تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير بدوال كسرية على منحنيات كارلسون

د. محمد علي*
د. حسن خليفة**
بشار كنج***

(تاريخ الإيداع 4/ 7 / 2021. قُبِل للنشر في 15/ 9 /2021)

□ ملخّص □

قمنا في هذا البحث، بإثبات أن أي دالة من فضاء ليبيغ $L^{p(.)}(\Gamma)$ ذي الأس الكيفي p المعرفة على منحني جوردان محدود الطول Γ تقبل النشر في متسلسلة $p(.)-$ فابير لورنت. وبالاستفادة من هذه المتسلسلة، درسنا تقريب دوال الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)$ دالة متغيرة تحقق شروط معينة، بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة $p(.)-$فابير لورنت وذلك على أسرة واسعة من المنحنيات تدعى منحنيات كارلسون. وعلاوة على ذلك، قدّرنا الخطأ المرتكب في التقريب باستخدام معامل الاستمرارية في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$.

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، منحنيات كارلسون، فضاء ليبيغ ذي الاس المتغير، كثيرات حدود $p(.)-$ فابير.

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريةmohammadali@gmail.com
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.hasankhalifa@gmail.com
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات–كلية العلوم – اللاذقية – سورية.Basharkinj@gmail.com

Approximation in Lebesgue Space with Variable Exponent by Rational Functions on Carleson Curves

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Hasan Khalifa**
Bashar kinj***

(Received 4 / 7 / 2021. Accepted 15 / 9 /2021)

□ ABSTRACT □

In this work, we have proved that any function in the Lebesgue space with variable exponent $L^{p(.)}(\Gamma)$ defined on a rectifiable Jordan curve Γ can be expressed in $p(.)$ −Faber Laurent series. Then, using this series, the approximation properties in the space $L^{p(.)}(\Gamma)$, where $p(.)$ is variable function satisfying certain conditions, by the partial sums of $p(.)$ − Faber Laurent series on a large class of curves called Carleson curves are investigated. Moreover, we have estimated the truncation error using the modulus of continuity in the space $L^{p(.)}(\Gamma)$.

Keywords: Approximation theory, Carleson curves, Lebesgue space with variable exponent, $p(.)$ −Faber polynomials.

* **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. mohammadali@gmail.com**
** **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. hasankhalifa@gmail.com**
*** **Master student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. Basharkinj@gmail.com**

مقدمة:

يُعد فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير تعميماً لفضاء ليبيغ الكلاسيكي، وذلك باستبدال الأس الثابت p في تعريف فضاء ليبيغ (الكلاسيكي) بدالة متغيرة $p(.)$. ازداد الاهتمام مؤخراً بفضاء ليبيغ ذي الأس المتغير، بسبب تطبيقاته المختلفة في العديد من المجالات، نذكر منها على سبيل المثال، نمذجة بعض مسائل ميكانيك السوائل [1] ومعالجة الصور [2]. نهتم في هذا العمل بتقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير، لذا نعطي لمحة تاريخية عن أهم الأعمال المنجزة بهذا الخصوص. توصل Israfilov وGuven عام 2010 في [3] إلى تقريب الدوال الدورية من فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير المعرفة على دائرة الواحدة بكثيرات حدود مثلثية. وفي عام 2011 أثبت Akgun [4] إمكانية تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير الدورية بدوالٍ مثلثية. وفي عام 2016 درس Israfilov وTestici [5] المسألة المباشرة لتقريب دوال فضاء سميرنوف ذي الأس المتغير المعرفة على منطقة بسيطة الترابط محاطة بمنحني ديني الأملس بكثيرات حدود فابير. وفي عام 2017 توصل كل من Ali وMahmoud وKinj [6] إلى تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير المعرفة على منطقة ثنائية الترابط محاطة بمنحنيين ينتميان إلى أسرة منحنيات ديني الملساء بدوالٍ كسرية. طُرحت العديد من التساؤلات حول إمكانية تعميم هذه الدراسات من أجل منحنيات غير ملساء [7] كاستبدال أسرة منحنيات ديني الملساء بأسرة منحنيات كارلسون. درس Israfilov وGursel في عام 2020 [8] تقريب دوال فضاء سميرنوف ذي الأس المتغير على منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني كارلسون بكثيرات حدود $p(.)-$فابير.

قمنا في هذا العمل، بإثبات أن أي دالة من فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير تقبل النشر في متسلسلة $p(.)-$ فابير لورنت. وبأخذ المجموع الجزئي لهذه المتسلسلة، حصلنا على دالة $p(.)-$ فابير لورنت الكسرية. وعلاوة على ذلك درسنا تقريب أي دالة من فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير المعرفة على منحني كارلسون بدالة $p(.)-$ فابير لورنت الكسرية.

