right)$$

شعاع يحوي mT مركبة، وبالتالي فإنَّ الشرطين (1) و (2) يُمكن صياغتهما كما يلي:

$$x(1)=Ax_0+Bu(0)$$

$$x(2)=Ax(1)+Bu(1)=A\left[Ax_0+Bu(0)\right]+Bu(1)=A^2x+ABu(0)+Bu(1)$$

$$x(3)=A^3x_0+A^2Bu(0)+ABu(1)+Bu(2)$$

$$x(\mathrm{T})=x_{\mathrm{T}}=A^Tx_0+A^T-1Bu(0)+A^{T-2}Bu(1)+\ldots\ldots+Bu(\mathrm{T}-1)$$

وبالتالي،

$$x_{\mathrm{T}}-A^Tx_0=\left[A^{T-1}B+A^{T-2}B\right]u(t)$$

وهذا يؤدي إلى،

$$\sum_{t=0}^{T-1}A^{\text{ل}T-1}-tBu(t)=x_T-A^Tx_0$$

وبفرض: $\eta \quad =x_{\mathrm{T}}-A^Tx_0$ و $R=\left[A^{T-1}1B\middle|A^{T-2}B\middle|\ldots\ldots\middle|AB\middle|B\right]$ يمكننا صياغة المسألة السابقة بالشكل التالي:

$$z(\overline{u})= \qquad \langle C,|\overline{u}|\rangle=\sum_{k=1}^{mT}C_k|\overline{u}_k|\rightarrow\min \tag{4}$$

$$R\overline{u}=\eta \tag{5}$$

$$|\overline{u}_k|\langle\alpha \qquad ;k=1,2,\ldots\ldots mT \tag{6}$$

وبالتالي يجب إيجاد الشعاع u الذي يحقق (5) و (6)، ويُعطي أقل قيمة ممكنة للدالي z، نسمي هذه المسألة مسألة A.

إنَّ جملة المعادلات الخطية (5) تكون قابلة للحل، ويكون لها حل وحيد إذا تحققت العلاقة التالية:

$$rank\left[R|\eta\right]=rank\left[R\right]$$

أما إذا كان

$$rank[R|\eta]\rangle rank[R]$$

فـإنَّ جملـة المعـادلات (5) تكـون غـير قابلـة للحل.

من الآن وصاعداً نفرض أنَّ الجملـة (5) قابلـة للحل دوماً.

في سبيل إزالـة الشـرط الموجـود على شـعاع التوجيه نوجد، الصيغة التالية:

5ـ إيجاد صيغة ثانية:

لندخـل الشـعاعين $u'_k(t)\rangle 0$ و $u''_k(t)\rangle 0$ بحيث يكون:

$$\bar{u}_k(t) = u'_k(t) - u''_k(t) \qquad (7)$$

$$|\bar{u}_k(t)| = \bar{u}_k(t) + u''_k(t) \qquad (8)$$

نلاحظ انَّ العلاقة (8) تكـون صحيحة إذا كـان أي مـن u'_k أو u''_k مسـاوياً للصفـر (انظـر المرجـع [1] صفحـة 94)، وبالتـالي فـإنَّ المسـألة A يُمكـن صياغتها بالشكل التالي:

$$g = \sum_{k=1}^{mT} C_k(u'_k + u''_k) \rightarrow \min$$

$$Ru'_k - Ru''_k = h \qquad (9)$$

$$u'_k - u''_k\langle 1 \qquad (10)$$

$$u'_k - u''_k\langle 1 \qquad (11)$$

$$u'_k \geq 0, u''_k \geq 0 \qquad (12)$$

حيث: $k = 1,2,.......,mT \qquad \alpha = 1$

لنسمي هذه المسألة مسألة B.

إنَّ المسألة B من مسائل البرمجة الخطيـة تحـوي n+2 معادلة، ويُمكننـا حلهـا بالإعتمـاد على خوارزمية سيمبلكس.

لنعرض الآن المسألة C، والتي تحوي n معادلة، ثمَّ نُبرهن أنها مكافئة للمسألة B

$$g = \sum_{k=1}^{mT} C_k(u'_k + u''_k) \rightarrow \min$$

$$Ru'_k - Ru''_k = \qquad (13)$$

$$0 \leq u'_k \leq 1, \quad 0 \leq u''_k \leq 1 \qquad (14)$$

تعريف:

تكون المسالة B مُكافئة للمسألة C، إذا كان الحـل الأمثـل للمسـألة B، هـو حـلاً أمثـلاً للمسألة C

نتيجة: المسألة B مكافئة للمسألة C

البرهان:

لنفرض أنَّ u'_k و u''_k يشكلان حلاً أمثلاً للمسألة B، فهـو يحقـق الشـروط (9-12) لذلـك إذا كـان u'_k و u''_k حـلاً أمثـلاً للمسـألة C يكفـي أن نُـبرهن أنَّ الحـل u'_k و u''_k يحقق الشرط (14):

لنفـرض أنَّ الشـرط (14) غـير محقـق أي $u'_k\rangle 1$، وهذا يؤدي إلى التناقض في الشرطين (10-11) وكذلك إذا كان $u''_k\rangle 1$ فإنه يـؤدي إلى التناقض في الشـرطين (10-11)، إذن فـإنَّ u'_k و u''_k يشكلان حـلاً أمثـلاً للمسـألة C.

