# Consistency of k-nearest Neighbor Regression Estimator under mixing condition with tie-breaking by randomization

**Dr.Mohamed M. Deribati***
**Dr. Wafaa M. kanaan****
**Dema A. Al-shakh *****

**(Received 5 / 1 / 2022. Accepted 3 / 4 /2022)**

## □ ABSTRACT □

In most researches that have studied the consistency of nonparametric k-nearest neighbors estimator have been depended on tie breaking by indices strategy. We hope in this paper to study the regression function estimation by using nonparametric k-nearest neighbors estimation under strong mixing concept. Where the consistency results of k-nearest neighbor regression estimator in $L_1$ have been expanded as independent case to the dependent case with using tie breaking by randomization instead of indices strategy.

**Key words**: Nonparametric regression, mixing concepts, strong mixing, k-nearest neighbor estimator, tie-breaking by randomization, convergence in $L_p$, convergence in $L_1$ .

* **Assistant Prof., Depart. Of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.** DRDribatem@gmail.com
** **Prof., Depart. Of Mathematical Statistics, Faculty of Science Tishreen University, Lattakia, Syria.**
**jawaaaa@hotmail.com**
*** **Postgraduate student, Depart. Of Mathematical Statistics, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
dema.srmad@gmail.com

# اتساق مقدّر انحدار الجوارات الـ k- الأكثر قرباً
# تحت شرط الارتباط مع إزالة الربطات بالعشوائية

د. محمد مزيد دريباتي*
د. وفاء محمد كنعان**
ديمه احمد الشاخ***

(تاريخ الإيداع 5 / 1 / 2022. قُبِل للنشر في 3 / 4 /2022)

## □ ملخّص □

في معظم الأبحاث التي تمّ فيها دراسة اتساق مقدّر الجوارات الأكثر قرباً لدالة الانحدار تم الاعتماد فيها على استراتيجية إزالة الربطات بالأدلة. نرغب في هذا البحث بدراسة مسألة تقدّير دالّة الانحدار باستخدام مقدّر الجوارات الـ k الأكثر قرباً اللاوسيطي تحت شرط الارتباط القوي. حيث تم توسيع نتائج اتساق مقدّر الجوارات لدالّة الانحدار في $L_1$ من الحالة المستقلّة إلى الحالة المرتبطة وباستخدام استراتيجية إزالة الربطات بالعشوائية بدلا من استراتيجية الأدلة.

**الكلمات المفتاحيّة:** *الانحدار اللّاوسيّطي، معاملات المزج، المزج القوّي، مقدّر الجوارات الـ $k$ الأكثر قربًا، إزالة الربطات بالعشوائية، التقارب في $L_p$، التّقارب في $L_1$.*

*أستاذ مساعد – قسم الإحصاء الرياضي–كلية العلوم– جامعة تشرين–اللاذقية–سورية. DRDribatem@gmail.com
** دكتورة – قسم الإحصاء الرياضي– كلية العلوم–جامعة تشرين – اللاذقية– سورية. jawaaaa@hotmail.com
***طالبة دكتوراه –قسم الإحصاء الرياضي– كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية. dema.srmad@gmail.com

## مقدّمة

يعتبر تحليل الانحدار أحد أهم الأدوات التّي تبين طبيعة العلاقة بين المتغيرات في الإحصاء، حيث يلعب دورا هاماً في الكثير من الظواهر الاقتصادية والطبية والاجتماعية وغيرها.

يقسم تحليل الانحدار الى نوعين: الانحدار الوسيطيّ (parametric regression) و الانحدار غير الوسيطيّ (nonparametric regression).

يتطلب الانحدار الوسيطي عدّة افتراضات قوية حيث يفترض أنّ البيانات مستقلة، كما يفترض أنّ شكل نموذج الانحدار معلوم مسبقاً ولكن الشكل الصحيح لنموذج الانحدار ليس دائما معلوم في التطبيقات الحقيقة. لذا لا يعد الانحدار الوسيطي خيارا جيداً في معظم الحالات لتقدير دالة الانحدار ويتم اللجوء إلى طرائق الانحدار اللاوسيطيّة والتي يتم فيها تقدّير دالّة الانحدار ككل أي أنّها لا تعتمد على افتراضات قوّية فيما يتعلق بشكل العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة وبدلاً من ذلك فإنّه يسمح للبيانات بالتحّدث عن نفسها في تحديد شكل دالّة الانحدار المقدّرة.