قُسم هذا البحث بالشكل الآتي: ذكرنا بدايةً بأهم المصطلحات والرموز المستخدمة والتعاريف الأساسية، ثم تطرقنا إلى بعض التمهيديات التي استخدمناها للوصول إلى النتائج المرجوة، ليتم بعد ذلك الوصول إلى برهان النتيجة الرئيسية في هذا العمل بكل سهولة ويسر. ونشير إلى أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث $c, c_1, c_2, \dots$ كلها موجبة ومختلفة ولا تؤثر على دراسة التقريب.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمنُ أهمية البحث من كونه يُعنى بدراسة إمكانية استبدال دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير الصعبة والمعقدة والمعرفة على أسرة واسعة من المنحنيات تدعى منحنيات كارلسون بدوالٍ كسرية بدقةٍ مقبولةٍ. أما أهداف البحث فيمكن تلخيصها بإثبات أنَّ أي دالة من فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير تقبل النشر في متسلسلة $p(.)-$ فابير لورنت وبالاستفادة من ذلك قمنا بتشكيل دالة كسرية استخدمناها في دراسة تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكلٍ خاص ضمن نظرية تقريب الدوال العقدية والتحليل العقدي، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكلٍ أساسي على مفاهيم التحليل العقدي، مثل التحويلات المحافظة ومنشور لورنت وصيغ سوخوتسكي وأدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

نورد فيما يأتي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$. إنَّ Γ يقسم المستوي إلى منطقتين إحداهما محدودة G والأخرى غير محدودة G^-. سنفترض، دون المساس بعمومية الدراسة، أن $0 \in G$.

ليكن D قرص الواحدة أي، $D = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ و γ_0 دائرة الواحدة و $D^- = \{w \in \mathbb{C}: |w| > 1\}$.

لتكن $w = \varphi(z)$ الدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- وتحقق $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$ ، $\varphi(\infty) = \infty$ وسنرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.

لتكن $w = \varphi_1(z)$ الدالة التي تنقل بشكل محافظ G إلى D^- وتحقق $\lim\limits_{z\to 0} z\varphi_1(z) > 0$ و $\varphi_1(0) = \infty$ وسنرمز بـ ψ_1 للدالة العكسية للدالة φ_1.

تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف 1 [9] **فضاء دوال ليبيغ الكلاسيكي Classical Lebesgue space**

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وليكن $1 \le p < \infty$ عدداً حقيقياً. يُعرف فضاء ليبيغ الكلاسيكي $L^p(\Gamma)$ بأنه مجموعة جميع الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ القابلة للمكاملة لوبيغياً من الدرجة p والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_\Gamma |f(z)|^p \, |dz| < \infty.$$

تعريف 2 [10] فضاء دوال ليبيغ ذي الأس المتغير Lebesgue space with variable exponent

ليكن F المجال $[0,2\pi]$ أو منحني جوردان محدود الطول، ولتكن $p(.): F \to [1,\infty)$ دالة قابلة للقياس على F تحقق الشرطين الآتيين:

$$1 < p_- := \operatorname*{essinf}_{z\in F} p(z) \le \operatorname*{esssup}_{z\in F} p(z) := p_+ < \infty \#(1)$$

$$|p(z_1) - p(z_2)| \ln\left(\frac{|F|}{|z_1 - z_2|}\right) \le c_1, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in F \#(2)$$

حيث c_1 ثابت موجب و $|F|$ قياس ليبيغ لـ F. يُرمز بـ $\mathcal{P}_{\log}\ (F)$ لأسرة جميع الدوال $p(.)$ المحققة للشرطين (1) و (2). من أجل $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ يُعرف فضاء ليبيغ ذي الاس المتغير $L^{p(.)}(\Gamma)$ بأنه أسرة الدوال f القابلة للقياس على Γ والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_\Gamma |f(z)|^{p(z)} \, |dz| < \infty$$

إن الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ يشكل فضاء باناخ إذا زوّد بالنظيم [11]

$$\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} := \inf\left\{\lambda \ge 0: \int_\Gamma \left|\frac{f(z)}{\lambda}\right|^{p(z)} |dz| \le 1\right\}.$$

وفي الحالة الخاصة، التي يكون فيها p عدداً ثابتاً، حيث $1 \le p < \infty$ فإنَّ فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير يؤول إلى فضاء ليبيغ الكلاسيكي.

تعريف 3 [11] **فضاء دوال سميرنوف ذي الأس المتغير Smirnov space with variable exponent**

لتكن G منطقة في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولتكن Γ_r صورة الدوائر $\gamma_r = \{w \in \mathbb{C}: |w| = r, 0 \le r < 1\}$ وفق تحويل محافظ ينقل قرص الواحدة D إلى المنطقة G. يُرمز بـ $E^1(G)$ لأسرة جميع الدوال $f: G \to \mathbb{C}$ التحليلية في المنطقة G، والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\sup_{0\le r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|\,|dz| < \infty$$

يُعرف فضاء دوال سميرنوف ذي الأس المتغير $E^{p(.)}(G)$، حيث $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ بالعلاقة

$$E^{p(.)}(G) := \{f \in E^1(G):\ f \in L^{p(.)}(\Gamma)\}$$

إن الفضاء $E^{p(.)}(G)$ يشكل فضاء تام، إذا زوّد بالنظيم $\|f\|_{E^{p(.)}(G)} = \|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$.

تعريف 4 [12] **منحني كارلسون Carleson curve**

يُقال عن منحني جوردان المحدود الطول Γ إنَّه منحني كارلسون إذا وجد ثابت موجب C_2 بحيث يتحقق الشرط

$$|\Gamma(z, r)| \le C_2\, r; \qquad \forall z \in \Gamma, \qquad \forall r > 0,$$

حيث $|\Gamma(z, r)|$ طول جزء المنحني الواقع داخل القرص الذي مركزه النقطة z من المنحني Γ ونصف قطره r.

ومن الجدير بالذكر أن أسرة منحنيات كارلسون واسعة جداً، فهي تحتوي أسرة المنحنيات الملساء وأسرة المنحنيات الملساء بالتجزئة والعديد من أسر المنحنيات الشهيرة [13].