6ـ مثال:

لنأخذ المثال الموجود في [4]

$$g=\sum_{k=1}^{mT}\left|u(t)\right|\to \min$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(t)$$

حيث $u(t)\langle 1$

$$x_T=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix},\qquad x_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

لدينا في هذا المثال:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

وبالتالي يُمكن صياغة هذا المثال بشكل مشابه للمسألة C

$$g=\sum_{k=1}^{mT}\left(u_k'+u_k''\right)\to \min$$

$$Ru_k'-Ru_k''=n$$

$$0\le u_k'\le 1,\qquad 0\le u_k''\le 1$$

من أجل T=11 يكون لدينا:

$$R=\begin{pmatrix}10&9&8&7&6&5&4&3&2&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\eta-\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

وبالتالي تُصاغ هذه المسألة بالشكل التالي:

$$g=u_1'+u_2'+u_3'+u_4'+u_5'+u_6'+u_7'+u_8'+u_9'+u_{10}'+u_{11}'+$$
$$+u_1''+u_2''+u_3''+u_4''+u_5''+u_6''+u_7''+u_8''+u_9''+u_{10}''+u_{11}''\to \min$$
$$10u_1'+9u_2'+8u_3'+7u_4'+6u_5'+5u_6'+4u_7'+3u_8'+2u_9'+u_{10}'-$$
$$-10u_1''-9u_2''-8u_3''-7u_4''-6u_5''-5u_6''-4u_7''-3u_8''-2u_9''-u_{10}''=4$$
$$u_1'+u_2'+u_3'+u_4'+u_5'+u_6'+u_7'+u_8'+u_9'+u_{10}'+u_{11}'-$$
$$-u_1''-u_2''-u_3''-u_4''-u_5''-u_6''-u_7''-u_8''-u_9''-u_{10}''-u_{11}''=4$$
$$0\le u_k'\le 1,\qquad 0\le u_k''\le 1\ k=1,2,3,\dots\dots..11$$

وبتطبيق خوارزمية سيمبلكس بمتحولات محدودة من الطرفين.

انظر المرجع [3] نحصل على الجدول التالي:

$$u'_1\ u'_2\ u'_3\ u'_4\ u'_5\ u'_6\ u'_7\ u'_8\ u'_9\ u'_{10}\ u'_{11}\ \ u''_1\ u''_2\ u''_3\ u''_4\ u''_5\ u''_6\ u''_7\ u''_8\ u''_9\ u''_{10}\ u''_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ b$$

	u'_1	u'_2	u'_3	u'_4	u'_5	u'_6	u'_7	u'_8	u'_9	u'_{10}	u'_{11}	u''_1	u''_2	u''_3	u''_4	u''_5	u''_6	u''_7	u''_8	u''_9	u''_{10}	u''_{11}	u_{12}	u_{13}	b
u_{12}	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	0	4
u_{13}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	4
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	-8

نُلاحظ أنَّ أكبر كمية سالبة موجودة في العمود الأول من السطر الأخير لذلك نحسب كلاً من:

a = 1

b = min {4/10, 4/1} = 4/10

لذلك يدخل المتغير U1 في قاعدة الحل ويخرج المتغير الإصطناعي U12 من المسألة، وهكذا نحصل على الجدول التالي:

$$u'_1\ u'_2\ u'_3\ u'_4\ u'_5\ u'_6\ u'_7\ u'_8\ u'_9\ u'_{10}\ u'_{11}\ \ u''_1\ u''_2\ u''_3\ u''_4\ u''_5\ u''_6\ u''_7\ u''_8\ u''_9\ u''_{10}\ u''_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ b$$

	u'_1	u'_2	u'_3	u'_4	u'_5	u'_6	u'_7	u'_8	u'_9	u'_{10}	u'_{11}	u''_1	u''_2	u''_3	u''_4	u''_5	u''_6	u''_7	u''_8	u''_9	u''_{10}	u''_{11}	u_{13}	b
u'_1	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0. 4	0.3	0.2	0.1	0	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0	0.4
u_{13}	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	1	3.6
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1	0	-0.4
	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	0	-3.6