دُرس الاتساق لطريقة الجوارات الـ $k$ الأكثر قرباً في تحليل الانحدار والتصنيف من قبل باحثين كُثر. تمّ اقتراح الفكرة الاساسية لهذه الطريقة من قبل (Fix;Hodges,1951)، ثمّ عممت من قبل (Royall,1966) تحت فرضية الاستقلال (i.i.d). وهناك العديد من الدراسات حول خصائص طريقة الجوارات الـ k– الأكثر قرباً حيث قام **Royall** بدراسة بعض هذه الخصائص مثل متوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي والتقارب الطبيعي للمقدّر مع دالّة وزن منتظمة. فيما بعد قام (Mack,1981) بتوسيع هذه النتائج لتشمل الحالة التي تكون فيها الأوزان غير منتظمة، حيث درس التحيز والتقارب الطبيعي، أيضاً تحت شرط الاستقلال.

دُرس اتساق مقدّر الجوارات من قبل العديد من الباحثين مستخدمين استراتيجية إزالة الربطات بالأدّلة، حيث اثبت (Stone,1977) التقارب في $L_p$ من أجل أنواع مختلفة لمقدرات الجوارات الـk– الأكثر قرباً. تمت دراسة التقارب شبه الاكيد للمقدّر في الحالة التي تكون فيها $Y$ محدودة من قبل(Devroye,1981)، درس أيضاً (Devroye,1982) التقارب القوي والتقارب المنتظم لنفس المقدّر. أنواع أخرى للتقارب تم دراستها من قبل (Collomb,1980) كالتقارب بالاحتمال والتقارب شبه الاكيد والتقارب شبه التام.(Azhary; Younso; Kanaya,2021) بدراسة اتساق مقدر الجوارات تحت شرط المزج لدالة قرار بايز.

ايضاً تمّ دراسة معدل التقارب المنتظم القوّي لمقدّر الجوّارات الأكثر قرباً لدالّة الانحدار من قبل (Silverman,1982) و(View ;Kudraszow,2013). وقام (Biau,2010) بدراسة بعض أشكال التقارب تحت ($L_p\ risk$)، (Deveroy; Gyorfi,1985) قاما بدراسة التقارب شبه الأكيد للمقدّر تحت استراتيجية إزالة ربطات المسافة بالأدلة.

فيما بعد (Deveroy; Gyorfi; Krzyzak;Lugosi,1994) قاموا بدراسة التقارب القوي لمقدّر الجوارات الـk– الأكثر قرباً (under L1 risk) ايضاً تحت فرضية الاستقلال ولكن باستخدام استراتيجية إزالة الربطات بالعشوائية حيث كان الاختلاف في مبرهنة التغطية(covering lemma). إنّ رغبتنا في هذه الورقة بتوسيع بعض النتائج التي توصل إليها Deveroy من الحالة المستقلة (Deveroy et al.,1994) إلى الحالة المرتبطة بمفهوم المزج القوي ($\alpha - mixing\ processes$) واستخدام استراتيجية ازالة الربطات عشوائياً (tie-breaking by randomization).

قبل البدء لا بد من التعرف على بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات التي تمثل عادة أيّة ظاهرة عشوائية تتأثر قيمها بالزمن بطورية عشوائية. ركزنا على الطّوريّات بمتغيرين $(X_t, Y_t)$ .

نعتبر أنّ $(X_i, Y_i)$ كثنائية قيم مماثلة التوزيع لشعاع عشوائي $(X, Y)$ حيث $(X_i, Y_i)$ نسخة الشعاع في اللحظة $i$ .
نسمي $Y$ المتغير التابع(dependent variable) و $X$ المتغير المستقل (independent variable) حيث أنّ $(X, Y)$ معرّف على الفضاء الاحتماليّ $(\Omega, F, p)$ ويأخذه قيمه في $R^d \times R$.
يُعرف نموذج الانحدار لـ $Y$ على $X$ بالشكل:

$$Y = m(X) + \varepsilon \qquad (1)$$

حيث $\varepsilon$ يمثّل الخطأ العشوائي (random error) وهو مستقل عن $X$ فرضاً و $m(X)$ دالّة الانحدار( regression function) وتعُطى بالعلاقة:

$$m(x) = E(Y|X = x) \qquad (2)$$

أي القيمة المتوّقعة لـ $Y$ عندما يأخذ $X$ القيمة $x$.
نرغب في تقدّير دالّة الانحدار $m(x)$ وإجراء التّنبؤات باستخدام النّموذج المقدّر.

## أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من إمكانية تطبيقه عندما لا يتحقق شرط استقلال البيانات وعند وجود ربطات المسافة.
يهدف هذا البحث إلى تعميم تقارب مقدّر الجوّارات الـ k الأكثر قرباً لدالّة الانحدار من الدالّة الحقيقية في الحالة المستقلة إلى الحالة المرتبطة في حال حدوث ربطات المسافة.

## طرائق البحث ومواده

طرحنا في هذه الورقة مقدّر الجوارات لدالّة الانحدار لبيانات مزوجة بقوة. وقمنا بعرض بعض الطرق المستخدّمة في إزالة ربطات المسافة ومن ثم درسنا اتساق المقدّر في $L_1$ والذي بدوره يضمن الاتساق في $L_p$.

### طريقة الجوّارات الـ k–الأكثر قرباً:

لتكن $\mathcal{D}_n = \{(X_1, Y_1), .., (X_n, Y_n)\}$ عينة حجمها $n$ من المشاهدات للشعاع العشوائي $(X, Y)$. يعطى المقدّر التقليدي لدالّة الانحدار $m(x)$ عندما $X = x$ المعطاة بالعلاقة (2) باستخدام العينة $\mathcal{D}_n$ بالشكل التالي:

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) Y_i \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \qquad (3)$$

حيث $W_{ni}(x)$ تابع احتمال يسمى تابع وزن مترافق مع الجوارات، و يعطى في الحالة العامة بالشكل:

$$w(x - X_i) = \frac{K(\frac{x - X_i}{R_n})}{\sum_{j=1}^{n} K(\frac{x - X_j}{R_n})} \qquad (4)$$

حيث $R_n$ يشير إلى المسافة بين $x$ والمجاورة الـ $k$ الأقرب. حيث $K: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ تابع كثافة احتمالية محدود.
وقد يعطى تابع الوزن بالشكل:

$$W_{ni}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \|x - X_i\| \le R_n \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad (5)$$

ويسمى الوزن المنتظم لأنه يعطي نفس الوزن لجميع المجاورات الـ k– الأقرب. حيث $\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) = 1$

سنركز في هذه الدراسة على الوزن المعطى بالعلاقة (5).

حيث تصبح $m_n(x)$ معرفة كالتالي:

$$m_n(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_{(i)}$$

حيث $\left(X_{(1)}, Y_{(1)}\right), .., \left(X_{(n)}, Y_{(n)}\right)$ هي القيم المرتّبة بحسب تزايد القيم $\|x - X_{(i)}\|$ أي أنّ:

$$\|x - X_{(1)}\| \le \cdots \le \|x - X_{(n)}\|$$

إذا كان $X_i$ و $X_j$ متساويا البعد عن $x$ أي أنّ:

$$\|x - X_i\| = \|x - X_j\|$$

يكون لدينا ربطة، إذا لم يكن لـ μ تابع كثافة فإنّه يمكن أن تحدث ربطات المسافة باحتمال غير صفري، لذا علينا التعامل مع مسألة إزالة الربطات. حيث μ هي القياس الاحتمالي لـ $X$.

سنقدّم بعض الطرق لإزالتها:

### إزالة الربطات بالأدلة (Tie breaking by indices):

إذا كان $X_i$ , $X_j$ متساويا البعد عن $x$، فإنّ $X_i$ أقرب إلى $x$ من $X_j$ إذا كان $i < j$. إنّ لهذه الطريقة بعض الخصائص غير المرغوب بها.

### إزالة الربطات بطريقة ستون (Stone’s tie breaking):

عرّف (Stone,1997) قاعدة الجوارات الأكثر قرباً والتي ليست هي قاعدة الجوارات بالمعنى الدقيق، من أجل مقدّره استخدم أكثر من $k$ جوّار. إذا عرّفنا المسافة بين الجوار الـ $k$ الأكثر قرباً لـ $x$ بـ $R_n(x)$ فإنّ مقدّر ستون يعطى بالشكل التالي:

$$\widehat{m}_n(x) = \frac{1}{k}\left(\sum_{i:\|x-X_i\|<R_n(x)} Y_i + \frac{k - \#\|x - X_i\| < R_n(x)}{\#\|x - X_i\| < R_n(x)} \sum_{i:\|x-X_i\|=R_n(x)} Y_i\right)$$

حيث أنّ الرمز # يدل على عدد القيم $i$ التي تحقق $\|x - X_i\| < R_n(x)$.