تعريف 5 [13] تكامل كوشي الشاذ Singular Cauchy's Integral

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $f \in L^1(\Gamma)$. يُعرّف تكامل كوشي الشاذ للدالة f بالعلاقة الآتية

$$S_\Gamma(f)(z) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma\cap\{\xi: |\xi - z| > \epsilon\}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi; \quad z \in \Gamma.$$

إنَّ المؤثر $S_\Gamma: L^{p(.)}(\Gamma) \to L^{p(.)}(\Gamma)$ المعرف وفق $f \mapsto S_\Gamma(f)$ يُسمى مؤثر كوشي الشاذ وإذا كان Γ منحني كارلسون فإن المؤثر S_Γ محدود في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ [14] أي، يوجد ثابت موجب c_3 بحيث

$$\|S_\Gamma f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \le c_3 \|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \#(3)$$

تعريف 6 [15] معامل الاستمرارية Modulus of continuity

ليكن $g \in L^{p(.)}(\gamma_0)$ و $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\gamma_0)$ يُعرف معامل استمرارية الدالة g على دائرة الواحدة γ_0 بالعلاقة

$$\Omega(g, \delta)_{p(.)} := \sup_{0\le h\le\delta} \|g(.) - \sigma_h g(.)\|_{L^{p(.)}(\gamma_0)}, \qquad \delta > 0$$

حيث

$$\sigma_h g(w) = \frac{1}{h} \int_0^h g(we^{it})\, dt, \qquad w \in \gamma_0, \qquad 0 < h < \pi.$$

إنَّ معامل الاستمرارية للدالة g يحقق من أجل $g, g_1, g_2 \in L^{p(.)}(\gamma_0)$ و $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\gamma_0)$ الخواص الآتية

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(g, \delta)_{p(.)} = 0,$$

$$\Omega(g_1 + g_2, .)_{p(.)} \le \Omega(g_1, .)_{p(.)} + \Omega(g_2, .)_{p(.)}.$$

تعريف 7 [8] كثيرات حدود $p(.)$–فابير Faber polynomials

بغية تعريف كثيرات حدود $p(.)-$ فابير، يلزمنا تعريف صف جزئي من صف الدوال $\mathcal{P}_{log}\ (L)$ بالشكل الآتي:

لتكن B منطقة بسيطة الترابط محاطة بمنحنٍ L. يُقال عن الدالة $p(.) \in \mathcal{P}_{log}\ \ (L)$ إنها تنتمي إلى الصف $\mathcal{P}_{\log}^{a}\ \ (\overline{B^{-}})$ إذا كانت غير صفرية وتحليلية في المنطقة B^{-} ومستمرة على $\overline{B^{-}}$.

ليكن $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}^{a}\ \ (\overline{G^{-}})$، عندئذٍ من أجل أي عدد صحيح غير سالب k تكونَ الدالة $\varphi^{k}(z)\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}$ تحليلية في المنطقة G^{-} وتملك قطباً من المرتبة k في ∞. وبالتالي فإنه من منشور لورنت لهذه الدالة في جوار ∞، يوجد كثير حدود $F_{k,p(.)}(z)$ من الدرجة k ودالة تحليلية $E_{k,p(.)}(z)$ في المنطقة G^{-} تحقق $E_{k,p(.)}(\infty) = 0$ ويكون لدينا

$$\varphi^{k}(z)\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}} = F_{k,p(.)}(z) + E_{k,p(.)}(z), \qquad z \in G^{-}$$

إنَّ كثيرات الحدود $F_{k,p(.)}(z)$، حيث $k = 0,1,2,\ldots$ تدعى كثيرات حدود $p(.)$–فابير من أجل $\bar{G}$.

في الحالة الخاصة، التي يكون فيها p عدداً ثابتاً نحصل على كثيرات حدود p–فابير التي عرفت من قبل Israfilov في [16] والتي هي أيضاً تعد تعميماً لكثيرات حدود فابير [17].

باستخدام صيغة كوشي التكاملية من أجل أي $z \in G$ و $R > 1$ و $\Gamma_R = \{z \in G^{-}: |\varphi(z)| = R\}$ نجد أن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\varphi^{k}(\xi)\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_{k,p(.)}(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_{k,p(.)}(\xi)}{\xi - z} d\xi$$
$$= F_{k,p(.)}(z) - E_{k,p(.)}(\infty) = F_{k,p(.)}(z).$$

يمكننا تعريف كثيرات حدود $p(.)$–فابير من أجل $z \in G$ و $w \in U^{-}$ و $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ \ (\overline{G^{-}})$ بالشكل الآتي:

$$\frac{\left(\psi'(w)\right)^{1-\frac{1}{p(\psi(w))}}}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{k,p(.)}(z)}{w^{k+1}} \#(4)$$

من أجل $z \in G^{-}$ و $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}^{a}\ \ (\overline{G^{-}})$ فإنَّه يمكن تمثيل كثيرات الحدود $F_{k,p(.)}(z)$ تكاملياً بالشكل الآتي:

$$F_{k,p(.)}(z) = \varphi^{k}(z)\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi^{k}(\xi)\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z} d\xi, \qquad k = 1,2,\ldots \#(5)$$

النتائج والمناقشة:

تمهيدية 1 [18] **بريفالوف وصيغ سوخوتسكي Privalov Theorem and Sokhotski's formula**