وهكذا نستمر في الحل حتى نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

$$u'_1\ u'_2\ u'_3\ u'_4\ u'_5\ u'_6\ u'_7\ u'_8\ u'_9\ u'_{10}\ u'_{11}\ \ u''_1\ u''_2\ u''_3\ u''_4\ u''_5\ u''_6\ u''_7\ u''_8\ u''_9\ u''_{10}\ u''_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ b$$

u''_1	- 0.83	-0.66	-0.5	-0.33	-0.16	0	-0.16	-0.33	-0.5	-0.66	1	0.83	0.66	0.5	0.33	0.16	0	-0.16	-0.33	-0.5	0.66	0.33	
u'_7	0	0.16	0.33	0.5	0.66	0.83	1	-1.16	-1.33	-1.5	-1.66	0	-0.16	-0.33	-0.5	-0.66	-0.83	-1	-1.16	-1.33	- 1.5	1.66	0.33
	2	1.66	1.33	1	0.66	0.33	0	0.33	0.66	1	1.33	0	0.33	0.66	1	1.33	1.66	2	2.33	2.66	3	3.33	-4.6

وبالتالي نحصل على الحل الأمثل

$$u'_1=0,u'_2=0,u'_3=0,u'_4=0,u'_5=0,u'_5=0,u'_6=0,u'_7=0.33,u'_8=1,u'_9=1$$
$$u'_{10}=1,u'_{11}=1,u''_1=-0.33,u''_2=0,u''_4=0,u''_5=0,u''_6=0,u''_7=0$$
$$u''_8=0,u''_9=0,u''_{10}=0,u''_{11}=0$$

وبالتالي يكون لدينا شعاع التحكم:

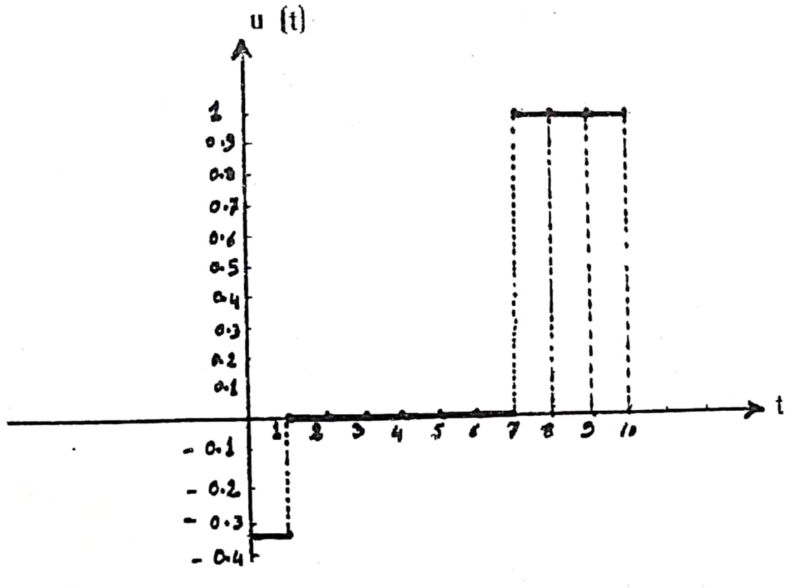
$$u_1=-0.33,u_2=0,u_3=0,u_4=0,u_5=0,u_6=0,u_7=0.33,u_8=1,u_9=1$$
$$u_{10}=1,u_{11}=1$$

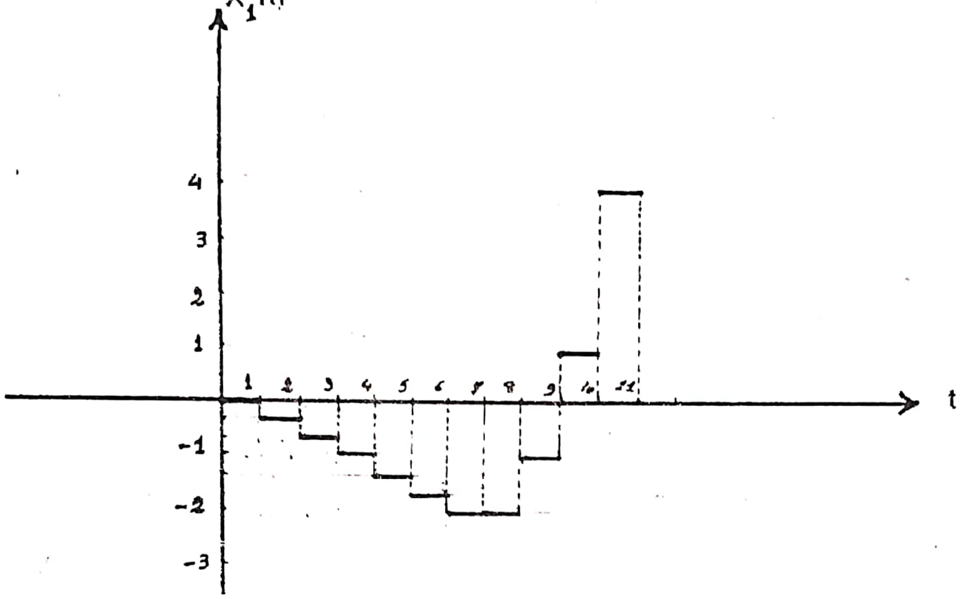
أي أنه $u(t)=(-0.33,0,0,0,0,0,0.33,1,1,1,1)$