### إزالة الربطات بالعشوائية (Tie breaking by randomization) :

تعد هذه الطريقة من اكثر الطرائق الطبيعية لإزالة الربطات العشوائية. نفترض أنّ $(X, U)$ شعاع عشوائي مستقل عن البيانات حيث $U$ مستقلة عن $X$ وتتبع للتوزيع المنتظم على المجال [0,1]. نقوم بتوسيع البيانات بتوليد $(U_1, \dots, U_n)$ حيث: $(U_i\ ; i = 1, .., n)$ مستقلة ومتماثلة التوزيع أي تخضع للتوزيع المنتظم على المجال [0,1]، وبالتالي كل $(X_i, U_i)$ لها نفس توزيع $(X, U)$.

لتكن

$$\left(X_{(1)}(x,u), Y_{(1)}(x,u)\right), \dots, \left(X_{(n)}(x,u), Y_{(n)}(x,u)\right)$$

البيانات المرتبة بحسب القيم المتزايدة لـ $\|x - X_i\|$. في حالة ربطات المسافة، نوضح أن $(X_i, U_i)$ أقرب إلى $(x, u)$ من $\left(X_j, U_j\right)$ تتحقق بـ $|U_i - u| < |U_j - u|$.

في هذه الحالة يتم الترميز بـ $m_n(x,u) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_{(i)}$ لمقدّر الجوارات لدالة الانحدار.

قمنا في هذه الورقة بدراسة تقارب المقدار

$$J_n = \int |m_n(x,u) - m(x)| v\big(d(x,u)\big) \qquad (6)$$

في $L_1$ تحت شرط المزج $(\alpha - mixing)$ والذي سنعرفه لاحقاً وذلك باستخدام استراتيجية إزالة الربطات بالعشوائية، حيث $v$ هو القياس الاحتمالي (غير المعلوم) لـ $(X, U)$.

(Devroye;Gyorfi,1985) درسو اتساق مقدّر الجوارات لبيانات مستقلة ولكن تم افتراض وجود دالة كثافة لـ μ، لذلك لم يكونو قلقين حيال حدوث ربطات المسافة.

(Devroye et al.,1994) قامو بدراسة الاتساق القوي لنفس المقدّر ولكن دون افتراض وجود دالة كثافة حيث تم اعتماد طريقة العشوائية لازالة البيانات. من أجل ذلك قامو بتعميم مبرهنة (10.1) في (Devroye;Gyorfi,1985) لاثبات الاتساق لتشمل حالة عدم وجود دالة كثافة.

فيما يلي سنتعرف على نوع من انواع الارتباط بمفهوم المزج.

## 3.شرط المزج القوي (Strong Mixing Conditions):

قبل التطرق لمفهوم المزج لابدّ من التعريف بمفهوم **استقلال المتغيرات العشوائية:**

نقول عن المتتالية من المتغيرات العشوائية $(Z_1, Z_2, .., Z_n)$ والمعرفة على الفضاء الاحتمالي $(\Omega, \mathrm{F}, p)$ انها مستقلة إذا كانت الجبور التامة $\sigma(Z_i)$ مستقلة، حيث $\sigma(Z_i)$ هو الجبر التام المولد بـ $Z_i$ $(\forall\, i = 1,2, .., n)$.

**مفهوم المزج:** في الاستدلال التقاربي لمتغيرات عشوائية مرتبطة، من الضروري معرفة مدى قوة الارتباط بين الجبور.

إنّ أول مفاهيم الارتباط التي قدّمت هي معامل المزج α (Rosenblat,1956) ومعامل المزج β (Razanov;Volkonskii,1959). استخدمو هذه المفاهيم قانون الاعداد الكبيرة ونظرية النهاية المركزية للطوريات العشوائية. في دراستنا نهتم بمعامل المزج القوي فقط.