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $f \in L^{1}(\Gamma)$. عندئذٍ تكون الدالتان $f^{+}: G \to \mathbb{C}$ و $f^{-}: G^{-} \to \mathbb{C}$ المعرفتان بالعلاقتين الآتيتين:

$$f^{+}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi\ ;\ t \in G$$
$$f^{-}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi\ ;\ t \in G^{-}$$

تحليليتين في G و G^{-} على الترتيب، ويكون أيضاً $f^{-}(\infty) = 0$، وتتحقق من أجل أي نقطة t من Γ علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$\begin{cases} f^+(t) = S_\Gamma f(t) + \frac{1}{2} f(t) \\ f^-(t) = S_\Gamma f(t) - \frac{1}{2} f(t) \\ f(t) = f^+(t) - f^-(t) \end{cases} \#(6)$$

تمهيدية 2 [8] ليكن Γ منحني كارلسون و $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ عندئذٍ $f^+ \in E^{p(.)}(G)$ و $f^- \in E^{p(.)}(G^-)$.

تمهيدية 3 [8] ليكن $g \in L^{p(.)}(\gamma_0)$، حيث $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\gamma_0)$ ، عندئذٍ من أجل أي $t \in (0, \infty)$ يوجد ثابت موجب c_4 بحيث يتحقق

$$\Omega(g^+, t)_{p(.)} \leq c_4\, \Omega(g, t)_{p(.)}$$

تمهيدية 4 [19] ليكن $g \in E^{p(.)}(U)$ حيث $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\gamma_0)$ وليكن $\sum_{k=0}^{n} a_k(g) w^k$ المجموع الجزئي من الدرجة n لمنشور تايلور للدالة g في جوار الصفر. عندئذٍ من أجل أي عدد صحيح موجب n يوجد ثابت موجب c_5 بحيث يتحقق

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k(g) w^k \right\|_{L^{p(.)}(\gamma_0)} \leq c_5\, \Omega\left(g, \frac{1}{n}\right)_{p(.)}$$

معامل الاستمرارية في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$

من أجل $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ نُعرف على دائرة الواحدة الدالتين

$$f_0(w) = f\big(\psi(w)\big)\, \big(\psi'(w)\big)^{\frac{1}{p_0(w)}} \ \#(7)$$

$$f_1(w) = f\big(\psi_1(w)\big)\, \big(\psi'(w)\big)^{\frac{1}{p_1(w)}}\, w^{\frac{2}{p_1(w)}} \#(8)$$

حيث $p_0(w) = p\big(\psi(w)\big)$ و $p_1(w) = p\big(\psi_1(w)\big)$.

إذا كان Γ منحني كارلسون فإن $f_0 \in L^{p_0(.)}(\gamma_0)$ و $f_1 \in L^{p_1(.)}(\gamma_0)$ وبذلك يمكننا تعريف معامل الاستمرارية للدالة f بواسطة معامل الاستمرارية للدالتين f_0 و f_1 بالشكل الآتي:

$$\omega(f, \delta)_{p(.)} = \Omega(f_0, \delta)_{p_0(.)} + \Omega(f_1, \delta)_{p_1(.)}, \qquad \delta > 0$$

تشكيل دالة $p(.)$–فابير لورنت الكسرية

في هذه الفقرة عرفنا كثيرات حدود $p(.)$– فابير بقوى $\frac{1}{z}$ وأعطينا تمثيلاً تكاملياً لها، وبالاستفادة من ذلك قمنا بنشر أي دالة $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ بمتسلسلة $p(.)$–فابير لورنت. وبأخذ المجموع الجزئي لهذه المتسلسلة عرفنا دالة $p(.)$–فابير لورنت الكسرية.

ليكن $(\bar{G})$ $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}^{a}$، عندئذٍ من أجل أي عدد صحيح موجب k فإنَّ الدالة $\big(\varphi_1(z)\big)^{k-\frac{2}{p(z)}}\big(\varphi_1'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}}$ تحليلية في المنطقة $G\backslash\{0\}$ وتملك قطباً من المرتبة k في جوار الصفر. بالاستفادة من منشور لورنت للدالة $\big(\varphi_1(z)\big)^{k-\frac{2}{p(z)}}\big(\varphi_1'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}}$ في جوار الصفر، يوجد كثير حدود $\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)$ بقوى $\frac{1}{z}$ من الدرجة k ودالة تحليلية $\tilde{E}_{k,p(.)}(z)$ في المنطقة G بحيث يكون

$$\big(\varphi_1(z)\big)^{k-\frac{2}{p(z)}}\big(\varphi_1'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}} = \tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right) + \tilde{E}_{k,p(.)}(z), \qquad z \in G$$

تدعى كثيرات الحدود $\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)$، حيث $k = 1,2, \dots$ كثيرات حدود $p(.)$– فابير بقوى $\frac{1}{z}$ في $\bar{\mathbb{C}}\backslash G$.