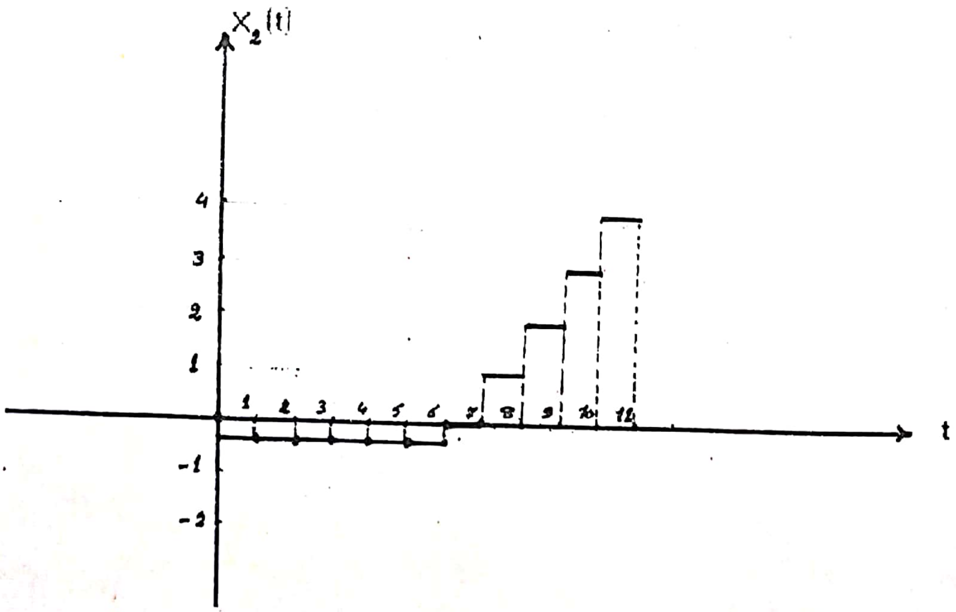
وبالتعويض في العلاقة (2) نحصل على أشعة المسارات الموافقة لشعاع التوجيه:

$$x_1(t)=(0,0,-0.33,-0.66,-1,-1.33,-1.66,-2,-2,-1,1,4)$$
$$x_2(t)=(0,-0.33-0.33,-0.33,-0.33,-0.33,-0.33,0,1,2,3,4)$$

7ـ التمثيل البياني لشعاع التحكم والمسارات الموافقة له:




$X_1(t)$
4
3
2
1
-1
-2
-3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
t


$X_2(t)$
4
3
2
1
-1
-2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
t

8ـ خاتمة:

1 تمّ تحويل المسألة الأصلية إلى مسألة A.

2 تمّ تحويل المسألة A إلى مسألة B حيث يُمكننا حل المسألة B بالاعتماد على خوارزمية سيمبلكس.

3 تمّ تحويل المسألة B إلى مسألة C حيث أصبح عدد المعادلات n معادلة.

4 تمّ حل مثال تطبيقي مع تمثيل بياني لكل من شعاع التحكم والمسارات الموافقة له.

Abstract

Abstract. in this article, the author could change the minimum fuel problem for discrete linear systems. to the fallowing equivalent problem.

$$g = \sum_{k=1}^{mT} C_k \left(u'_k + u''_k\right) \rightarrow \min$$

$$Ru'_k - Ru''_k =$$

$$0 \leq u'_k \leq 1, \quad 0 \leq u''_k \leq 1$$

After that it has been solved by simplex method with variables with upper bounds. And the auther solved this example which is founds in [4]. He has obtained a roselt which is better than[4] according to cost of fuel.

المراجع

1- Canon,M. D.,Cullum,C.D.,Jr,and polak,E.1970 Theory of optimal Control and Mathematical programming (New York:MeGraw-Hill)

2- Nabih N. Abdelmalek soulition of minimum time problem and minimum fuel problem for discrete linear admissible control systems

Int .J. system sci., 1978 vol.9 No.8,849-855

3- David G.Luenberger 1973 Introduction to linear and Nonlinear progra.mming

4- Atsuo Futjimoto and Yoshikazu Uno Time optimal control of linear discrete systems with multipe control constraints (iNT.J.control, 1976 vol 24, No.2,229 - 238) .