**المزج القوي:** نقول عن المتتالية $(Z_i, i \geq 1)$ أنها ألفا مزوجة $(\alpha - mixing)$ أو (مزوجة بقوة) إذا تحقق :

$$\alpha(n) = \sup_{l \geq 1} \sup_{A \in \mathcal{F}_1^l, B \in \mathcal{F}_{n+l}^{\infty}} |P(B \cap A) - P(A)P(B)| \to 0 \; as \; n \to \infty$$

حيث $\mathcal{F}_1^{\infty}, \mathcal{F}_{l+n}^{\infty}$ الجبور الجزئية المولدة بـ $(Z_i, i = 1, .., l)$ و $(Z_i, i = l+n, \dots)$ على التتالي. يعتبر معامل المزج القوي من أكثر معاملات المزج شيوعاً ( Bradely,2005) ، (Rio,2017) وله تطبيقات واسعة في الإحصاء (Bosq,2012).

$$\alpha(n) = O(n^{-\rho}) \qquad for\; \rho > 0\,. \qquad (7)$$

في تعريف معامل المزج $\alpha - mixing$، إنّ $A$ هي حدث مرتبط فقط بالمتغيرات العشوائية الماضية (past random variables) بينما $B$ يرتبط بالمتغيرات العشوائية المستقبلية فقط (future random variables ). بالتالي اذا كان الحدث المستقبلي $B$ فعلياً مستقل عن الحدث الماضي $A$، فإنّ الاحتمال $P(B \cap A)$ سيكون مساوٍ بشكل تام لـ $P(A)P(B)$.

لذلك فإنّ معامل المزج $\alpha - mixing$ يقيس مدى اقتراب الأحداث المستقبلية للاستقلال عن الاحداث الماضية وذلك بأخذ الـ supremum للفرق بين هاتين القيمتين $P(B \cap A)$ و $P(A)P(B)$.

## النتائج والمناقشة

قمنا في هذه الفقرة بدراسة الاتساق في $L_1$ للمقدار $J_n$ المعرف بالعلاقة (6) تحت شرط الارتباط، في المبرهنة التالية افترضنا أنّ $Y$ محدودة كما في ( Deveroy et al.,1994)

كما أنّ (Deveroy; Gyorfi; Krzyzak;Lugosi,1994) بيّنوا أنه بما أنّ $Y$ محدودة فإن النتائج المبرهنة من أجل $(L_1 - error)$ صحيحة أيضاً من أجل $(L_p - error)$، أي أنَّ

$$J_n^{(p)} = \left( \int_0^1 \int |m_n(x,u) - m(x)|^p \, \mu(dx)\, du \right)^{1/p} \qquad (8)$$

تسعى إلى الصفر فقط واذا فقط كانت $J_n$ تسعى إلى الصفر في $(L_1 - error)$.

**مبرهنة:**

لتكن $\mathcal{D}_n$ متتالية من المشاهدات العشوائية الـ α –مزوجة للزوج العشوائي $(X,Y)$ وتحقق (7) مع $\rho > 1$، و بفرض أنّ $Y$ محدودة وأنّ الشروط التالية محققة:

$$H1: \quad k/n \to 0 \ as \ n \to \infty$$
$$H2: \quad k \to \infty \ as \ n \to \infty$$
$$H3: \quad \frac{k}{\sqrt{n}} \longrightarrow \infty \ as \ n \longrightarrow \infty$$
$$H4: \quad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha(t) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\rho} < \infty \ ; \ \rho > 1$$

فإنّ:

$$E(J_n) \to 0 \quad as \ n \to \infty$$

إنّ الشرط $H3$ هو أضعف من الشرط الموجود في (النظرية 11.3)(Bosq; Lecoutre ,1987)

**البرهان:**

لإثبات المبرهنة سنعرف $m_n^*(,u) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} Y_i I_{\{(X_i,U_j)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}$ حيث $r_n = r_n(x,u), b_n = b_n(x,u)$ تحقق

$$v\left(S_{(x,u),(r_n,b_n)}\right) = {}^{k}\!/_{n} \qquad (9)$$

حيث $I_{\{.\}}$ تابع المميز، أي يحقق:

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

حيث $S_{(,u),(r_n,b_n)}$ الكرة المغلقة .

لنكتب الحد $|m_n(x,u) - m(x)|$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\int_{R^d} |m_n(x,u) - m(x)| v(d(x,u)) \\ &\le \int_{R^d} |m_n(x,u) - Em_n^*(x,u)| v(d(x,u)) \\ &+ \int_{R^d} |Em_n^*(x,u) - m(x)|\, v(d(x,u)). \end{aligned} \qquad (10)$$

وبالتالي لإثبات أن الحد في الطرف الأيسر يسعى للصفر يكفي أن نثبت أنّ كل حد من الحدود في الطرف الايمن يسعى إلى الصفر.