وباستخدام صيغة كوشي التكاملية من أجل $z \in G^-$ و $R > 1$ و $\tilde{\Gamma}_R = \{z \in G: |\varphi_1(z)| = R\}$ يكون:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{(\varphi_1(z))^{k-\frac{2}{p(z)}}(\varphi_1'(z))^{\frac{1}{p(z)}}}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{\tilde{E}_{k,p(.)}(\xi)}{\xi - z} d\xi$$
$$= -\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right). \#(9)$$

مبرهنة 1 من أجل $z \in G^-$ و $w \in U^-$ و $p(.) \in \mathcal{P}_{\log}\ \ (\bar{G})$ يكون:

$$\frac{w^{-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}(\psi_1'(w))^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)}{w^{k+1}} \#(10)$$

البرهان: لتكن z نقطة كيفية من G^-. بما أنَّ الدالة $\frac{w^{-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}(\psi_1'(w))^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w)-z}$ تحليلية في U^- وتملك قطباً من المرتبة الثانية في جوار اللانهاية فإن منشور لورنت لها في جوار ∞ يأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{w^{-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}(\psi_1'(w))^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{k,p(.)}(z)}{w^{k+2}} \#(11)$$

بما أن المتسلسلة في الطرف الأيمن للمساواة (11) متقاربة بانتظام على أي مجموعة جزئية متراصة من U^-، فإنه من أجل $R > 1$ وأي عدد طبيعي n نجد أن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}_R} \frac{(\varphi_1(\xi))^{n-\frac{2}{p(\xi)}}(\varphi_1'(\xi))^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{w^{n-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}(\psi_1'(w))^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w) - z} dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} w^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{k,p(.)}(z)}{w^{k+2}}\right) dw$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{w^n}{w^{k+2}} dw\right) \tilde{A}_{k,p(.)}(z)$$
$$= \tilde{A}_{n-1,p(.)}(z).$$

وبالاستفادة من العلاقة (9) نجد أن $\tilde{A}_{n-1,p(.)}(z) = -\tilde{F}_{n,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)$ لكل $n = 1,2, \dots$ وبالتعويض في العلاقة (11) نجد أن:

$$\frac{w^{-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}(\psi_1'(w))^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)}{w^{k+1}}.$$

مبرهنة 2 ليكن $p \in \mathcal{P}_{\log}^{a}\ \ (\bar{G})$ و $z \in G\backslash\{0\}$ فإنه من أجل أي عدد صحيح موجب k يكون لدينا

$$\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right) = [\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p(z)}}\left(\varphi'_1(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{[\varphi_1(\xi)]^{k-\frac{2}{p(\xi)}}(\varphi_1'(\xi))^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z} d\xi \#(12)$$

البرهان: لتكن z نقطة كيفية من المنطقة $G\backslash\{0\}$. ولنختر n عدداً صحيحاً كبيراً بما فيه الكفاية، و r عدداً حقيقياً صغيراً بما فيه الكفاية، بحيث تقع النقطة z داخل المنطقة ثنائية الترابط المحاطة بالمنحني $\tilde{\Gamma}_{1+\frac{1}{n}} \cup L^-(0,r)$ حيث، $L(0,r) := \{z \in G: |z| = r\}$ وباستخدام صيغة كوشي التكاملية يكون لدينا

$$[\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p(z)}}\left(\varphi'_1(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}=\int_{\tilde{\Gamma}_{1+\frac{1}{n}}\cup L^-(0,r)}\frac{[\varphi_1(\xi)]^{k-\frac{2}{p(\xi)}}\left(\varphi'_1(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi-z}d\xi$$

$$=\int_{\tilde{\Gamma}_{1+\frac{1}{n}}}\frac{[\varphi_1(\xi)]^{k-\frac{2}{p(\xi)}}\left(\varphi'_1(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi-z}d\xi-\int_{L\ \ (0,r)}\frac{[\varphi_1(\xi)]^{k-\frac{2}{p(\xi)}}\left(\varphi'_1(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi-z}d\xi$$

بجعل n تسعى إلى ∞ وبالاستفادة من (9) نجد أنَّ

$$\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)=[\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p(z)}}\left(\varphi'_1(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\varphi_1(\xi)]^{k-\frac{2}{p(\xi)}}\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi-z}d\xi.$$

مبرهنة 3 أي دالة $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ \ (\Gamma)$ يمكن نشرها في متسلسلة $p(.)-$ فابير لورنت الآتية:

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,F_{k,p(.)}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}-b_k\,\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\#(13)$$

البرهان: ليكن $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ عندئذٍ بالاستفادة من التمهيدية 2 فإنَّ $f^+\in E^{p(.)}(G)$ و $f^-\in E^{p(.)}(G^-)$.

من أجل أي نقطة $z\in G$ يكون لدينا

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f\big(\psi(w)\big)\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}f\big(\psi(w)\big)\left(\psi'(w)\right)^{\frac{1}{p(\psi(w))}}\frac{\left(\psi'(w)\right)^{1-\frac{1}{p(\psi(w))}}}{\psi(w)-z}dw$$

وباستخدام العلاقة (4) نجد أنَّ

$$f^+(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,F_{k,p(.)}(z)$$

حيث الأمثال a_k تعطى بالعلاقة

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f_0(w)}{w^{k+1}}dw,\qquad k=0,1,2,\dots$$

لتكن الآن $z\in G^-$ نقطة كيفية، عندئذٍ

$$f^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f\big(\psi_1(w)\big)\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}f\big(\psi_1(w)\big)\left(\psi_1'(w)\right)^{\frac{1}{p(\psi_1(w))}}w^{\frac{2}{p(\psi_1(w))}}\frac{w^{-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}\left(\psi_1'(w)\right)^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w)-z}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}f_1(w)\frac{w^{-\frac{2}{p(\psi_1(w))}}\left(\psi_1'(w)\right)^{1-\frac{1}{p(\psi_1(w))}}}{\psi_1(w)-z}dw$$

وبالاستفادة من العلاقة (10) يكون لدينا

$$f^{-}(z)\sim\sum_{k=1}^{\infty}-b_k\,\tilde{F}_{k,p(.)}(1/z).$$

حيث الأمثال b_k تعطى بالعلاقة

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f_1(w)}{w^{k+1}}dw\,,\qquad k=1,2,\ldots$$

لدينا من علاقات سوخوتسكي (6) أنَّ $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ لكل $z\in\Gamma$. وبالتالي فإن أي دالة $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ يمكن نشرها في متسلسلة $p(.)-$ فابير لورنت الآتية:

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,F_{k,p(.)}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}-b_k\,\tilde{F}_{k,p(.)}(1/z).$$

بأخذ المجموع الجزئي لمتسلسلة $p(.)-$فابير لورنت (13)، نحصل **دالة $p(.)-$فابير لورنت الكسرية** $R_{n,p(.)}(f,z)$ من أجل أي عدد صحيح موجب n بالشكل الآتي:

$$R_{n,p(.)}(f,z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_{k,p(.)}(z)+\sum_{k=1}^{n}-b_k\,\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\#(14)$$

تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير بدوالٍ كسرية

قمنا في هذه الفقرة، بدراسة تقريب أي دالة $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$ حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ بدالة $p(.)-$فابير لورنت الكسرية المعرفة بالعلاقة (14)

ليكن $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ عندئذٍ الدالتين f_0 و f_1 المعرفتين بالعلاقتين (7) و (8) تنتميان إلى الفضاءين $L^{p_0(.)}(\gamma_0)$ و $L^{p_1(.)}(\gamma_0)$ على الترتيب. وبالاستفادة من التمهيدية 2 يكون لدينا $f_0^{+}\in E^{p_0(.)}(U)$ ، و $f_1^{+}\in E^{p_1(.)}(U)$ و $f_0^{-}\in E^{p_0(.)}(U^{-})$ و $f_1^{-}\in E^{p_1(.)}(U^{-})$ كما أنَّ $f_0^{-}(\infty)=0$ و $f_1^{-}(\infty)=0$ وباستخدام علاقات سوخوتسكي (6) نجد أن:

$$f_0(w)=f_0^{+}(w)-f_0^{-}(w)\,,\ \ f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w).\#(15)$$

بوضع $w=\varphi(z)$ في العلاقة (15) نحصل على

$$f(z)=\left[f_0^{+}(\varphi(z))-f_0^{-}(\varphi(z))\right](\varphi'(z))^{\frac{1}{p(z)}}\#(16)$$

بوضع $w=\varphi_1(z)$ في العلاقة (15) نحصل على

$$f(z)=\left[f_1^{+}(\varphi_1(z))-f_1^{-}(\varphi_1(z))\right][\varphi_1(z)]^{-\frac{2}{p(z)}}(\varphi_1'(z))^{\frac{1}{p(z)}}\#(17)$$

لدينا من علاقات سوخوتسكي (6) أنَّ $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ لكل $z\in\Gamma$، وبالتالي فإنه لتقريب الدالة f يكفي أن نقوم بتقريب كل من الدالتين f^{+} و f^{-}.

مبرهنة 4 ليكن Γ منحني كارلسون و $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ ولنفترض أنَّ $p_0(.)\in\mathcal{P}_{\log}^{a}\ (\overline{D^{-}})$ عندئذٍ يوجد ثابت موجب c_6 بحيث يكون التقدير الآتي محققاً

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p(.)}(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\le c_6\,\Omega\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p_0(.)}\#(18)$$

البرهان: لتكن $z'\in G^{-}$ نقطة كيفية، عندئذٍ من العلاقة (5) نجد أن

$$F_{k,p(.)}(z') = \varphi^k(z')\big(\varphi'(z')\big)^{\frac{1}{p(z')}} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi^k(\xi)\big(\varphi'(\xi)\big)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z'}d\xi, \qquad k = 1,2, \dots$$

وبالاستفادة من العلاقة (16) يكون لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p(.)}(z') &= \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z')\,\big(\varphi'(z')\big)^{\frac{1}{p(z')}}\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(\xi) - f_0^+\big(\varphi(\xi)\big)\right]\big(\varphi'(\xi)\big)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - \acute{z}}d\xi\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z'}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0^-(\varphi(\xi))\big(\varphi'(\xi)\big)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z'}d\xi\end{aligned}$$

بما أن الدالة $f_0^-(\varphi(\zeta))\big(\varphi'(\xi)\big)^{\frac{1}{p(\xi)}}$ تحليلية في G^- و $f_0^-(\infty) = 0$ فإنَّ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0^-(\varphi(\xi))\big(\varphi'(\xi)\big)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - z'}d\xi = -f_0^-(\varphi(z'))\big(\varphi'(z')\big)^{\frac{1}{p(z')}}$$

وبذلك نحصل على أنَّ

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p(.)}(z') &= \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z')\,\big(\varphi'(z')\big)^{\frac{1}{p(z')}}\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(\xi) - f_0^+\big(\varphi(\xi)\big)\right]\big(\varphi'(\xi)\big)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi - \acute{z}}d\xi\\ &+f^-(\acute{z}) - f_0^-\big(\varphi(z')\big)\big(\varphi'(z')\big)^{\frac{1}{p(z')}}\end{aligned}$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $z' \to z$ على كامل المنحني Γ نجد أن

$$\begin{aligned}f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p(.)}(z) &= \frac{1}{2}\big(\varphi'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}}\left[f_0^+\big(\varphi(z)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k\big(\varphi(z)\big)^k\right]\\ &+S_\Gamma\left(\big(\varphi'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}}\left[f_0^+\big(\varphi(z)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right]\right)\end{aligned}$$