من (9) لدينا:

$$ {}^{k}\!/_{n} \to 0 \implies r_n(x,u) \to 0$$

وبالتالي بحسب مبرهنة كثافة لوبيغ ( Wheeden; Zygmund,1977) يكون لدينا:

$$Em_n^*(x,u) = \frac{1}{v(S_{(x,u)(r_n,b_n)})}\int_{S_{(x,u)(r_n,b_n)}} E(Y|X=\acute{x})v(d(\acute{x},\acute{u}) \to E(Y|(X,Z)=(x,z))$$
$$= m(x)$$

وبما أنّ $Y$ محدودة، يكون لدينا بحسب مبرهنة التقارب المحدود :

$$\int_{R^d}|m(x) - Em_n^*(x,u)|v(d(x,u)) \to 0. \qquad (11)$$

وبالتالي بحسب (10) بقي أن نثبت أنّ $\int_{R^d}|m_n(x,u) - Em_n^*(x,u)|v(d(x,u)) \to 0$.

لدينا:

$$E\int_{R^d}|m_n(x,u) - Em_n^*(x,u)|v(d(x,u))$$
$$\le E\int_{R^d}|m_n(x,u) - m_n^*(x,u)|v(d(x,u))$$
$$+ E\int_{R^d}|m_n^*(x,u) - Em_n^*(x,u)|v(d(x,u)) := I + II \qquad (12)$$

سنثبت أنّ الحدّين $I$ و$II$ في الطرف الأيمن من العلاقة (12) يسعيان إلى الصفر عندما $n \to 0$.

لدينا أولاً بحسب متراجحة كوشي شوارتز :

$$II = E\int_{R^d}|m_n^*(x,u) - Em_n^*(x,u)|v(d(x,u))$$
$$\le \left(\int_{R^d} 1^2 v(d(x,u))\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^d} E(m_n^*(x,u) - Em_n^*(x,u))^2 v(d(x,u))\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \int_{R^d}\sqrt{E(m_n^*(x,u) - Em_n^*(x,u))^2}v(d(x,u))$$
$$= \int_{R^d}\sqrt{var\big(m_n^*(x,u)\big)}v(d(x,u))$$
$$\le \int_{R^d}\sqrt{\frac{n}{k^2}var\left(YI_{\{(X,U)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}\right) + C_n(x,u)}v(d(x,u))$$

وبما أنّ $Y$ محدود فإنّه يوجد $M > 0$ بحيث $| \le M < \infty$ |، ويكون

$$C_n(x,u) = \frac{1}{k^2}\sum_{i\ne j}\left|cov\left(Y_iI_{\{(X_i,U_i)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}, Y_jI_{\{(X_j,U_j)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}\right)\right|$$

لدينا من جهة:

$$\frac{n}{k^2}var\left(YI_{\{(X,U)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}\right) \le \frac{n}{k^2}M^2EI_{\{(X,U)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}$$
$$\le \frac{n}{k^2}M^2v\big(S_{(x,u),(r_n,b_n)}\big) \quad \le \frac{n}{k^2}M^2\frac{k}{n} = M^2\frac{1}{k}$$

ومن جهة أخرى:

$$C_n(x) \le \frac{4}{k^2}\sum_{i\ne j}\left\|Y_iI_{\{(X_i,U_i)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}\right\|_\infty\left\|Y_jI_{\{(X_j,U_j)\in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}}\right\|_\infty \alpha(|i-j|)$$
$$\le \frac{4M^2}{k^2}\sum_{i\ne j}\alpha(|i-j|)$$
$$\le \frac{4nM^2}{k^2}\sum_{t=1}^{\infty}\alpha(t)$$

من الفرض لدينا:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha(t) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\rho} \leq \infty \, ; \; \rho > 1$$

وبالتالي: $C_n(x,u) \leq \frac{cn}{k^2} \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\rho} \leq \frac{cn}{k^2}$

$$E \int_{R^d} |m_n^*(x,u) - Em_n^*(x,u)| v(d(x,u)) \longrightarrow 0 \qquad (13)$$

بقي أن نثبت أنّ:

$$I = E \int_{R^d} |m_n(x,u) - m_n^*(x,u)| v(d(x,u)) \longrightarrow 0 \qquad (14)$$

لتكن $X_{(k)}$ الجوار الـ k-الأكثر قرباً لـ $x$ ولنعرف $\left|U_{(k)} - u\right|$ $, B_n =$ $R_n = \left\|X_{(k)} - x\right\|$، وبالتالي:

$$\begin{aligned}
|m_n(x,u) - m_n^*(x,u)| &= \frac{1}{k} \left| \sum_{j=1}^{n} Y_j I_{\{(X_j,U_j) \in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}} - \sum_{j=1}^{n} Y_j I_{\{(X_j,U_j) \in S_{(x,u),(R_n,B_n)}\}} \right| \\
&\leq \frac{M}{k} \sum_{j=1}^{n} \left| I_{\{(X_j,U_j) \in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}} - I_{\{X_j \in S_{(x,\rho_n)}\}} \right| \\
&= M \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} I_{\{(X_j,U_j) \in S_{(x,u),(r_n,b_n)}\}} - 1 \right| \\
&= M |\widetilde{m_n}(x,u) - E\widetilde{m_n}(x,u)|
\end{aligned}$$

حيث أنّ $\widetilde{m_n}(x,u)$ تعرف على أنها $m_n^*(x,u)$ باستبدال كل $Y$ بمتغير عشوائي ثابت $Y = 1$. وبالتالي لإثبات أنّ I تسعى للصفر يكفي اثبات أنّ الحد

$$\int_{R^d} |\widetilde{m_n}(x,u) - E\widetilde{m_n}(x,u)| \, v((dx,u)) \to 0 \qquad (15)$$

يتم بنفس الطريقة التي تم فيها اثبات (14) وبهذا يكون قد تمّ البرهان.

## الاستنتاجات والتوصيات:

تم تقديم مقدّر الجوارات الـ k الآكثر قرباً لدالّة الانحدار في حالة الارتباط كما تم تعميم تقارب هذا المقدّر في $L_1$ من الحالة المستقلة الى الحالة المرتبطة بمعامل المزج α.

في ضوء النتائج سابقة الذكر نوصي بما يلي:

- تطوير النتائج إلى الحالة التي تكون فيها $y$ غير محدودة.
- توسيع النتائج لتشمل انواع اخرى من الارتباط تشمل انواع اخرى من الارتباط كالارتباط بمفهوم المزج $\beta -$ $mixing, \rho - mixing \, , \varphi - mixing$ وغيرها.
- توسيع الدراسة لتشمل أنواع أخرى من التقارب كالتقارب شبه الأكيد والتقارب بالاحتمال وغيرها.

## References

[1] Bosq, D. *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, 2nd eds, Berlin(1998)232.
[2] Bosq, D. ; Lecoutre, J. P. *Théorie de l' Estimation Fonctionnelle*. Economica, Paris(1987)
[3] Bosq, D., *Nonpaametric statistics for stochastic processes estimation and prediction,* Springer Science & Business Media,2012.
[3] Bradley, R. C. *Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions, Probab. Surv.* 2,2005,107–144.
[4] Cohen, J.Y.*Statistics and Data with R: An Applied Approach Through Examples*. A John Wiley & Sons, Ltd.,2008,618.
[5] Crawley J. M. *The R book.* 2nd. ed., John Wiley & Sons, Ltd.,2013, 1060.
[6] Devroye, L.P. *Necessary and sufficient conditions for the pointwise convergence of nearest neighbor regression function estimates. Z.* Wahrscheinlichkeneitstheorie Verw Gebiete 61, ,1982, 467-81.
[7] Devroye, L.P. *The uniform convergence of nearest neighbor regression function estimators and their application in optimization*, IEEE Trans. Inform. Theory, 24 ,1978, 142–151.
[8] Devroye L.P. ; Györfi, L. *Nonparametric Density Estimation*: the L1 View. Wiley: New York,1985,
[9] Devroye, L., *On the almost everywhere convergence of nonparametric regression function estimates*. Annals of Statistics, 9 ,1981a,1310–1319.
[10] Devroye, L., *On the asymptotic probability of error in nonparametric discrimination.* Annals of Statistics, 9 ,1981b,1320–1327.
[11] Devroye, L., Györfi, L., Krzyżak, A., and Lugosi, G. *On the strong universal consistency of nearest neighbor regression function estimates*. Annals of Statistics, 22 ,1994,1371–1385.
[12] Devroye, L.; Ferrario, P., Györfi, L., and Walk, H. *Strong universal consistent estimate of the minimum mean squared error*. In Empirical Inference - Festschrift in Honor of Vladimir N. Vapnik, Springer ,2013, 143–160.
[13] Györfi, L.; Kohler M.; Krzyzak, A.; Walk, H., A *Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*, Springer-Verlag, New York,2002,664.
[14] Fix, E. ; Hodges, J.L, *Discriminatory analysis, nonparametric discrimination*, USAF School of Aviation Medicine, Randolph Field, Texas, Project 21-49-004, Report 4, Contract AD41(128)31, 1951..
[15] Hardle, W. *Applied Nonparametric Regression.* Cambridge University Press, Cambridge ,1990,433.
[16] Hardle, W.; Muller, M.; Sperlich, S.;Werwatz,A., *Nonparametic and Semiparametric Models*, ser. Springer Series in Statistics. NewYork: Springer,2004,300.
[17]Kanaya, Z.; Younso, A.; Azhary, N.,*Consistency the Decision Function of k-nearest Neighbors by Using $\alpha$-mixing Random stochastic, Tishreen University Journal-Basic Science Series,2021.*
[18] Kudraszow NL, Vieu P.*Uniform consistency of kNN regressors for functional variables*. Stat Probab Lett 83(8),2013,1863–1870.
[19] Mack, Y.P., *Local properties of k-NN regression estimates,* SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 2,1981, 311-323.