بأخذ النظيم في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ لطرفي المساواة، وباستخدام متراجحة المثلث نجد أن:

$$\begin{aligned}&\left\|f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p(.)}(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\\ &\le \frac{1}{2}\left\|\big(\varphi'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}}\left[f_0^+\big(\varphi(z)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k\big(\varphi(z)\big)^k\right]\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\\ &+\left\|S_\Gamma\left(\big(\varphi'(z)\big)^{\frac{1}{p(z)}}\left[f_0^+\big(\varphi(z)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right]\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\end{aligned}$$

بما أن مؤثر كوشي الشاذ S_Γ محدود في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$، فإنه من العلاقة (3) ثم بتطبيق متراجحة منكوفسكي وبالتعويض في المتراجحة الأخيرة نحصل على المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^+(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p(.)}(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\leq\left(\frac{1}{2}+c_7\right)\left\|\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left[f_0^+\left(\varphi(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi^k(z)\right]\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\leq\left(\frac{1}{2}+c_7\right)\left\|\sum_{k=0}^{n}a_kw^k-f_0^+(w)\right\|_{L^{p_0(.)}(\gamma_0)}$$

بالاستفادة من التمهيديتين 3 و 4 وبالتعويض في المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$\left\|f^+(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kF_{k,p(.)}(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\leq c_8\Omega\left(f_0^+,\frac{1}{n}\right)_{p_0(.)}\leq c_9\,\Omega\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p_0(.)}.$$

مبرهنة 5 ليكن Γ منحني كارلسون و $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}(\Gamma)$ ولنفترض أنَّ $p_1(.)\in\mathcal{P}_{\log}^a(\overline{D})$ عندئذٍ يوجد ثابت موجب c_{10} بحيث يكون التقدير الآتي محققاً

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=0}^{n}b_k\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\leq c_{10}\,\Omega\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p_1(.)}\#(19)$$

البرهان: لتكن z' نقطة كيفية من G، بالاستفادة من المبرهنة 2 والعلاقة (12) يكون لدينا

$$\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z'}\right)=\left[\varphi_1(z')\right]^{k-\frac{2}{p(z')}}\left(\varphi'_1(z')\right)^{\frac{1}{p(z')}}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left[\varphi_1(\xi)\right]^{k-\frac{2}{p(\xi)}}\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}}{\xi-z'}d\xi.$$

باستخدام العلاقة (17) نحصل على أنَّ

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\,\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{\acute{z}}\right)=\left(\acute{\varphi}_1(\acute{z})\right)^{\frac{1}{p(z')}}\left(\varphi_1(\acute{z})\right)^{-\frac{2}{p(z')}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(\acute{z})$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\acute{\varphi}_1(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p(\xi)}}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(\xi)-f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right)\right]}{\xi-\acute{z}}d\xi$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\acute{\varphi}_1(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p(\xi)}}f_1^-\left(\varphi_1(\xi)\right)}{\xi-\acute{z}}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-\acute{z}}d\xi$$
$$=\left(\acute{\varphi}_1(\acute{z})\right)^{\frac{1}{p(z')}}\left(\varphi_1(\acute{z})\right)^{-\frac{2}{p(z')}}\sum_{k=1}^{n}b_k\varphi_1^k(\acute{z})$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\acute{\varphi}_1(\xi)\right)^{\frac{1}{p(\xi)}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p(\xi)}}\left[\sum_{k=1}^{n}b_k\varphi_1^k(\xi)-f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right)\right]}{\xi-\acute{z}}d\xi$$
$$-\left(\acute{\varphi}_1(\acute{z})\right)^{\frac{1}{p(z')}}\left(\varphi_1(\acute{z})\right)^{-\frac{2}{p(z')}}f_1^-\left(\varphi_1(\acute{z})\right)-f^+(\acute{z}).$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $z'\to z$ على كامل المنحني Γ نجد أن

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\,\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_1^k(z)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)$$
$$-\mathrm{S}_\Gamma\left[\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)\right]$$
$$-\left(\acute{\varphi}_1(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}f_1^-\left(\varphi_1(z)\right)-f^+(z)$$

بأخذ النظيم في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$ لطرفي المساواة الأخيرة، وباستخدام متراجحة المثلث نجد أن:

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=0}^{n} b_k\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le\frac{1}{2}\left\|\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$+\left\|S_\Gamma\left(\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$

بما أن مؤثر كوشي الشاذ S_Γ محدود في الفضاء $L^{p(.)}(\Gamma)$، فإنه من العلاقة (3)، ثم بتطبيق متراجحة منكوفسكي وبالتعويض في المتراجحة الأخيرة نحصل على المتراجحة الآتية

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=0}^{n} b_k\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le\left(\frac{1}{2}+c_{11}\right)\left\|\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p(z)}}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{b_k}\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\le\left(\frac{1}{2}+c_{11}\right)\left\|\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} b_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(.)}(\gamma_0)}$$

بالاستفادة من التمهيديتين 3 و 4 وبالتعويض في المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=0}^{n} b_k\tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\le c_{12}\Omega\left(f_1^+,\frac{1}{n}\right)_{p_1(.)}\le c_{13}\,\Omega\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p_1(.)}.$$