[20] Mack, Y. P.; Rosenblatt M. *Multivariate k-nearest neighbor density estimates.* Journal of Multivariate Analysis 9 ,1979,1–19.
[21] Rio, E., *Asymptotic theory of weakly depended random process*, . Probability Theory and Stochastic Modelling, vol 80. Springer, Berlin, Heidelberg.,2017,211
[21] Rosenblatt, M.,*A central limit theorem and strong mixing condition*.,Proc. Nat. Acad.Sci. U.S.A, 42,1956,43-47.
[22] Royall, R. M., *A class of nonparameteric estimates of a smooth regression function*,Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford,1966,68.
[23] Rozanova, Y.; Volkorski, V. *Some limit theorem for random functions* . Theory Probab. Appl. 4,1959,178-197.
[24] Stone, C.*Consistent non parametric regression*, Annals of Statistics 5,1977, 595-645.
[25] Wheeden, R.; *Zygmund, A., Measure and Integral*, Deeker, New York,1977,285.
[26] Cai L, Yu Y, Zhang S, Song Y, Xiong Z, Zhou T , *A sample-rebalanced outlier-rejected k -nearest neighbor regression model for short-term traffic flow forecasting*. IEEE Access (2020) 8:22686–22696.
[27]Chen Y, Hao Y (2017) A feature weighted support vector machine and K-nearest neighbor algorithm for stock market indices prediction. Expert Syst Appl 80:340–355. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.02.044
[28]Nguyen B, Morell C, Baets BD (2016) Large-scale distance metric learning for k-nearest neighbors regression. Neurocomputing 214:805–814
[29]Huang J, Perry M (2016) A semi-empirical approach using gradient boosting and k-nearest neighbors regression for GEFCom2014 probabilistic solar power forecasting. Int J Forecast 32:1081–1086
[28]Hu C, Jain G, Zhang P, Schmidt C, Gomadam P, Gorka T (2014) Data-driven method based on particle swarm optimization and k-nearest neighbor regression for estimating capacity of lithium-ion battery. Appl Energy 129:49–55
[29]Berbee, H., *Random walks with stationary increments and renewal theory*, Mathematisch Centrum(1979).
[30]Biau, G., Gerou F., Guyader A., *Rate of convergence of the Functional k-Nearest Neighbor Estimate*, IEEE Transactions on information Theory 56(4),(2010)2034-2040.
[31]Collomb, G., *Estimation de la regression la method des k points les plus proches avecnoyau, statistque non Parametrique Asymptotique*, LectureNotes in Math. Spri nger Berlin821(1980)159-175
[32]Mack, Y.P., *Local properties of k-NN Regression estimates*,SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 2,(1981)311-323.
[33]McDiarmid, c.,*On the Method of Bounded Differences, In Surveys in combinatories*, Cambridge University Press. Cambridge (1989).
[34]Mokkadem, A., *Mixing properties of ARMA processes*, stochastic processes and their application,29(1988)309-315.
[35]Rhys, I.H., *Machine learning with R, The Tidyverse,and mlr*,1ed,Manning Publications(2020)1103.