مبرهنة 6 ليكن Γ منحني كارلسون و $f\in L^{p(.)}(\Gamma)$، حيث $p(.)\in\mathcal{P}_{\log}\ (\Gamma)$ ولنفترض أنَّ $p_1(.)\in\mathcal{P}_{\log}^a\ (\overline{D})$ و $p_0(.)\in\mathcal{P}_{\log}^a\ (\overline{D^-})$ عندئذٍ يوجد ثابت موجب c_{14} بحيث يكون التقدير الآتي محققاً

$$\left\|f(z)-R_{n,p(.)}(f,z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\le c_{14}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}\#(19)$$

حيث، $R_{n,p(.)}(f,z)$ دالة $p(.)$–فابير لورنت الكسرية المعرفة بالعلاقة (14).

البرهان: من علاقات سوخوتسكي (6) ومن العلاقة (14) لدينا

$$\left\|f(z)-R_{n,p(.)}(f,(\mathrm{z}))\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$=\left\|\left(f^{+}(z)-f^{-}(z)\right)-\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, F_{k,p(.)}(z)+\sum_{k=1}^{n}-b_k\, \tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$

وباستخدام متراجحة المثلث والعلاقتين (18) و (19) وبالتعويض في المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$\left\|f(z)-R_{n,p(.)}(f,(\mathrm{z}))\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\leq\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k\, F_{k,p(.)}(z)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}+\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n} b_k\, \tilde{F}_{k,p(.)}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$
$$\leq c_6\, \Omega\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p_0(.)}+c_{10}\, \Omega\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p_1(.)}$$
$$\leq \max\{c_6,c_{10}\}\left[\Omega\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p_0(.)}+\Omega\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p_1(.)}\right]=c_{14}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}$$

حيث $c_{14}=\max\{c_6,c_{10}\}$.

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى طريقة لتقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير المعرفة على منحنيات كارلسون بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة $p(.)-$ فابير لورنت. كما قمنا بتقدير الفرق بين الدالة وتقريباتها باستخدام معامل الاستمرارية في فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير. ونوصي بإتمام العمل في تقريب دوال هذا الفضاء بدراسة تقريب دوال فضاء ليبيغ ذي الأس المتغير المعرفة على منطقة ثنائية الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحنيين ينتميان إلى أسرة منحنيات كارلسون.

References:

[1] HALSEY, T. *Electrorheological fluids.* Science, vol. 258, no. 5083, 1992, 761-766.

[2] ABOULAICH, R.; MESKINE, D.; SOUISSI, A. *New diffusion models in image processing.* An International Journal Computers and Mathematics with Applications, vol. 56, no. 4, 2008, 874-882.

[3] ISRAFILOV, D.; GUVEN, A. *Trigonometric Approximation in Generalized Lebesgue spaces.* Journal of Mathematics Inequalities, vol. 4, no. 2, 2010, 285-299.

[4] AKGUN, R. *Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent.* Ukrainian Mathematical Journal, vol. 63, no. 1, 2011, 1-26.

[5] ISRAFILOV, D.; TESTICI, A. *Approximation by Faber–Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent.* Indagationes Mathematicae, vol. 27, no. 4, 2016, 914-922.

[6] ALI, M.; MAHMOUD, S.; KINJ, A. *Approximation by Rational Functions in Smirnov classes with variable*. Arabian Journal of Mathematics, vol. 6, no. 2, 2017, 79-86.

[7] SHARAPUDINOV, I. *Some questions of approximation theory in the spaces.* Anal. Math., vol. 33, no. 2, 2007, 135-153.

[8] ISRAFILOV, D.; GURSEL, E. *Approximation by p(·)-Faber polynomials in the variable Smirnov classes*. Math Meth Appl Sci., vol. 44, no. 9, 2020, 1-12.

[9] ISRAFILOV, D.; TESTICI, A. *Approximation in weighted Smirnov classes*. Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 60, no. 1, 2015, 45-58.

[10] KUFNER, A.; JOHN, O.; FUCIK, S. *Functions Spaces.* Walter de Gruyter, Leyden, 2012, 494.

[11] CRUZ-URIBE, D.; FIORENZA, A. *Variable Lebesgue spaces: foundations and harmonic analysis.* Springer Science & Business Media, New York, 2013, 312.

[12] POMMERENKE, C. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer-Verlage, Berlin, 1992, 300.

[13] BOTTCHER, A.; KARLOVICH, Y. *Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, 397.

[14] KOKILASHVILI, V.; SAMKO, S. *Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves*. Proc A Razmadze Math Inst., no. 138, 2005, 106-110.

[15] SHARAPUDINOV, I. *Approximation of functions in L p(x) by trigonometric polynomials*. Izv. RAN: Ser. Math., vol. 77, no. 2, 2013, 197–224.

[16] ISRAFILOV, D. *Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class and the Bieberbach polynomials.* Constr. Approx., vol. 17, , 2001, 335–351.

[17] SUETIN, P. *Series of Faber Polynomials.* Cordon and Breach Publishers, Nauka, Moscow, 1984, 320.

[18] GOLUZIN, G. *Geometric theory of functions of a complex variable*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1969, 676.

[19] ISRAFILOV, D.; TESTICI, A. *Approximation in Smirnov classes with variable exponent.* Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 60, no. 9, 2015, 1243-1253.